E. PASCAL
O. PROFESSOR AN DER KGL UNIVERSITÄT ZU NEAPEL

# REPERTORIUM DER HÖHEREN MATHEMATIK

ZWEITE, VÖLLIG UMGEARBEITETE AUFLAGE DER DEUTSCHEN AUSGABE, UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER MATHEMATIKER

HERAUSGEGEBEN VON

E. SALKOWSKI UND H. E. TIMERDING
IN HANNOVER IN BRAUNSCHWEIG

ERSTER BAND

## ANALYSIS

1927
LEIPZIG · VERLAG VON B. G. TEUBNER · BERLIN

# REPERTORIUM
# DER HÖHEREN ANALYSIS

UNTER MITWIRKUNG DER HERREN

A. BARNECK IN BERLIN · G. DOETSCH IN STUTTGART · F. ENGEL IN GIESSEN · R. FRICKE IN BRAUNSCHWEIG · A. GULDBERG IN OSLO H. HAHN IN WIEN · E. JAHNKE † IN BERLIN · H. W. E. JUNG IN HALLE E. PASCAL IN NEAPEL

HERAUSGEGEBEN VON

E. SALKOWSKI

PROFESSOR AN DER TECHN. HOCHSCHULE HANNOVER

ZWEITE AUFLAGE

ZWEITER TEILBAND

1927

LEIPZIG · VERLAG VON B. G. TEUBNER · BERLIN

# Vorwort.

Als der Verlag an den Unterzeichneten mit der Anregung herantrat, die Herausgabe von Pascals Repertorium zu übernehmen, war der erste Teilband bereits seit mehr als zwölf Jahren erschienen. Auch der Plan des Ganzen lag seit langem fest, doch war seine Ausführung durch mannigfache Schwierigkeiten, mehrfachen Wechsel der Herausgeber und Mitarbeiter, dann durch die Hemmungen der Kriegs- und Inflationszeit nur sehr ungleichmäßig gefördert worden: neben Beiträgen, die im Reindruck fertig vorlagen, standen andere in Fahnenkorrektur, während etwa die Hälfte noch völlig ausstand und die dafür früher gewonnenen Mitarbeiter sich zerstreut hatten.

Nur mit mancherlei Bedenken konnte ich an den Versuch herangehen, diesen Torso zu einem abgerundeten Ganzen zu vervollständigen. Die nähere Kenntnisnahme des bereits vorliegenden Stoffes indessen brachte mich zu der Überzeugung, daß es ein schwerer Schaden für das mathematische Publikum sein würde, wenn die wertvolle Arbeit dieser reizvollen, meist monographisch in sich geschlossenen Darstellungen verloren gehen würde. Die treue Mitarbeit der bisherigen und die freudige Zusage der neu gewonnenen Autoren ermöglichte es, trotz aller Schwierigkeiten das Ganze nun doch noch zu einem Ende zu fuhren, das dem ursprünglichen Plane fast ungeändert entspricht, wobei aber die Entwicklung doch bis zu dem jetzigen Stande der Wissenschaft geführt werden konnte.

Von der Absicht, die ausstehenden Beiträge in einem Schlußband zu vereinigen, mußte abgegangen werden; sollten die einzelnen Autoren nicht gar zu sehr in ihrer persönlichen Darstellungsform beeinträchtigt werden, so durfte die durch äußere Gründe gebotene Kürze nicht über ein gewisses Maß hinaus erzwungen werden. Somit war es nötig, den vorliegenden Stoff in zwei Teilbände $I_2$ und $I_3$ zu zerlegen, wobei in den vorliegenden Band $I_2$ — aus sachlichen und drucktechnischen Gründen — alles das eingeordnet wurde, was zu den „klassischen" Gegenständen

der Analysis gehört, insbesondere die analytischen Funktionen, während der Schlußband $I_3$ die „modernen“ Entwicklungen, die „reellen Funktionen“ enthalten wird. Daß dabei einige Gegen stände, insbesondere die Differentialgleichungen, in beiden Bänden auftreten, ist vom Standpunkte einer systematischen Anordnung zu bedauern, aber bei der von mir vorgefundenen Sachlage nicht gut zu vermeiden gewesen.

Es war in Aussicht genommen, die Teilbände $I_2$ und $I_3$ gleichzeitig hinausgehen zu lassen, schon weil erst beide zusammen zeigen, was die Herausgeber der zweiten Auflage des Repertoriums erstrebt hatten. Leider ist dies nicht möglich, da ein Mitarbeiter, auf dessen Beitrag seit Jahren gerechnet werden durfte, im letzten Augenblicke ausgeschieden ist. Es ist indessen mit Sicherheit zu erhoffen, daß auch der fehlende Band, der schon jetzt fast vollständig gedruckt vorliegt und dessen Anordnung dem Inhaltsverzeichnis des vorliegenden Bandes angefügt ist, in Kürze erscheinen kann.

Hannover, März 1927. **E. Salkowski.**

# Inhaltsverzeichnis.

## Kapitel X.
### Gewöhnliche Differentialgleichungen und Differenzengleichungen.
Von *A. Guldberg* in Oslo



## Kapitel XI.
### Partielle und totale Differentialgleichungen.
Von *A. Guldberg* in Oslo



## Kapitel XII
### Totale Differentialgleichungen und Differentialformen.
Von *Ernesto Pascal* in Neapel.



## Kapitel XIII
### Die Lehre von den Transformationsgruppen.
Von *A. Guldberg* in Oslo. Ergänzt von *F. Engel* in Gießen.[1])



1) Auf S. 601 fehlt der Name, da der Bogen bereits vor der Neubearbeitung des Kapitels durch Herrn *F. Engel* im Reindruck vorlag.

## Kapitel XIV.
## Variationsrechnung.

Von *Hans Hahn* in Wien.



## Kapitel XV
## Funktionentheorie.

Von *Gustav Doetsch* in Stuttgart

### I. Abschnitt. Grundbegriffe.



### II Abschnitt Integralsätze, Darstellung durch Reihen und isolierte singuläre Punkte



### III Abschnitt. Analytische Fortsetzung und Riemannsche Fläche.



### IV Abschnitt. Geometrische Funktionentheorie.

## Kapitel XVI

## Elliptische Funktionen und Integrale.

Von *E Jahnke* † in Berlin Überarbeitet und ergänzt von *A Barneck* in Berlin

## Kapitel XVII.

### Algebraische Funktionen und ihre Integrale.

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle a. d. S.



## Kapitel XVIII.

### Die Thetafunktionen und die Abelschen Funktionen.

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle a. d. S.

## Kapitel XIX.
## Automorphe Funktionen unter Einschluß der elliptischen Modulfunktionen.

Von *Robert Fricke* in Braunschweig.

## Inhaltsverzeichnis des abschließenden Teilbandes $I_3$.



## Berichtigungen.

S. 602 Z 10 v u. lies: $e_1 \xi_{12}(x')$
S. 603 Z. 14 v. o. lies $\delta x_\lambda$ und $\delta t$
S. 605 Z. 7 v. o lies: erleiden
S. 606 Z. 4 im Nenner lies $+ a_{n+1,n} x_n + a_{n+1,n+1}$
S. 607 Z 21 lies: $x_i' = \Pi_s(x_i)$.
S. 608 Z. 16 lies: ein Verein.

# Kapitel X.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen und Differenzengleichungen.

Von *A. Guldberg* in Christiania.

### § 1. Definitionen, Existenz der Lösungen.

Jede Relation zwischen einer unabhängigen Veränderlichen $x$, einer Funktion $y(x)$ dieser Veränderlichen und ihren Ableitungen bis zur $n^{\text{ten}}$ Ordnung wird eine *gewöhnliche Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung* genannt Wenn $m$ Relationen zwischen $x$, den $m$ Funktionen $y_1, \ldots y_m$ dieser Veränderlichen und ihren Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung vorliegen, so ist dies ein *System von $m$ gewöhnlichen Differentialgleichungen.*

Eine Relation zwischen den unabhängigen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, den Funktionen $y_1 \ldots y_m$ dieser Veränderlichen und einer endlichen Zahl ihrer *partiellen* Ableitungen nach den $x$ heißt eine *partielle Differentialgleichung* Eine Gesamtheit solcher Relationen heißt ein *System von partiellen Differentialgleichungen.*

Ein System von Differentialgleichungen *integrieren* oder auflösen, heißt: alle Funktionen $y_1 \ldots y_m$ bestimmen, die diesem System Genüge leisten

Jedes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen kann ersetzt werden entweder durch *eine* Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

oder durch ein System von Gleichungen 1. Ordnung, die nach den Ableitungen aufgelöst sind:

$$(2) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1 \ldots y_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wo die $f_i$ gegebene Funktionen von $x, y_1 \ldots y_n$ sind Die Zahl $n$ heißt die *Ordnung* des Systems (siehe § 5).

Wenn ein System von Funktionen $y_1 \ldots y_n$ von $n$ Konstanten abhängt, so kann man durch Elimination der Konstanten aus den Funktionen und ihren Ableitungen ein System (2) ableiten, dem die vorgelegten Funktionen genügen. Umgekehrt besitzt ein System (2) immer Lösungen, die von $n$ willkürlichen Konstanten abhängen. Genauer ausgedrückt: Das System (2) gestattet eine und nur eine Lösung $y_1(x) \ldots y_n(x)$ von der Art, daß die Funktionen $y_i$ für einen vorgegebenen Wert $x = x_1$ willkürlich vorgeschriebene Werte $y_i^0$ annehmen. Dieser Satz wurde von den Mathematikern des 18. Jahrhunderts als unmittelbar klar hingestellt, aber alle Beweise desselben fehlten, und die Bedingungen, denen die $f_i$ genügen mußten, blieben zu präzisieren. Cauchy hat zuerst diese Lücke ausgefüllt und dadurch der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen eine sichere Grundlage gegeben. Seitdem sind Cauchys Existenzbeweise vielfach neu bearbeitet und dabei teils vereinfacht (Lipschitz, *Lehrbuch d. Analysis*, S. 504 (1880); Volterra, *Giorn. di. mat.* **19**, 333 (1881)) in bezug auf die für die $f_i$ erforderlichen Bedingungen und teils erweitert (Picard, *Traité* **2**, 291sq.; Painlevé, *Bull. soc. math.* **27**, 151 (1899)) in bezug auf die Konvergenzgebiete der für die Lösungen benutzten Reihen. Die Existenzbeweise lassen sich ihrer Methode nach in drei Gattungen einteilen:

1. *Methode der Potenzreihenentwicklungen und Verwendung des Calcul des limites mit einer Majorante.*

2. *Interpolationsmethode,* bei der die Differentialgleichung näherungsweise als Differenzengleichung aufgefaßt wird

3. *Methode sukzessiver Approximation.*

Alle drei Methoden gehen auf Cauchy zurück. Bei der Methode des Calcul des limites wird das System (2) als analytisch vorausgesetzt, die $f_i$ als holomorphe Funktionen der Veränderlichen. Bei der zweiten Methode wurde von Cauchy vorausgesetzt, daß die $f_i$ und ihre ersten Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ reelle eindeutige stetige Funktionen der reellen Veränderlichen seien; diese Bedingungen sind von Lipschitz (a. a. O.) erweitert worden. Bei der dritten Methode sind die Lipschitzschen Bedingungen für die $f_i$ maßgebend. Beide Methoden lassen sich auf komplexe Variablen übertragen, die $f_i$ werden dann als holomorphe Funktionen der Veränderlichen vorausgesetzt (vgl Painlevé, *Enzykl.* **2**, 190ff.). Vgl Stäckel, *Math Ver.* **15**, 576 (1906); **16**, 279 (1907).

Untersuchungen der Lösungen in der Umgebung singulärer

Punkte der $f_i$ verdankt man Briot und Bouquet, *J. éc. polyt.* **21**, 161 (1856), Picard, *Traité d'an.* **3**, 23, 61, Poincaré, *Thèse*, 1879, Koenigsberger, *Lehrbuch d. Th. d. Diff. Gl.* 1889, Bendixon, *Stok. öp.* 1898, Horn, *J. f. Math.* **116—119** (1896—98), Lindelöf, *Acta Fenn.* **22** (1897), Roy, *C. R.*, Jan. 1899, Kneser, *J. f. Math.* **115**, 308 (1895); **118**, 186 (1897), Birkeland, *Arch. Math. og Nat.* **30**, 1 (1909), Boutroux, *Rend. Palermo* **29**, 265 (1910).

Unter dem *allgemeinen* Integral des Systems (2) versteht man eine Lösung

$$y_i = \varphi_i(x, a_1 \dots a_n), \qquad (i = 1 \dots n) \tag{3}$$

die von $n$ willkürlichen Konstanten $a_1 \dots a_n$ abhängt.

Cauchy (*C. R.* **2**, 85 (1836)) und Jacobi (*J. f. Math.* **23**, 119 (1841)) haben gezeigt, daß die Integration von (2) mit der Integration der *homogenen linearen partiellen Differentialgleichung*

$$Af = \frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{i=1}^{i=n} f_i(x, y_1 \dots y_n) \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \tag{4}$$

äquivalent ist Man weiß seit Lagrange (*Berl. nouv mém* (1779) 121), daß die Auflösung der Gleichungen (3) nach den Konstanten ein *Fundamentalsystem von Lösungen von* (4) gibt, d h. ein System von $n$ unabhängigen Lösungen dieser Gleichung. Umgekehrt erhält man das allgemeine Integral von (2), indem man $n$ Funktionen $z_1(x, y_1 \dots y_n), \dots z_n(x, y_1 \dots y_n)$, die ein Fundamentalsystem von (4) bilden, willkürlichen Konstanten gleichsetzt (vgl. Kap. XI) *Erstes Integral* oder *Integral* ohne Beiwort von (2) heißt jede Gleichung, die man erhält, indem man eine Lösung von (4) einer willkürlichen Konstante gleichsetzt Die Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung (1) wird auf ein System $n^{ter}$ Ordnung zurückgeführt, indem man

$$y = y_1, \quad \frac{dy}{dx} = y_2, \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_n \tag{5}$$

setzt.

Ein *erstes Integral* von (1) ist also eine Relation $\Theta(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) = a$, die von jeder Lösung von (5) für einen entsprechenden Wert der $a$ erfüllt wird Das *allgemeine Integral* von (1) ist definiert durch eine Relation $\varphi(x, y, a_1 \dots a_n) = 0$ und stellt folglich eine Familie von $\infty^n$ *ebenen Integralkurven* vor. Ein *partikuläres* Integral von (1) erhält man aus dem

allgemeinen, indem man den Konstanten spezielle Werte beilegt. Ein *singuläres* Integral von (1) ist ein Integral, das nicht aus dem allgemeinen Integral durch Partikularisierung der Konstanten hervorgeht.

## § 2. Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die Fälle, in denen man eine Differentialgleichung auf *Quadraturen* reduzieren kann, sind äußerst selten und müssen als Ausnahmen betrachtet werden. Wir führen hier einige der wichtigsten Fälle an, in denen die Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung auf diese Weise gelingt.

Die Differentialgleichung

$$M dx + N dy = 0, \tag{1}$$

wo $M$ und $N$ Funktionen von $x$ und $y$ sind, heißt eine *exakte* Differentialgleichung, wenn die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Differential $dU(x, y)$ ist. Die Bedingung dafür ist

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{a}$$

In diesem Falle erhält man das Integral unmittelbar aus der Formel

$$\int M dx + \int \left(N - \frac{d \int M dx}{dy}\right) dy = \text{const}$$

Zerfällt die Bedingung (a) in die folgenden zwei

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

so sind die Variablen *getrennt*.

Wenn $M dx + N dy$ nicht ein vollständiges Differential ist, so gibt es immer einen *Integrationsfaktor* oder *Multiplikator* $\mu$ von der Eigenschaft, daß $\mu M dx + \mu N dy = dU(x, y)$ ist (Euler, *N. Comm. Petr.* 8, 3 (1760)).

Der Multiplikator $\mu$ genügt der linearen partiellen Differentialgleichung

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0 \tag{b}$$

*Es gibt unendlich viele integrierende Faktoren.*

*Kennt man einen von ihnen $\mu$, so sind alle anderen in der Form $\mu f(U)$ enthalten, in welcher $dU = \mu M dx + \mu N dy$.*

*Sind zwei verschiedene Integrationsfaktoren $\mu$, $\mu'$ bekannt, so*

*liefert ihr Verhältnis, wenn es einer Konstanten gleichgesetzt wird, das Integral der Gleichung.*

Die Integration der Gleichung (b), die $\mu$ bestimmt, verlangt im allgemeinen die Integration der Gleichung (1), von welcher $\mu$ ein Integrationsfaktor ist. Es gibt aber eine Reihe *besonderer* Fälle, wo man $\mu$ direkt bestimmen kann; die wichtigsten sind die folgenden:

*Wenn einer der beiden Ausdrücke $Mx + Ny$ und $Mx - Ny$ identisch verschwindet, so ist der reziproke Wert des anderen ein Integrationsfaktor der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$.*

*Wenn keiner dieser beiden Ausdrücke verschwindet, so ist $\frac{1}{Mx+Ny}$ ein Integrationsfaktor der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, sobald $M$ und $N$ homogene Funktionen von $x, y$ von demselben Grad sind, und $\frac{1}{Mx-Ny}$ ein Integrationsfaktor, sobald die Gleichung* (1) *auf die Form $F_1(xy)ydx + F_2(xy)xdy = 0$ gebracht werden kann* (Boole, *Diff. equ.*, p. 63).

*Wenn $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ eine Funktion $\psi(x)$ von $x$ allein ist, so ist $\mu = e^{\int \psi(x)\,dx}$ ein Integrationsfaktor.*

Die *lineare* Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + Py - Q = 0,$$

wo $P$ und $Q$ Funktionen von $x$ sind, hat den Integrationsfaktor $\mu = e^{\int P\,dx}$. Ihr Integral ist

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(\int e^{\int P\,dx} Q\,dx + \text{const.}\right)$$

*Wenn $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ eine Funktion $\psi(y)$ von $y$ allein ist, so ist $\mu = e^{\int \psi(y)\,dy}$ ein Integrationsfaktor.*

Untersuchungen über Differentialgleichungen, die gegebene Integrationsfaktoren besitzen, finden sich bei Malmsten (*Journ. de Math* (2) **7**, 314 (1862)), Winckler (*Wien. Ber.* **99**, 457, 875 (1890)), Laguerre (*Œuvres* **1**, 409) Für die Methode von Lie vgl Kap XIII, § 5

Die bereits oben besprochene Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, bei der $M$ und $N$ homogene Funktionen von $x, y$ von demselben Grad sind, heißt *homogen;* setzt man $\frac{y}{x} = z$, so bringt man sie leicht auf die unmittelbar integrierbare Form

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)}{M(1, z) + z N(1, z)} dz = 0.$$

Die Gleichungen von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

werden auf den Typus der *homogenen* Gleichung gebracht, indem man

$$ax + by + c = x', \quad a'x + b'y + c' = y'$$

setzt. Verschwindet aber die Determinante, so wird

$$a'x + b'y + c' = m(ax + by + c) + n,$$

und man erhält, wenn man die Variable $x'$ allein an Stelle von $x$ einführt, eine Differentialgleichung, in der die Variablen getrennt sind.

Die Jacobische Gleichung (*J. f. Math.* **24**, 1 (1842); Darboux, *Bull. soc. math.* (1878) p. 72)

$$(A + A'x + A''y)(x\,dy - y\,dx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0$$

reduziert sich mittelst der Substitution

$$u = \frac{\alpha' + \beta'x + \gamma'y}{\alpha + \beta x + \gamma y}, \quad v = \frac{\alpha'' + \beta''x + \gamma''y}{\alpha + \beta x + \gamma y}$$

auf eine *homogene* Gleichung; die $\alpha, \beta, \ldots$ sind näher zu bestimmende Konstanten.

Die Bernoullische Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = Py + Qy^m,$$

in welcher $P$ und $Q$ Funktionen von $x$ sind, wird in eine *lineare* Gleichung durch die Substitution $y^{1-m} = z$ verwandelt.

Die Riccatische Gleichung (vgl. Study, *Arch. Math. Phys.* **16**, 113 (1910))

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

verdankt ihren Namen dem speziellen Falle:

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = ax^m \qquad (a,\ b \text{ Konstante}),$$

der von Riccati (*Acta crud.* (1722)) untersucht wurde. Diese letztere Gleichung läßt sich durch elementare Funktionen integrieren, wenn $m = -\frac{4k}{2k \pm 1}$ ($k$ eine ganze positive Zahl) ist. Die allgemeine Riccatische Gleichung läßt sich nicht durch Quadraturen integrieren. Sie hat interessante Eigenschaften:

1. sie läßt sich auf den Typus der Bernoullischen zurückführen, wenn man ein partikuläres Integral $u$ von ihr kennt und $y = u + v$ setzt, wo $v$ die neue unbekannte Funktion ist;

2. das allgemeine Integral hat die Form

$$y = \frac{c\varphi(x) + \psi(x)}{c\chi(x) + \omega(x)},$$

wenn $c$ die Integrationskonstante bedeutet; m. a. W. *das Doppelverhältnis von irgend vier partikulären Integralen ist konstant* (Picard, *An. éc norm.* (1) 6, 341 (1877); Weyr, *Prag Abh.* (6) 8, 30 (1875));

3. mittels der Substitution

$$y = \frac{1}{R} \frac{d \log z}{dx}$$

wird sie zu einer *linearen* Differentialgleichung 2. Ordnung.

Ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung in unaufgelöster Form

$$F(x, y, y') = 0$$

gegeben, so muß man sie im allgemeinen erst nach $y'$ auflösen. Man vermeidet dieses oft durch die folgende Methode, die man *Integration durch Differentiation* nennt.

Man bilde die drei Gleichungen:

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy' = 0,$$

$$dy - y' dx = 0$$

und eliminiere aus denselben $y$ und $dy$. Man erhält dadurch eine Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen $x$ und $y'$ von der Form $\frac{dy'}{dx} = f(x, y')$, sucht ihr allgemeines Integral $\varphi(x, y', a) = 0$, und hat dann $y'$ zwischen $F = 0$ und $\varphi = 0$ zu eliminieren.

Diese Methode führt zum Ziele bei der d'Alembertschen Gleichung

$$x\varphi(y') + y\psi(y') + \omega(y') = 0,$$

die auf diese Weise in eine lineare Gleichung übergeht. Ein spezieller Fall ist die Clairautsche Gleichung:

$$y - xy' + \varphi(y') = 0$$

mit dem allgemeinen Integral

$$y - ax + \varphi(a) = 0.$$

Lagrange (*Œuvres* **10**, 220) hat ferner gezeigt, daß Gleichungen von der Form

$$F(U(x, y, y'),\ V(x, y, y')) = 0$$

unmittelbar integrabel sind, wenn $U$ und $V$ zwei erste Integrale einer Gleichung 2. Ordnung sind. Ihr allgemeines Integral ergibt sich durch Elimination von $y'$ zwischen $U = a$, $V = b$, wo man $F(a, b) = 0$ hat. Die Bedingung, der $U$, $V$ genügen müssen, ist

$$[U, V] \equiv \left[\frac{\partial U}{\partial y'}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + y'\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial V}{\partial y'}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + y'\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right] = 0.$$

Gleichungen vom Typus

$$x = \varphi(y')$$

werden integriert, indem man $y'$ aus ihnen und aus

$$y = \int y'\varphi'(y')\,dy' + \text{const}$$

eliminiert.

Gleichungen vom Typus

$$y = \varphi(y')$$

werden integriert, indem man $y'$ aus ihnen und aus

$$x = \int \frac{\varphi'(y')}{y'}\,dy' + \text{const}$$

eliminiert.

Wir betrachten eine *algebraische* Differentialgleichung zwischen $x, y, y'$:

$$(\alpha) \qquad F(x, y, y') = 0.$$

Man erhält die *singulären Integrale* oder *Lösungen* von $F = 0$, indem man die Bedingung dafür aufstellt, daß die Gleichung $(\alpha)$

in $y'$ eine mehrfache Wurzel besitzt. Man hat also $y'$ zwischen

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

zu eliminieren.

Man ist dann zu einer Relation

$$Q(x, y) = 0$$

geführt, die aus mehreren Kurven zusammengesetzt sein kann. Die singulären Lösungen müssen ($\alpha$) genügen; die Gleichung $Q = 0$ liefert aber im allgemeinen keine so beschaffene Funktion $y$ von $x$, daß sie ($\alpha$) befriedigt. *Eine algebraische Differentialgleichung 1. Ordnung besitzt im allgemeinen keine singuläre Lösung.*

*Die Kurve $Q = 0$ ist im allgemeinen der geometrische Ort der Spitzen und Doppelpunkte der Integralkurven der Gleichung* ($\alpha$).

*Die singuläre Lösung ist, wenn sie existiert, die Einhüllende der Integralkurven von* ($\alpha$).

Man erhält auch die singuläre Lösung von ($\alpha$), indem man von dem allgemeinen Integral von ($\alpha$), das in der Form gefunden sein möge,

$$(\beta) \qquad \varphi(x, y, a) = 0$$

ausgeht. Lagrange (*Œuvres* **4**, 5) hat schon bemerkt, daß diese Kurvenschar eine Einhüllende besitzt, welche die Gleichung ($\alpha$) befriedigt und eine singuläre Lösung von ($\alpha$) darstellt. Die singuläre Lösung von ($\alpha$) ergibt sich also durch Elimination von $a$ zwischen

$$\varphi(x, y, a) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0$$

Es scheint dann unter diesem Gesichtspunkt, daß eine Differentialgleichung 1. Ordnung im allgemeinen eine singuläre Lösung besitzt. Die Erklärung dieses Paradoxons liegt darin, daß einer willkürlichen Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ nicht als allgemeines Integral eine Kurvenschar $\varphi(x, y, a) = 0$ entspricht, auf welche man die Theorie der Einhüllenden anwenden kann (vgl. Picard, *Traité d'Analyse* **3**, 44).

Der Begriff des singulären Integrals kommt schon bei Leibniz und Taylor vor; Clairaut und Euler stellen ihn in helles Licht. Lagrange (a. a. O.) gibt eine erste ausführliche Behandlung der Frage. Der oben erwähnte scheinbare Widerspruch ist erst von Cayley (*Mess.* **2**, 17 (1873); **6**, 29 (1877) und Darboux (*C. R.* **70**, 1332 (1870)) gehoben. Spätere ausführliche Behandlung gaben Picard (a. a. O.), Hamburger (*J. f. Math.* **112**, 205 (1893)) und Painlevé (*Leçons sur la th. anal. des éq. diff.*, p. 49 (1897)). Vgl. die geschichtliche Darstellung von Rothenberg, *Abh. Gesch. math. Wiss.* **20** (1907).

## § 3. Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Die allgemeinste Methode zur Integration einer Gleichung $n^{ter}$ Ordnung

$$(1)\qquad F(x, y, y' \ldots y^{n}) = P(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})\, y^{(n)} + Q(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

besteht in der Aufsuchung eines ersten Integrals, das man dann ebenso behandelt usw. Man nennt die Gleichung (1) *exakt*, wenn $F dx$ ein exaktes Differential, d. h. das totale Differential einer Funktion $U(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$ ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - \cdots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^n} = 0$$

sein muß. Die Auffindung eines ersten Integrals $U = $ const. ist dann reduziert auf die Integration eines exakten Differentiales von $(n+1)$ Variabeln (vgl. XI, § 4; vgl. Boole, *Differential equations* 222 (1872)). Wenn die Gleichung (1) nicht exakt ist, kann man mit L. Euler (*Inst. calc. int.* 2, 97) einen Multiplikator $M(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$ von der Art bestimmen, daß $M F dx$ ein exaktes Differential wird. Euler hat hiervon mehrere Anwendungen auf Gleichungen 2. und 3. Ordnung durchgeführt. Die interessanteste bezieht sich jedoch auf *lineare* Gleichungen. Suchen wir nämlich zu der linearen Gleichung:

$$p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$$

einen Multiplikator $M$, der nur von $x$ abhängt, so muß er der ebenfalls linearen Gleichung genügen (Lagrange, *Œuvres*, 1, 471):

$$p_n M - \frac{d}{dx}(p_{n-1} M) + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(p_0 M) = 0,$$

welche die zur gegebenen Gleichung adjungierte Differentialgleichung oder Lagrangesche *Adjungierte* genannt wird.

Die partiellen Differentialgleichungen, denen $M$ genügen muß, sind im allgemeinen sehr kompliziert. Ein anderes Verfahren zur sukzessiven Reduktion der Integration der Gleichung (1) ist von Guldberg (*J. f. Math.* 118, 158 (1898)) auseinandergesetzt.

In einigen Fällen läßt sich die Ordnung der Gleichung (1) erniedrigen; wir führen die wichtigsten an:

Die Gleichung hat die binomische Form

$$y^{(n)} = f(x),$$

ihr allgemeines Integral lautet:

$$y = \int\int \cdots \int f(x)\,dx^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n,$$

wo $c_1 \ldots c_n$ Integrationskonstanten sind.

Die Gleichung hat die Form

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}),$$

man erhält hieraus

$$x = \int \frac{d\,y^{(n-1)}}{f(y^{(n-1)})} + c;$$

kann man diese Integration ausführen, so bekommt man eine Gleichung von der Form $y^{(n-1)} = \Phi(x, c)$, deren Integration $n-1$ weitere Quadraturen verlangt.

Die Gleichungen vom Typus

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$$

geben, wenn man

$$y^{(n-2)} = p, \quad y^{(n-1)} = q$$

setzt,

$$\frac{1}{2} q^2 = \int f(p)\,dp + \text{const.}$$

$$x = \int \frac{dp}{q} + \text{const}$$

Hat man zuerst $p$ und dann $y^{(n-1)}$ als Funktion von $x$ gefunden, so ergibt sich schließlich $y$ durch sukzessive Integrationen. Die Gleichungen, in denen eine der Variablen, z. B. $y$, nicht explizit auftritt, erhalten eine niedrigere Ordnung, wenn man $y'$ als Variable einführt.

Ist die Gleichung homogen in bezug auf $y$ und seine Ableitungen, so führt die Substitution $x = e^u$ zu dem eben erwähnten Fall.

Ist die Gleichung homogen in bezug auf $x, y, dx, dy, d^2y, \ldots d^ny$, so führt ebenfalls die Substitution $x = e^u$, $y = ve^u$ auf diesen Fall.

Liouville (*Journ. de Math.* (1) 8, 131 (1844)) hat gezeigt, daß das Integral der Gleichung:

$$y'' + f(x)y' + \varphi(y)y'^2 = 0,$$

die Form

$$\int e^{\int \varphi(y)\,dy}\,dy = C_1 \int e^{-\int f(x)\,dx}\,dx + C_2$$

hat.

Jacobi (vgl. Boole, *Diff. equat.*, p. 228) hat bewiesen, daß, wenn man ein erstes Integral $y' = \varphi(x, y, c)$ der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

kennt, das allgemeine Integral die Form hat:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial c}(dy - \varphi\, dx) = \text{const.}$$

---

Differentialgleichungen höherer Ordnung können wie die Gleichungen 1. Ordnung *singuläre Integrale* oder *Lösungen* besitzen, d. i. Integrale, die nicht aus dem gewöhnlichen Integrale durch spezielle Wahl der Konstanten hervorgehen. Ihre Theorie ist behandelt von Lagrange (*Œuvres* **4**, 5, 585) und Legendre (*Mémoires de l'Ac. Roy. des Sciences*, 1790, p. 218); von späteren Arbeiten zitieren wir Goursat (*Amer. J. of Math.* **11**, 329 (1889)) und Hamburger (*Berl. Ber.* (1899) 140; *J. f. Math.* **121**, 265 (1900)). Wie bei den Gleichungen 1. Ordnung lassen sich die singulären Integrale sowohl aus der Differentialgleichung selbst wie aus ihren Integralgleichungen ableiten.

## § 4. Die linearen Differentialgleichungen.

Die Gleichung

$$Py = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0,$$

in welcher die Funktionen $p$ nur von $x$ abhängen, heißt eine *lineare homogene Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung.* Eine lineare homogene Differentialgleichung heißt nach Frobenius (*J. f. Math.* **76**, 236 (1873); vgl. für den Begriff *vollständig reduktibel* Loewy, *Math. Ann.* **62**, 89 (1906)) *irreduktibel*, wenn sie mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung und mit gleichartigen Koeffizienten (d. h. von demselben Rationalitätsbereich) ein Integral gemein hat; anderenfalls heißt sie für den betrachteten Rationalitätsbereich *reduktibel.* Ein Rationalitätsbereich wird von irgendeinem derartigen vollständigen oder in sich abgeschlossenen System von Funktionen der unabhängigen Variablen $x$ gebildet, daß man die Funktionen des Systems unbeschränkt untereinander addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (ausgenommen der Division durch Null), sowie eine jede differentiieren kann, ohne hierdurch das vorgelegte Funktionensystem zu verlassen (vgl. Loewy, a. a. O. S. 90).

Die Eigenschaften der linearen homogenen Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung bieten die größte Analogie zu denen der

algebraischen Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades. Wir werden einige von den wichtigsten hier anführen (vgl. L. Schlesinger, *Handb. d. Th. d. lin. Diff.-Gl.* (1905), mit ausgezeichnetem Literaturnachweis). Der Taylorschen Formel bei den algebraischen Gleichungen entspricht hier die Formel:

$$P(yz) = zPy + \frac{1}{1}\frac{dz}{dx}P'y + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2z}{dx^2}P''y + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^nz}{dx^n}P^{(n)}y,$$

wo $P'y$, $P''y$ ... aus $Py$ nach einem der Derivation ganz analogen Algorithmus abgeleitet sind. Kennt man eine partikuläre Lösung $y_1$ der Gleichung (1), so ermöglicht diese Formel die Ordnungserniedrigung derselben um eine Einheit. Genügt $y_1$ zugleich den Gleichungen $Py = 0$, $P'y = 0$ ... $P^{(k)}y = 0$, m. a. W. sind $y_1$, $xy_1$, $x^2y_1$, ... $x^{k-1}y_1$ gleichzeitig Lösungen, so erniedrigt sich die Ordnung um $k$ Einheiten; dieser Fall entspricht dem einer $k$-fachen Wurzel bei den algebraischen Gleichungen.

Kennt man ferner $k$ linear unabhängige partikuläre Lösungen, so kann man die Ordnung der Gleichung um $k$ Einheiten erniedrigen (Lagrange).

Die Bedingung, daß $k$ Lösungen $y_1, y_2 \ldots y_k$ *linear unabhängig*, d. h. durch keine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten verknüpft sind, ist, daß die Wronskische Determinante

$$\Delta(y_1, y_2 \ldots y_k) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdot & y_k \\ y_1' & \cdot & y_k' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(k-1)} & \cdot & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

nicht identisch Null ist (vgl. S. 151). Ein System von $n$ linear unabhängigen Lösungen nennt man ein *Fundamentalsystem* (Fuchs, *J. f. Math.* **66**, 121 (1866)). Lagrange (*Œuvres* **1**, 473) hat bewiesen, daß die allgemeine Lösung durch

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

dargestellt wird, wenn $y_1 \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem bilden und $c_1 \ldots c_n$ willkürliche Konstanten sind. Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen eines Fundamentalsystems schließt nicht aus, daß zwischen denselben homogene Relationen *höheren* Grades bestehen. Es ist nur erforderlich, daß die Anzahl dieser Beziehungen höheren Grades $\leqq n-2$ sei (Fuchs, *Acta Math.* **1**, 321 (1882); Schlesinger, *Diss. Berlin* 1887; Wallenberg, *J. f. Math.* **113**, 1 (1894)).

*Aus zwei linearen homogenen Differentialgleichungen* $Ay = 0$ *und* $By = 0$ *von den Ordnungen* $m$ *und* $n (< m)$ *von der Beschaffenheit, daß alle Integrale der zweiten auch die erste befriedigen, kann man immer ohne Integration eine dritte lineare Gleichung* $Cy = 0$ *von der Ordnung* $m - n$ *bilden, so daß die Gleichung* $m^{ter}$ *Ordnung in zwei andere von der Ordnung* $n$ *und* $m - n$ *zerlegt erscheint* $Ay = CBy$ (Libri, *J. f. Math.* **10**, 185 (1833)).

*Eine lineare homogene Differentialgleichung* $Py = 0$, *die mit einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung* $Qy = 0$ *mit gleichartigen Koeffizienten ein Integral gemein hat, wird durch jedes Integral von* $Qy = 0$ *erfüllt* (Frobenius, *J. f. Math.* **76**, 236 (1873)).

Haben zwei lineare homogene Differentialgleichungen $Py = 0$, $Qy = 0$ mit gleichartigen Koeffizienten *kein* Integral gemeinsam, so gibt es eine lineare homogene Differentialgleichung $Ny = 0$ mit gleichartigen Koeffizienten, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen von $Py = 0$ und $Qy = 0$ ist und die durch alle Integrale von $Py = 0$ und $Qy = 0$ erfüllt wird (Brassine in Sturm, *Cours d'Analyse* **2**, Note 3, p. 317, Ausgabe von 1868; Heffter, *J. f. Math.* **116**, 157 (1896), Loewy, *Math. Ann.* **56**, 549 (1903)). Der lineare homogene *Differentialausdruck* $Ny$ wird das *kleinste gemeinsame Vielfache* von $Py$ und $Qy$ genannt. Man setzt *symbolisch*

$$N = APy, \quad N = BQy,$$

wo $Ay$ und $By$ lineare homogene Differentialausdrücke mit gleichartigen Koeffizienten bedeuten. Über die *Zerlegung* eines linearen homogenen Differentialausdrucks in irreduzible Faktoren siehe Arbeiten von Frobenius, Landau und Loewy (*J. f. Math.* **80**, 326 (1875); **124**, 117 (1904); *Math. Ann.* **62**, 112 (1906)).

Die lineare homogene Differentialgleichung $Pz = 0$ von $n^{ter}$ Ordnung ist mit der linearen homogenen Differentialgleichung $Qy = 0$ von $m^{ter}$ Ordnung mit gleichartigen Koeffizienten *von derselben Art*, falls man von den Integralen von $Qy = 0$ zu denen von $Pz = 0$ durch die Beziehung

$$z = \alpha_0(x)y + \alpha_1(x)y' + \cdots + \alpha_{m-1}(x)y^{(m-1)}$$

übergehen kann; die $\alpha$ gehören zu demselben Rationalitätsbereiche wie alle Koeffizienten von $Pz = 0$ und $Qy = 0$.

*Gehören von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen derselben Ordnung die eine mit der anderen zu derselben Art, so sind sie gegenseitig von derselben Art* (Fuchs, *Berl. Sitzungsber.* 1888, S. 1274).

*Ist eine lineare homogene Differentialgleichung irreduzibel, so sind alle linearen homogenen Differentialgleichungen, die mit ihr von derselben Art sind, ebenfalls ausnahmslos irreduzibel und von derselben Ordnung* (Fuchs, *Berl. Sitzungsber.* 1888, S. 1274).

Die lineare homogene Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung, die ein gegebenes Fundamentalsystem von Lösungen $y_1 \dots y_n$ besitzt, läßt sich in Determinantenform darstellen, wobei die Koeffizienten $p_i(x)$ durch die Lösungen $y_1 \dots y_n$ ausgedrückt werden:

$$Py = \begin{vmatrix} y & y' & y'' & \dots y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \dots y_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & y_n'' & \dots y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \Delta(y, y_1, y_2, \dots y_n) = 0.$$

Speziell hat man die Formel von Liouville (*Journ. de Math.* (1) **3**, 349 (1838))

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = -\frac{d \log \Delta(y_1 y_2 \dots y_n)}{dx} = -\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{\Delta}.$$

Die Determinante $\Delta(y_1 y_2 \dots y_n)$ genügt also einer linearen homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung. Ferner genügen alle aus denselben $m$ Zeilen von $\Delta$ entnommenen Minoren einer und derselben linearen homogenen Differentialgleichung und bilden von ihr ein Fundamentalsystem von Lösungen; ersetzt man die $m$ Zeilen durch $m$ andere, so erhält man Gleichungen derselben Art; die Gleichung, die $\Delta(y_1 y_2 \dots y_m)$ genügt, heißt die $(n-m)^{\text{te}}$ *Assoziierte* von $Py = 0$ (vgl. Schlesinger, a. a. O. **2** 1, 125, Loewy, *Trans. Amer. M. S.* **5**, 61 (1904)). Jacobi hat gezeigt, daß die erste Assoziierte in naher Beziehung zu der *Lagrangeschen Adjungierten* (vgl. § 3) steht.

Auch die Galoissche Theorie (vgl. Kap. V, § 12) der algebraischen Gleichungen hat ihr Analogon in der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen. Das allgemeinste Fundamentalsystem $y_1, y_2 \dots y_n$ der Gleichung (1) läßt sich aus einem speziellen $y_1, \dots y_n$ durch die Gleichungen:

$$y_i = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} c_{i\lambda} y_\lambda \qquad (i = 1, \dots, n)$$

ableiten, die die allgemeine lineare homogene Gruppe $G$ (vgl. S. 222) definieren. Diese Gruppe spielt hier dieselbe Rolle

wie die Gruppe der Vertauschungen von $n$ Buchstaben für die algebraische Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades (vgl. S. 298).

*Die Quotienten* $\frac{p_k}{p_0}$ *sind als Funktionen der y und ihrer Ableitungen Differentialinvarianten* (vgl. Kap. XIII, § 3) *der Gruppe G, und jede mit den y und ihren Ableitungen gebildete Differentialinvariante von G ist Funktion der* $\frac{p_k}{p_0}$ *und ihrer Ableitungen allein* (Appell, *Ann. éc. norm.* (2) **10**, 400 (1881)).

Einer linearen homogenen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Koeffizienten entspricht eine Untergruppe $\Gamma$ der allgemeinen homogenen linearen Gruppe in $n$ Veränderlichen mit folgender Doppeleigenschaft: *Jede rationale Funktion V von* $y_1 \ldots y_n$ *und ihren Ableitungen, die eine rationale Funktion von x ist, ändert bei allen Transformationen von* $\Gamma$ *ihren Wert nicht. Jede rationale Funktion von* $y_1 \ldots y_n$ *und ihren Ableitungen, die bei den Transformationen von* $\Gamma$ *ihren Wert nicht ändert, ist eine rationale Funktion von x* (Picard, *C. R.* **96**, 1131 (1883); *Traité d'Analyse* **3**, 531; Vessiot, *Ann. éc. norm.* (3) **9**, 197 (1892), vgl. Loewy, *Math. Ann.* **65**, 129 (1908)).

Diese Gruppe heißt die *Transformationsgruppe* oder *Rationalitätsgruppe* der Gleichung. Durch eine solche Gruppe $\Gamma$ ist jede Gleichung charakterisiert. *Eine lineare homogene Differentialgleichung ist dann und nur dann durch Quadraturen integrierbar, wenn ihre Rationalitätsgruppe eine integrable Gruppe ist* (vgl. Kap. XIII; Vessiot, a. a. O.)

*Die allgemeine lineare homogene Differentialgleichung* $n^{\text{ter}}$ *Ordnung für* $n > 1$ *ist nicht durch Quadraturen integrierbar* (Vessiot, a. a. O.).

*Durch algebraische Funktionen integrierbar ist eine lineare homogene Differentialgleichung dann und nur dann, wenn ihre Rationalitätsgruppe nur eine endliche Anzahl von Transformationen enthält* (Vessiot, *loc cit.*).

Hat die Gleichung (1) *konstante* Koeffizienten, also die Form:

$$Py = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots a_n y = 0,$$

wo die $a$ Konstanten sind, so läßt sie sich durch elementare Funktionen integrieren. Setzt man

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

und bezeichnet $m$ eine Konstante, so hat man

$$P(e^{mx}) = e^{mx} f(m), \quad P'(e^{mx}) = e^{mx} f'(m), \ldots$$

Jede Wurzel $m$ der *charakteristischen* Gleichung $f(x) = 0$ gibt eine Lösung $y = e^{mx}$, und jede $k$-fache Wurzel $k$ Lösungen $e^{mx}, xe^{mx}, \ldots x^{k-1}e^{mx}$. Die so erhaltenen $n$ Lösungen sind linear unabhängig (Euler, *Misc. Ber.* **7**, 193 (1743), d'Alembert). Sind die Koeffizienten *reell*, so kann man die $2k$ Partikularlösungen, die zwei konjugiert-komplexen $k$-fachen Wurzeln $m = \alpha \pm \beta i$ der Gleichung $f(x) = 0$ entsprechen, durch Lösungen der reellen Form

$$x^h e^{\alpha x} \cos\beta x, \quad x^h e^{\alpha x} \sin\beta x \qquad (h = 0, 1, 2 \ldots k-1)$$

ersetzen.

Lineare homogene Differentialgleichungen von der Form

$$(a + bx)^n y^{(n)} + A(a + bx)^{n-1} y^{(n-1)} + B(a + bx)^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + Ly = 0,$$

wo die $a$, $b$, $A$, $B \ldots L$ Konstanten sind, reduzieren sich durch die Substitution $a + bx = e^t$ auf eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Eine andere Klasse linearer Gleichungen, die sich durch elementare Funktionen integrieren lassen, hat Halphen (*C. R.* **92**, 779 (1881)) angegeben. Liouville (*Journ. de Math.* **6**, 5 (1841)) hat gezeigt, daß die Gleichung

$$y'' + 2ky' + \frac{n(n+1)}{x^2} y = 0,$$

wo $k$ eine Konstante, $n$ eine ganze Zahl ist, sich durch elementare Funktionen integrieren lasse.

Die *nicht homogene* lineare Differentialgleichung (Gleichung *mit zweitem Glied*) hat die Form

(2) $$Pz = q(x),$$

wo $q(x)$ eine Funktion von $x$ ist.

Kennt man von ihr ein partikuläres Integral $z_0$ und setzt $z = z_0 + y$, so kommt man auf $Py = 0$ zurück. Das allgemeine Integral von (2) ist dann

$$z = z_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k,$$

wo $y_1 \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $Py = 0$ ist.

Durch seine *Methode der Variation der Konstanten* hat Lagrange (*Œuvres* **4**, 111; **5**, 123) gezeigt, daß man, wenn man das allgemeine Integral von $Py = 0$ kennt, das von Gleichung (2) durch Quadraturen bestimmt.

Sei nämlich das allgemeine Integral von $Py = 0$:

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} c_k y_k,$$

so löse man die folgenden linearen Gleichungen nach den $\frac{dc}{dx}$ auf:

$$\sum \frac{dc_k}{dx} y_k = 0, \quad \sum \frac{dc_k}{dx} y_k' = 0 \ldots \sum \frac{dc_k}{dx} y_k^{(n-2)} = 0,$$

$$\sum \frac{dc_k}{dx} y_k^{(n-1)} = \frac{q(x)}{p_0(x)},$$

integriere die sich ergebenden Beziehungen:

$$\frac{dc_1}{dx} = \varphi_1(x) \ldots \frac{dc_n}{dx} = \varphi_n(x)$$

und findet durch $n$ Quadraturen die $c_1 \ldots c_n$, die, in den Ausdruck für $y$ eingesetzt, das allgemeine Integral von (2) liefern. Kennt man ein partikuläres Integral von $Py = 0$, so reduziert die Integration von (2) sich auf die Integration einer anderen nicht homogenen Gleichung von niedrigerer Ordnung.

Die linearen Systeme, deren allgemeine Form ist

$$\frac{dy_i}{dx} - \sum_{k=n}^{k=n} f_{ik}(x) y_i = \varphi_i(x)$$

haben analoge Eigenschaften wie die linearen Gleichungen. Sind die $\varphi_i$ gleich Null, so heißt das System *homogen*; es besitzt *Fundamentalsysteme*, gebildet aus $n$ Lösungen $y_{ik}$ $(ik = 1, 2 \ldots n)$, deren Determinante $\Delta = |y_{ik}|$ nicht identisch Null ist. Die allgemeine Lösung ist

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c_k y_{ki}, \qquad (i = 1 \ldots n)$$

wo die $c$ Konstanten sind. Sind die $f_{ik}$ konstant, so läßt das homogene System sich durch elementare Funktionen integrieren. Das nicht homogene System läßt sich durch Quadraturen integrieren, sobald das entsprechende homogene System integriert ist (vgl. Schlesinger, *Vorl. über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig 1908).

Die linearen Systeme sind ein spezieller Fall von *Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen*, d. h. Gleichungen, deren allgemeine Lösung sich vermittelst einer bestimmten Anzahl partikularer Lösungen und willkürliche Konstanten ausdrücken läßt;

sie sind behandelt von **Königsberger** (*Acta Math.* **8**, 1 (1883)); **Vessiot** (*Ann. éc. norm.* (3) **10**, 53 (1893); *C. R.* **116**, 1112 (1893)); **Bohlmann** (*J. f. Math.* **115**, 89 (1895); **Guldberg** (*J. f. Math.* **115**, 111 (1895)) und **Lie** (*Leipz. Ber.* **45**, 341 (1893); **48**, 394 (1896); vgl. **Lie-Scheffers**: *Kontinuierliche Gruppen*, Kap. XXIV).

Da eine lineare Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn $n > 1$ ist, sich nicht durch Quadraturen integrieren läßt, hat man ihre Integrale in *Reihen* entwickelt. Bei Aufstellung der Reihen und Untersuchung ihrer Konvergenzgebiete hat man auf die singulären Stellen zu achten. Die Singularitäten der Integrale einer Differentialgleichung werden in *feste* und *bewegliche* singuläre Stellen eingeteilt, je nachdem sie von den Koeffizienten der Differentialgleichung allein abhängen, oder auch von den willkürlichen Integrationskonstanten. Die Integrale einer linearen Gleichung haben nur feste Singularitäten, was auch bei den Integralen der oben genannten Gleichungen mit Fundamentallösungen der Fall ist.

Im Jahre 1884 bestimmte **Fuchs** (*Berl. Sitzungsb.* (1884) 699) sämtliche algebraischen Differentialgleichungen 1. Ordnung, deren Integrale feste singuläre Punkte besitzen. Bald darauf zeigte **Poincaré** (*Acta Math.* **7**, 1 (1885)), daß diese Gleichungen sich entweder durch Quadraturen lösen oder auf lineare Differentialgleichung 2. Ordnung reduzieren lassen. **Picard** (*Acta Math.* **17**, 297 (1893)) betrachtete zuerst die algebraischen Differentialgleichungen 2. Ordnung, deren Integrale feste singuläre Punkte besitzen. **Painlevé** (*Acta Math.* **25**, 1 (1902)) gab dann eine allgemeine Methode, sämtliche solche Gleichungen 2. Ordnung zu bestimmen. Seine Resultate sind von **Gambier** (*Acta Math.* **33**, 1 (1909)) vervollständigt.

Sind in der linearen homogenen Gleichung $Py = 0$ die Koeffizienten eindeutige Funktionen von $x$, die nur eine endliche Anzahl von singulären Stellen besitzen, und läßt man die Variable $x$ einen geschlossenen Umlauf in der $x$-Ebene ausführen, so erleiden die verschiedenen Fundamentalsysteme verschiedene lineare Substitutionen. Zu jedem singulären Punkt gehört eine *Fundamentalsubstitution*. Die Gesamtheit aller Fundamentalsubstitutionen der Gleichung erzeugt die *Substitutionsgruppe* oder *Monodromiegruppe der Gleichung*.

Bei einem geschlossenen Umlauf um einen einzigen singulären Punkt $x = a$ erleidet jedes Fundamentalsystem $y_1 \ldots y_n$ eine lineare Substitution, also

$$y_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{in} \cdot \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Soll ein Integral bei einem solchen Umlauf sich bis auf einen konstanten Faktor $\mu$ reproduzieren, so muß $\mu$ die Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades:

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\mu, & a_{21}, \ldots, & a_{n1} \\ a_{12}, & a_{22}-\mu, \ldots, & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}, & a_{2n}, \ldots, & a_{nn}-\mu \end{vmatrix} = 0$$

befriedigen; diese Gleichung heißt *die zu dem Punkte gehörige Fundamentalgleichung* (Fuchs, *J. f. Math.* **66**, 133 (1866)) oder *charakteristische Gleichung;* sie ist *unabhängig* von der Wahl des Fundamentalsystems $y_1 \ldots y_n$.

*Wenn die Gleichung* $(\alpha)$ *nur verschiedene Wurzeln besitzt, so gibt es ein Fundamentalsystem* $u_1, \ldots u_n$, *das multipliziert mit den Konstanten* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ *sich reproduziert, wenn* $x$ *sich um* $a$ *bewegt. Die* $n$ *Integrale haben die Form*

$$u_i = (x-a)^{\nu_i}\varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

*wo* $\nu_i = \frac{1}{2\pi i}\log\mu_i$ *ist und die* $\varphi$ *eindeutige Funktionen von* $x$ *in der Umgebung von* $a$ *sind*

*Sind aber die Wurzeln der Gleichung* $(\alpha)$ *nicht sämtlich verschieden, ist vielmehr* $\mu$ *eine* $\lambda$*-fache Wurzel, so tritt an Stelle von* $\lambda$ *Integralen von der oben angegebenen Form die folgende Gruppe von Integralen:*

$$u_i = (x-a)^{\nu}\{\varphi_{0i}(x) + \varphi_{1i}(x)\log(x-a) + \ldots + \varphi_{i-1,i}(x)[\log(x-a)]^{i-1}\}, \qquad (i = 1, 2 \ldots \lambda)$$

*wo* $\nu = \frac{1}{2\pi i}\log\mu$ *und die* $\varphi$ *in der Umgebung von* $x = a$ *eindeutige Funktionen sind; die i Funktionen* $\varphi_{01}, \varphi_{12}, \ldots \varphi_{i-1,i}$ *der letzten Kolonne unterscheiden sich nur durch konstante Faktoren*

Ein Integral $u$ besitzt in einem Punkte $x = a$ eine *Stelle der Bestimmtheit,* wenn die Laurentschen Reihen für die Funktionen $\varphi$ *keine* oder *eine endliche Anzahl Potenzen von* $\frac{1}{x-a}$ enthalten Im andern Fall ist $x = a$ eine *Stelle der Unbestimmtheit*

*Damit eine lineare homogene Differentialgleichung mit eindeutigen Koeffizienten, die man immer in der Form*

$$(x-a)^n y^{(n)} + (x-a)^{n-1}p_1(x)y^{(n-1)} + \quad + p_n(x)y = 0$$

*ansetzen kann, ein Fundamentalsystem von Integralen besitzt, für die die Stelle* $x = a$ *eine Stelle der Bestimmtheit ist, ist notwendig*

*und hinreichend, daß die Funktionen $p_1(x) \dots p_n(x)$ für $x = a$ eindeutig und stetig sind, also sich nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$ entwickeln lassen.*

Die linearen Gleichungen von der Form

$$\psi^n y^{(n)} + g_1 \psi^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + g_n y = 0,$$

wo $\psi = (x - a_1) \dots (x - a_\varrho)$ und $g_\lambda$ eine ganze rationale Funktion von $x$ vom Grade $\leqq \lambda(n - 1)$ ist, werden als *Fuchsscher Typus* bezeichnet. Dieser ist charakterisiert als diejenige Gattung linearer homogener Differentialgleichungen mit eindeutigen Koeffizienten, deren Integrale *nirgends* eine Stelle der Unbestimmtheit besitzen. Einen besonderen Fall ($n = 2$, drei singuläre Punkte) bildet die Differentialgleichung der Riemannschen *P*-Funktion, die im wesentlichen mit der Differentialgleichung der Gaußschen Reihe übereinstimmt. Ferner hat Fuchs darauf hingewiesen, daß jede algebraische Funktion einer Variablen einer linearen Differentialgleichung dieser Art genügt. Das Problem der algebraisch integrierbaren linearen Differentialgleichungen ist insofern mit der Aufstellung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen verknüpft, als für die algebraische Integrabilität notwendig und hinreichend ist, daß die betreffende Differentialgleichung zum Fuchsschen Typus gehört, und daß ihre Substitutionsgruppe endlich ist.

Thomé (*J. f. Math.* **83**, 89 (1877)) hat gewisse einfachste Fälle von Integralen, die in $x = a$ unbestimmt werden, entdeckt und eingehend untersucht; es sind dies Integrale der Form

$$e^{g(x)}(x - a)^r \varphi(x),$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion von $(x - a)^{-1}$, $\varphi(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a$ bedeutet. Thomé nennt sie *Normalintegrale*. Die Reihen $\varphi(x)$ sind im allgemeinen divergent. Die Bedeutung dieser divergenten Reihen, die der Differentialgleichung formell genügen, hat Poincaré (*C. R* **101**, 939, 990 (1885); *Am. Journ* **7**, 203 (1885)) untersucht. Er zeigte, daß eine solche Normalreihe vom Range $p$, wobei $p$ der Grad der ganzen Funktion $g(x)$, stets gewisse Lösungen asymptotisch darstellt, wenn sich die Variable $x$ dem Punkte $a$ in einer bestimmten Richtung annähert. Über die Anzahl der in $x = a$ sich bestimmt verhaltenden Integrale einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten vgl. Perron, *Acta math.* **34**, 139 (1910), *Math. Ver.* **19**, 129 (1910).

In dem Falle, wo die Normalreihen divergieren, geben sie

über das funktionentheoretische Verhalten der Lösungen in der Umgebung der betreffenden Stelle keinen unmittelbaren Aufschluß.

Für die Bestimmung der wahren Exponenten (oder der Wurzeln der zu dem betreffenden Punkte gehörigen Fundamentalgleichung) und der Koeffizienten jener Laurentschen Reihen, für die sich lineare Rekursionsformeln, aber in Form von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten ergeben, hat zuerst Hamburger (*J. f. Math.* **83**, 185; **84**, 264 (1877)) eine Methode angegeben. Eine zweite Methode besteht in der Anwendung der *unendlichen Determinanten* (v. Koch, *Acta Math.* **15**, 33 (1891); **16**, 217 (1892); vgl. Horn, *Gew. Diff.*, Leipzig 1905, S. 206). Neben dem Fall, wo das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung algebraisch ist, hat man auch die Fälle betrachtet, wo weniger als $n$ linear unabhängige Integrale algebraisch sind. Ist für eine lineare Differentialgleichung nur ein partikuläres Integral algebraisch, so ist dieses die Wurzel einer rationalen Funktion. Lamé (*Leçons sur les fonctions inverses des transcendants et les surfaces isothermes*, 1857) stellte die Frage, wann die Differentialgleichung

$$R(x)\frac{d^2y}{dx^2} + R'(x)\frac{dy}{dx} - [n(n+1)k^2x^2 + h]\,y = 0$$

$$R(x) = (1 - x^2)(1 - k^2x^2),$$

durch eine ganze rationale Funktion von $x$ befriedigt werden kann. Es zeigt sich, daß $n$ eine ganze Zahl sein muß und $h$ als Wurzel einer gewissen algebraischen Gleichung zu wählen ist. Hermite (*C. R.* **85**, 689, 728f (1877)) hat dann an die Lamésche Gleichung die Aufgabe geknüpft, das allgemeine Integral für den Fall zu bestimmen, daß $h$ beliebig, während $n$ noch eine ganze Zahl ist. Die Untersuchungen von Hermite sind später von Picard (*C. R.* **90**, 128, 293 f. (1880)) und anderen fortgesetzt.

In betreff eingehender Untersuchungen der linearen Differentialgleichungen und der Leistungen der hier tätigen Mathematiker siehe Schlesinger, *Handb. d. Th. d. lin. Differentialgl.* und „*Bericht üb. d. Entwicklung d. Th. d. lin. Differentialgl. seit 1865*", (*Math.-Ver.* **18**, 133 (1909)), samt Schlesinger, *Vorlesungen üb. lin. Differentialgl.* (1908).

Bei gewissen Fragen der mathematischen Physik handelt es sich um die Integration von linearen Differentialgleichungen aus anderem Gesichtspunkt; so führt z. B. das Problem einer schwingenden ungleichförmigen Saite auf die Gleichung

$$y'' = \lambda\varphi(x)\,y,$$

wo $\varphi(x)$ eine gegebene positive Funktion von $x$ bedeutet. Im Jahre 1763 wurde von d'Alembert gezeigt, daß man den Parameter $\lambda$ so bestimmen kann, daß die Gleichung eine Lösung zuläßt, welche in den Punkten $x = a$ und $x = b$ verschwindet, ohne identisch zu verschwinden. Die grundlegende Abhandlung in dieser Art von Fragen ist von Sturm (*Journ. de Math.* **1**, 106 (1836)). Er betrachtet die lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, welche er in der Gestalt schrieb:

$$\frac{d\left(K\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + Gy = 0.$$

Hierbei bedeuten $K$ und $G$ beliebige Funktionen von $x$ und von einem Parameter $\lambda$, welche in dem Intervall $a \leq x \leq b$ nicht unendlich werden dürfen. Er beweist das folgende sogenannte *Oszillationstheorem: Lassen wir $\lambda$ zwischen zwei (endlichen oder unendlichen) Werten $\lambda'$ und $\lambda''$ variieren ($\lambda' < \lambda''$). Hierbei möge mit wachsenden $\lambda$ die Funktion $G$ monoton abnehmen, $K$ aber monoton wachsen, und zwar möge das Verhältnis $G/K$ von $+\infty$ bis $-\infty$ abnehmen. Seien ferner $f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ zwei willkürliche gegebene Funktionen, welche mit $\lambda$ monoton wachsen. Dann gibt es einen und nur einen Wert $\lambda = \lambda_1$ für welchen die gegebene Gleichung eine Lösung $y$ besitzt, welche in dem Intervall $a \leq x < b$ eine beliebig vorgeschriebene Anzahl von Malen verschwindet, und für welche die Funktion $K\frac{dy}{dx}\Big/ y$ in den Punkten $a$ und $b$ bzw. die Werte $f_1(\lambda)$ und $-f_2(\lambda)$ annimmt.*

Die Resultate von Sturm sind später teils auf ihre Gültigkeit (Böcher) untersucht, teils in mehreren Richtungen erweitert (Lord Rayleigh). Im Jahre 1881 betrachtete Klein die Lamésche Gleichung in der Form

$$y'' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - e_1} + \frac{1}{x - e_2} + \frac{1}{x - e_3}\right)y' - \frac{Ax + B}{4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}y = 0,$$

wo $e_1 < e_2 < e_3$ ist. Er betrachtet zwei Segmente der $x$-Achse $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$, von denen jedes in einem, und zwar nicht beide in demselben, der Intervalle $e_1 e_2$, $e_2 e_3$, $e_3 \infty$ liegt, und stellt folgendes Theorem auf (*Math. Ann* **18**, 410 (1881); vgl. Böcher, *Bull. Amer Soc* (1898), 307):

*Man kann die reellen Parameter $A$ und $B$, und zwar nur*

*in einer Weise, so bestimmen, daß die gegebene Gleichung zwei Lösungen $y_1$ und $y_2$ besitzt, von denen $y_1$ in den Punkten $a_1$ und $b_1$ verschwindet und zwischen diesen Punkten eine beliebig vorgeschriebene Anzahl von Nullpunkten besitzt, während $y_2$ in den Punkten $a_2$ und $b_2$ verschwindet und zwischen diesen Punkten eine beliebig vorgeschriebene Anzahl von Nullpunkten besitzt.*

Ein allgemeineres Theorem ist später von Bôcher (*Bull. of Amer. Soc.* 1898, Mai u. Okt.) aufgestellt. Die Untersuchungen von Hilbert (*Gött. Nachr.* 1904—1906) über die Fredholmschen Integralgleichungen hat auf die Sturmschen Sätze und das Kleinsche Oszillationstheorem neues Licht geworfen und eine Erweiterung dieser Sätze gestattet (vgl. Hilb, *Math.-Ver.* **16**, 279 (1907); *Math. Ann.* **68**, 24 (1909); Weyl, *Math. Ann.* **68**, 220 (1910); Richardson, *Math. Ann.* **68**, 279 (1910)). Siehe auch Picard, *Rend. Palermo* **29**, 79 (1910). In betreff Literatur und weiterer Untersuchungen auf diesem Gebiet vgl. man den Artikel von Bôcher in *Enzykl.* **2**, 437.

## § 5. Systeme von simultanen Differentialgleichungen.

Es liege ein System von $n$ Differentialgleichungen vor, welches eine unabhängige Variable $x$, $n$ abhängige Variablen $y_1 \ldots y_n$ und ihre Ableitungen nach $x$ bis zu einer gewissen Ordnung enthält. Ein solches System wird ein *System simultaner Differentialgleichungen* genannt. Wenn Ableitungen höherer als der 1. Ordnung vorhanden sind, so setze man

$$\frac{dy_1}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} = u, \ldots$$

und vereinige diese neuen Gleichungen mit den gegebenen; auf diese Art wird das System auf ein System von Gleichungen 1. Ordnung reduziert.

Wir betrachten im folgenden ein System von Gleichungen 1. Ordnung, die nach den Ableitungen aufgelöst sind (vgl. Jordan, *Cours d'Analyse* **3**, § 3):

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1 \ldots y_n). \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Die Zahl $n$ heißt die *Ordnung des Systems* (1). Das klassische Verfahren zur Integration des Systems (1) besteht in der sukzessiven Erniedrigung der Ordnung des Systems. Zu diesem Zweck bestimmt man ein erstes Integral $\varphi(x, y_1 \ldots y_n) = a$ und eliminiert mit dessen Hilfe eine der Unbekannten z. B. $y_n$

aus dem System (1). Man erhält so ein System $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in $x, y_1 \ldots y_{n-1}$, das man ebenso weiter behandelt usw. Die Aufsuchung eines ersten Integrals $\varphi(x, y_1 \ldots y_n)$ kann mit Hilfe von *Multiplikatoren* geschehen; da $\varphi$ durch eine Identität der Form

$$d\varphi = \sum_1^n \mu_i(dy_i - f_i dx)$$

definiert ist, kann es durch eine Quadratur erhalten werden, sobald die $\mu_i$ so bestimmt sind, daß die rechte Seite der letzten Gleichung ein vollständiges Differential wird. Diese Multiplikatoren sind von Jacobi (*Werke* 4, 236) untersucht.

Ein *Jacobischer Multiplikator* $M$ des Systems (1) wird durch folgende Gleichung definiert:

$$\frac{dM}{dx} + M\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\right) = 0 .$$

Für $n = 1$ reduziert er sich auf den gewöhnlichen Eulerschen Integrationsfaktor.

*Ist $M$ ein Multiplikator des Systems (1) und $\varphi = c$ ein erstes Integral, so ist auch $M \cdot \varphi$ ein Multiplikator desselben. Stellen $\varphi_1 = c_1, \varphi_2 = c_2, \ldots \varphi_n = c_n$ ein allgemeines Integral dar, so sind alle Multiplikatoren des Systems in der Form enthalten: $M f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$.*

*Der Quotient zweier Multiplikatoren des Systems ist ein Integral des Systems.*

*Wenn man $n-1$ Integrale und einen Multiplikator kennt, bestimmt sich das letzte Integral durch eine Quadratur (Satz vom letzten Multiplikator).*

Ist $M$ ein Multiplikator des System (1) in den Veränderlichen $x, y_1 \ldots y_n$, und führt man in das System die neuen Veränderlichen $z, u_1 \ldots u_n$ ein, so hat das transformierte System den Multiplikator

$$N = M \frac{\partial(x, y_1 \ldots y_n)}{\partial(z, u_1 \ldots u_n)} = M : \frac{\partial(z, u_1 \ldots u_n)}{\partial(x, y_1 \ldots y_n)}$$

Jacobi hat seine Theorie auf *lineare* Systeme angewendet. Andere Anwendungen gibt Malmsten (*Journ. de Math.* (2) 7, 257 (1862)), Andrejowski (*C. R.* 68, 716 (1869)) und Winckler (*Wien. Ber.* 80, 948 (1879)).

Das System wird oft in der symmetrischen Form gegeben

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \cdots = \frac{dy_n}{Y_n} .$$

Sind hier speziell:

$$X = a_0 x + a_1 y_1 + \cdots a_n y_n + a_{n+1}$$
$$Y_i = a_{0i} x + a_{1i} y_1 + \cdots + a_{ni} y_n + a_{n+1,i}, \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

so liefert das System, wenn man jedes der $n+1$ Verhältnisse gleich $\frac{dt}{t}$ setzt, als Integrale $n+1$ Ausdrücke vom Typus

$$t = C_i(\lambda_{0i} x + \lambda_{1i} y_1 + \ldots + \lambda_{ni} y_n + \lambda_{n+1,i})^{\frac{1}{k_i}}$$

worin die Größen $k_i$ die $n+1$ Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_0 - k, & a_{01}, & a_{02}, \ldots, & a_{0n} \\ a_1, & a_{11} - k, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_n, & a_{1n}, \ldots & \ldots, & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

bezeichnen und die Werte von $\lambda_{ik}$ sich aus den Gleichungen ergeben:

$$\lambda_{0i} a_0 + \lambda_{1i} a_{01} + \cdots + \lambda_{n+1,i} a_{0n} = \lambda_{0i} k_i$$
$$\lambda_{0i} a_1 + \lambda_{1i} a_{11} + \cdots + \lambda_{n+1,i} a_{1n} = \lambda_{1i} k_i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{0i} a_{n+1} + \lambda_{1i} a_{n+1,1} + \cdots + \lambda_{n+1,i} a_{n+1,n} = \lambda_{n+1,i} k_i.$$

Eliminiert man $t$ aus den $n+1$ so erhaltenen Ausdrücken, so findet man $n$ Integrale mit $n$ Konstanten. Ein etwas allgemeineres System ist von Hesse (*J. f. Math.* **25**, 171 (1843)) integriert worden.

Bei der Integration eines Systems von der Form (1) kann man immer $n-1$ der unbekannten Funktionen samt ihren Ableitungen eliminieren und eine gewöhnliche Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung ableiten, die mit $n$ Konstanten zu integrieren sind (vgl. Jacobi, *J. f. Math.* **2**, 317 (1827)).

---

Ein simultanes System von Differentialgleichungen kann wie die einzelne Differentialgleichung singuläre Lösungen besitzen, die sich sowohl aus dem System selbst als aus ihrem allgemeinen Integral ableiten lassen; im allgemeinen besitzt es keine singuläre Lösung (vgl. Picard, *Traité d'Analyse* **3**, 52).

In betreff der ausgedehnten Literatur über Differentialgleichungen wie einer eingehenden Würdigung der Leistungen der verschiedenen Mathematiker auf diesem Gebiete sei auf die

Referate der *Enzykl.* **2**, 189 und 230 von Painlevé und Vessiot hingewiesen. Ebenso gibt das Werk von Hagen, *Synopsis der höheren Mathematik*, Bd. **3**, eine übersichtliche Darstellung der Theorie der Differentialgleichungen.

## § 6. Die Differenzengleichungen.

Eine Differenzengleichung ist eine Relation zwischen einer Funktion $y_x$, ihren sukzessiven Werten $y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots$ und der unabhängigen Variabeln $x$:

$$F(x, y_x, y_{x+1}, \ldots y_{x+n}) = 0.$$

Enthält die Gleichung sowohl $y_x$ als $y_{x+n}$, so ist die Gleichung von $n^{\text{ter}}$ Ordnung. Eine Funktion $y_x$, die der Gleichung genügt, heißt ein *Integral* oder eine *Lösung* der Gleichung. Eine *allgemeine Lösung* einer Gleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist eine solche, die von $n$ wesentlichen „Konstanten" (d. h. periodischen Funktionen von der Periode 1) abhängt. Eine *partikuläre* Lösung enthält weniger als $n$ „Konstanten".

Die einzige Klasse von Differenzengleichungen, die einigermaßen untersucht sind, sind die *linearen* Differenzengleichungen, die die Form haben:

$$y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + p_x^{(2)} y_{x+n-2} + \cdots + p_x^{(n)} y_x + p_x^{(n+1)} = 0,$$

wo die $p_x$ Funktionen von $x$ sind; ist $p_x^{(n+1)} = 0$, so heißt die Gleichung *homogen*. Ist $y_x$ eine partikuläre Lösung dieser Gleichung, und setzt man $y_x = y_x + z_x$, so ist $z_x$ eine Lösung der linearen homogenen Gleichung:

$$(1) \qquad Py_x = y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + p_x^{(n)} y_x = 0$$

Die Theorie der linearen homogenen Gleichung (1) bietet eine ausgedehnte Analogie zu der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen. Die meisten in § 4 aufgestellten formalen Sätze über lineare homogene Differentialgleichungen übertragen sich ohne weiteres auf die Gleichung (1). In betreff der Existenz der Lösungen einer linearen homogenen Differenzengleichung siehe Nörlund (*C. R.* 15 Nov. 1909) und Wallenberg (*Berl. Math Ges* 9, 1, 25 Nov. (1909))

Man hat die Formel

$$P(y_x z_x) = z_x Py_x + \Delta z_x P' y_x + \Delta^2 z_x P'' y_x + \cdots + \Delta^n z_x \; y_{x+n},$$

wo

$$P' y_x = n y_{x+n} + (n-1) p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + 2 p_x^{(n-2)} y_{x+2} + p_x^{(n-1)} y_{x+1},$$

$$P'' y_x = \frac{1}{1\cdot 2}[n(n-1) y_{x+n} + (n-1)(n-2) p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \cdots + 2\cdot 1 p_x^{(n-2)} y_{x+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P^{n-1} y_x = \frac{1}{(n-1)!}[n(n-1)\cdots 2\cdot 1 y_{x+n} + (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 p_x^{(1)} y_{x+n-1}].$$

Diese Formel ermöglicht die Ordnungserniedrigung von (1) um eine Einheit, sobald man eine partikuläre Lösung $y_x^{(1)}$ kennt; genügt $y_x^{(1)}$ zugleich den Gleichungen $Py_x = 0$, $P'y_x = 0, \ldots P^{(k-1)} y_x = 0$, d. h. sind $y_x^{(1)}, x y_x^{(1)}, \ldots x^{k-1} y_x^{(1)}$ gleichzeitig Lösungen von (1), so erniedrigt sich die Ordnung um $k$ Einheiten. Man kann so die Ordnung um $k$ Einheiten erniedrigen, wenn man $k$ partikuläre Lösungen kennt; aber man muß voraussetzen, daß diese Lösungen *linear unabhängig*, d. h. durch keine homogene lineare Relation mit „konstanten" Koeffizienten, verknüpft seien. Die Bedingung dafür ist, daß die Determinante

$$\Delta(y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots y_x^{(k)}) = \begin{vmatrix} y_x^{(1)} & \cdots & y_x^{(k)} \\ y_{x+1}^{(1)} & \cdots & y_{x+1}^{(k)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{x+k-1}^{(1)} & \cdots & y_{x+k-1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

nicht identisch Null ist, Casorati, *Rom. Att. L. Mem.* **5** (1880). (Vgl. S. 154.) Ein System von $n$ linear unabhängigen Lösungen nennt man ein *Fundamentalsystem*. Die allgemeine Lösung von (1) ist

$$y_x = c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + \ldots + c_n y_x^{(n)},$$

wenn $y_x^{(1)} \ldots y_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem bilden, und $c_1 \ldots c_n$ willkürliche „Konstanten" bedeuten. Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen eines Fundamentalsystems schließt nicht aus, daß zwischen denselben homogene Relationen höheren Grades bestehen.

Man kann die Ordnung der Gleichung $Py_x = 0$ auch jedesmal erniedrigen, wenn man eine andere lineare homogene Differenzengleichung $Qy_x = 0$ kennt, die mit ihr Lösungen gemein hat (Pincherle, *Mem. del. R. Ac. di Bologna* (5), **5**, 87 (1895))

Eine lineare homogene Differenzengleichung heißt nach Pincherle *irreduktibel*, wenn sie mit keiner linearen homogenen Differenzengleichung von niedrigerer Ordnung mit gleichartigen

Koeffizienten eine Lösung gemein hat; anderenfalls heißt sie *reduktibel*. Für den Begriff *vollständig* reduktibel vgl. Guldberg (*Arch. f. Math. og Natur.* **27**, 15 (1906)).

Eine lineare Gleichung $Py_x = 0$, die mit einer irreduktiblen Gleichung $Qy_x = 0$ mit gleichartigen Koffizienten eine Lösung gemein hat, wird durch jede Lösung von $Qy_x = 0$ erfüllt (vgl. Pincherle, *Le Operazioni Distributive e le loro Applicazioni all'Analisi*, Cap. X; Guldberg, *Monatsh. f. Math.* **16**, 214 (1905)).

Das *kleinste gemeinsame* Vielfache $Uy_x$ und der größte gemeinsame Teiler von zwei linearen homogenen Differenzenausdrücken $Py_x$ und $Qy_x$ wird ebenso wie die *Zerlegung* eines Ausdruckes $Py_x$ analog wie bei den linearen homogenen Differentialausdrücken definiert und bestimmt. Über die Vertauschbarkeit linearer homogener Differenzenausdrücke s. Wallenberg (*Arch. Math. Phys.* (3) **15**, 151 (1909)).

Die lineare Differenzengleichung $Pz_x = 0$ von $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist mit der linearen Differenzengleichung $Qy_x = 0$ von $m^{\text{ter}}$ Ordnung mit gleichartigen Koeffizienten von *derselben Art*, falls man von den Integralen von $Qy_x = 0$ zu denen von $Pz_x = 0$ durch die Beziehung

$$z_x = \alpha_0(x)y_x + \alpha_1(x)y_{x+1} + \cdots \alpha_{m-1}(x)y_{x+m-1}$$

mit gleichartigen Koeffizienten übergehen kann. Es bestehen analoge Sätze wie bei den linearen Differentialgleichungen (Guldberg, *Palermo Circ. mat* **19**, 167 (1905)); Wallenberg (*Arch. Math Phys* (3), **14**, 210 (1909)).

Die lineare Gleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung $Py_x = 0$, die ein gegebenes Fundamentalsystem von Lösungen $y_x^{(1)} \ldots y_x^{(n)}$ besitzt, läßt sich in Determinantenform darstellen, wobei die Koeffizienten $p_x^{(i)}$ durch die Lösungen ausgedrückt werden

$$Py_x = \Delta(y_x, y_x^{(1)}, \ldots y_x^{(n)}) = 0$$

mit der oben angegebenen Bedeutung von $\Delta$. Speziell hat man die Heymannsche Formel:

$$(-1)^n p_x^{(n)} = \frac{\Delta_{x+1}(y_x^{(1)} \ldots y_x^{(n)})}{\Delta_x(y_x^{(1)} \ldots y_x^{(n)})}$$

(Heymann, *J. f. Math* **109**, 114 (1892)).

Alle aus denselben $m$-Zeilen von $\Delta(y_x^{(1)} \ldots y_x^{(n)})$ entnommenen Minoren genügen einer und derselben linearen homogenen Differenzengleichung und bilden von ihr ein Fundamental-

system; die Gleichung, der $\Delta(y_x^{(1)} \ldots y_x^{(m)})$ genügt, heißt die $(n-m)^{te}$ *Assoziierte* von $Py_x = 0$ (Guldberg, *Arch. Math. Phys.* (3) **8**, 278 (1904)).

Die Minoren letzter Zeile von $Py_{x+1}$ dividiert durch $\Delta_{x+1}(y_x^{(1)} \cdots y_x^{(n)})$ sind Multiplikatoren von $Py_x$ und genügen der „adjungierten" Differenzengleichung $P'z_x = 0$; es besteht die Beziehung $z_x Py_x - y_x P'z_x = \Delta P(y_x, z_x)$; $P(y_x, z_x)$ heißt der begleitende bilineare Differenzenausdruck (Bartolotti, *Rom. Att. L. Rend.* (5) **5**, 349 (1896); Wallenberg, *Berl. Math. Ges.* **7**, 50 (1908); **8**, 22 (1908)).

Auch die Picard-Vessiotsche Theorie der linearen Differentialgleichungen hat ihr Analogon in der Theorie der linearen homogenen Differenzengleichungen.

Eine gegebene lineare homogene Differenzengleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Koeffizienten entspricht einer Untergruppe $G$ der allgemeinen homogenen linearen Gruppe in $n$ Veränderlichen

$$y_x^{(i)} = \sum_1^n c_{i\lambda} y_x^{(\lambda)} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

mit folgender Doppeleigenschaft:

1. Jede rationale Funktion $V$ von $y_x^{(1)} \ldots y_x^{(n)}$, ihren sukzessiven Werten und $x$, die eine rationale Funktion von $x$ ist, ändert bei allen Transformationen von $G$ ihren Wert nicht. 2. Jede rationale Funktion von $y_x^{(1)} \ldots y_x^{(n)}$ ihren sukzessiven Werten und $x$, die bei allen Transformationen von $G$ ihren Wert nicht ändert, ist eine rationale Funktion von $x$ (Guldberg, *Ann Éc Norm.* (3) **21**, 320 (1905); Epsteen, *Bull Am. Math Soc* (2), **10**, 499 (1904))

Die lineare Differenzengleichung 1 Ordnung:

$$y_{x+1} - P_x y_x = Q_x$$

hat die allgemeine Lösung

$$y_x = \Pi P_{x-1} \left\{ \sum \frac{Q_x}{\Pi P_x} + C \right\},$$

wo $C$ eine „Konstante" ist. Untersuchungen über die Natur der Lösungen der linearen Differenzengleichung 1 Ordnung sind angestellt von Guichard (*Ann. Éc. Norm.* (3), **4**, 361 (1887)); Appell (*Journ de Math.* (4), **7**, 157 (1891)); Mellin (*Acta Math* **15**, 317 (1891)); Hurwitz (*Acta Math.* **20**, 285 (1897)); **21**, 213 (1898)); Barnes (*Lond. Math. Soc.* (2), **2**, 280, 483 (1904)) und Böhmer (*Math Ann.* **68**, 338 (1910)). Speziell hat

Hölder (*Math. Ann.* **28**, 1 (1886)) bewiesen, daß die $\Gamma$-Funktion, die die lineare homogene Differenzengleichung $y_{x+1} - xy_x = 0$ befriedigt, deswegen keiner algebraischen Differentialgleichnng genügen kann; Moore (*Math. Ann.* **48**, 70 (1897)) nennt eine derartige Funktion transzendental-transzendent. Hölders Resultat ist verallgemeinert von Barnes (a. a. O.).

Die lineare homogene Differenzengleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten

$$y_{x+n} + a_0 y_{x+n-1} + \cdots + a_n y_x = 0$$

hat die allgemeine Lösung:

$$y_x = C_1 r_1^x + C_2 r_2^x + \cdots C_n r_n^x,$$

wo die $C$ „Konstanten" sind, und wo $r_1 \ldots r_n$ die *n verschiedenen* Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_0 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

sind.

Hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine $k$-fache Wurzel $r_0$, so entsprechen ihr $k$ Lösungen: $r_0^x, xr_0^x, \ldots x^{k-1} r_0^x$ der gegebenen Gleichung.

Lagrange (*Œuvres* **4**, 156) hat gezeigt, daß man, wenn man die allgemeine Lösung von $Py_x = 0$ kennt, analog wie bei den linearen Differentialgleichungen mittels *Variation der Konstanten* durch Summationen die allgemeine Lösung von $Py_x = p_x^{(n+1)}$ erhalten kann.

Die Laplacesche Differenzengleichung

$$(a_n x + b_n) y_{x+n} + (a_{n-1} x + b_{n-1}) y_{x+n-1} + \cdots + (a_0 x + b_0) y_x = 0,$$

wo die $a$ und $b$ Konstanten sind, wurde zuerst von Laplace (*Théorie anal. des probabilités*, p. 121) durch bestimmte Integrale integriert. Sie ist später öfters untersucht worden: Thomae (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.* **14**, 349 (1869)), Heymann (*Studien üb. d. Transf. u. Int. d. Differential- u. Differenzengl.*, S. 310 (1891)), Barnes (*Mess. of Math.* **34**, 52 (1904)), Webb (*Mess. of Math.* **34**, 40 (1904)). Die Methode von Laplace wurde von Poincaré (*Am. Journ.* **7**, 203 (1885)) beim Studium der Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung im Unendlichen angewandt. Seine Resultate sind von Perron (*J. f. Math.* **137**, 6 (1909), *Math.-Ver.* **19**, 130 (1910), *Acta Mat.* **34**, 109 (1910)) erweitert worden. Horn (*Math. Ann.* **53**, 177 (1900)) studiert die asymptotische Darstellung der Losungen.

Seine Resultate sind verallgemeinert von Ford (*Ann. di Mat.* (3) **13**, 313 (1907); *Am. Math. Soc.* **10**, 319 (1909)).

Die der Riccatischen Differentialgleichung entsprechende Differenzengleichung

$$(\alpha) \qquad y_x y_{x+1} + P_x y_{x+1} + Q_x y_x + R_x = 0$$

wird auf eine lineare Gleichung 2. Ordnung zurückgeführt, wenn man

$$y_x = \frac{z_{x+1}}{z_x} - P_x$$

setzt; man erhält die Gleichung

$$z_{x+2} + (Q_x - P_{x+1}) z_{x+1} + (R_x - P_x Q_x) z_x = 0.$$

Die allgemeine Lösung von $(\alpha)$ hat die Form:

$$y_x = \frac{y_x^{(3)}(y_x^{(1)} - y_x^{(2)})c + y_x^{(1)}(y_x^{(2)} - y_x^{(3)})}{(y_x^{(1)} - y_x^{(2)})c + y_x^{(2)} - y_x^{(3)}},$$

wo $c$ eine „Konstante" und $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$, $y_x^{(3)}$ irgend drei partikuläre Lösungen sind. Kennt man eine partikuläre Lösung derselben, so reduziert sich ihre Integration auf die Integration einer linearen Differenzengleichung 1. Ordnung. Das Doppelverhältnis von irgend vier partikulären Lösungen ist konstant, vgl. Guldberg (*J. f. Math.* **127**, 175 (1905))

Tietze (*Monatsh. f. Math.* **16**, 329 (1905)) hat gezeigt, daß eine analytische Funktion, die eine Differenzengleichung $y_x y_{x+1} - y_x + R_x = 0$, die keine rationale Lösung hat, und wo $R_x$ im Unendlichen verschwindet, befriedigt, transzendentaltranszendent ist

In betreff einschlägiger Untersuchungen siehe man den Artikel über Differenzenrechnung von Selivanoff-Andoyer in der französischen Ausgabe der *Enzykl.* t. I, **4**, 66, wo ein ausführliches Verzeichnis der Literatur sich befindet. Als die wichtigsten Lehrbücher über diese Lehre zitieren wir: Lacroix, *Traité des calcul diff. et intégral.* t. 3; Boole, *A treatise on the calculus of finite differences;* Markoff, *Differenzenrechnung,* Pascal, *Calcolo delle differenze finite;* Pincherle und Amaldi, *Le Operazioni distributive e le loro applicazioni all' Analisi;* Selivanoff, *Lehrbuch der Differenzenrechnung,* Guldberg und Wallenberg, *Theorie der linearen Differenzengleichungen* (in Vorbereitung)

# Kapitel XI.

## Partielle und totale Differentialgleichungen.

Von *A. Guldberg* in Christiania.

### § 1. Definitionen, Existenz der Lösungen.

Eine Gleichung, welche eine Beziehung aufstellt zwischen den unabhängigen Variablen $x_1 \ldots x_n$, den unbekannten Funktionen $z_1 \ldots z_p$ dieser Variablen und einer endlichen Anzahl von partiellen Differentialquotienten der letzteren in bezug auf die ersteren, heißt eine *partielle Differentialgleichung*; als ihre *Ordnung* bezeichnet man die Ordnung der höchsten darin auftretenden Ableitungen. Wenn beliebig viele solcher Gleichungen gegeben sind, so ist dies ein System partieller Differentialgleichungen. Gibt es $p$ analytische Funktionen $z_1 \ldots z_p$ der Variablen $x_1 \ldots x_n$, die sich an einer Stelle $a_1 \ldots a_n$ in gewöhnliche Potenzreihen entwickeln lassen und das gegebene System von Gleichungen identisch befriedigen, so bezeichnet man sie als ein *Integral* oder *Lösung* des Systems, und das System heißt ein *integrables System*. Das System integrieren heißt, alle seine Lösungen bestimmen.

Die Frage nach der Existenz von analytischen Lösungen für ein gegebenes System ist von Cauchy (*Œuvres* (1) 7, 17) in Spezialfällen, von Sophie v. Kowalewski (*J. f. Math.* **80**, 1 (1880)), der Beweis ist reproduziert in Goursat, *Équations aux dérivées part.*, p. 1), allgemeiner, sodann für ein System mit beliebig vielen Gleichungen von Riquier (*Ann. de l'École Norm.* (3) **11**, 65 (1893), *Les systèmes d'equations partielles* 1909) und Tresse (*Acta Math.* **18**, 1 (1894)) gelöst (vgl. v. Weber, *Enzykl.* **2**, 291).

Das Problem der Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter und höherer Ordnung unter vorgegebenen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen — die sogenannte *Randwertaufgabe* — ist vor allem von Fourier (*Th. anal. de la chaleur* 1822) in Angriff genommen. Die Grundlage einer systematischen Theorie der Randwertaufgabe verdankt man (1885) Schwarz

(*Ges. Abh.* **1**, 241). Bei der weiteren Ausbildung dieser Theorie sind in erster Linie Picard (*J. de Math.* (4) **6** (1890); (5) **2** (1896)) und Poincaré (*Th. anal. de la propagation de la Chaleur* (1895)) tätig gewesen (vgl. Sommerfeld, *Enzykl.* **2**, 504).

Ein Funktionensystem $z_1 \ldots z_p$, welches durch ein irgendwie von Parametern und arbiträren Funktionen abhängendes Gleichungssystem zwischen den Variablen $x_1 \ldots x_n$, $z_1 \ldots z_p$ definiert ist, heißt nach Ampère (*Journ. éc. polyt.* **10** Cah. 17, p. 549 (1815)) das *allgemeine Integral* des gegegebenen Systems, wenn es, solange die willkürlichen Elemente keinen Bedingungen unterliegen, nur dem gegebenen System genügt. Jede Lösung $z_1 \ldots z_p$, die durch Partikulisation aus dem allgemeinen Integral hervorgeht, heißt *ein partikuläres Integral.*

Die Begriffe *vollständiges, intermediäres, singuläres* Integral werden wir unten bei Besprechung der verschiedenen Klassen von Gleichungen erörtern.

## § 2. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

Beim Studium der partiellen Differentialgleichungen sucht man vorzugsweise ihre Integration auf die Integration eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückzuführen Für partielle Differentialgleichungen 1 Ordnung ist dies Problem vollständig gelöst. Wir betrachten zunächst die *linearen* partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, deren Theorie die einfachste ist Diese Theorie ist im wesentlichen von Lagrange geschaffen; sie ist vervollständigt von Cauchy und Jacobi

Wir betrachten zuerst eine *lineare homogene partielle Differentialgleichung 1. Ordnung*:

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{1}$$

zwischen der unbekannten Funktion $f$ und den $n$ unabhängigen Variablen $x_1 \ldots x_n$, die Großen $X$ sind Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ Die Integration der Gleichung (1) und die Integration des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} \tag{2}$$

sind zwei äquivalente Probleme (Lagrange, *Œuvres* **5**, 543; **4**, 585) *Sind die* $n-1$ *Integrale von* (2):

$$f_1(x_1 \ldots x_n) = \text{const} \ldots f_{n-1}(x_1 \ldots x_n) = \text{const},$$

*so ist das allgemeine Integral von* (1) *durch die Formel*

$$f = \Pi(f_1, f_2, \ldots f_{n-1})$$

*gegeben, wo* $\Pi$ *eine willkürliche Funktion ist.*

Eine willkürliche Relation zwischen den $f_1 \ldots f_{n-1}$ definiert das allgemeine Integral $x_n$ der *nicht homogenen linearen partiellen Differentialgleichung*

$$(1') \qquad X_1 \frac{\partial x_n}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x_n}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = X_n$$

mit der unbekannten Funktion $x_n$ und den unabhängigen Variablen $x_1 \ldots x_{n-1}$ (Lagrange, *Œuvres* **5**, 543; **4**, 585).

Die durch (2) definierten $n-1$fach unendlich vielen Kurven des Raumes $(x_1 \ldots x_n)$ heißen die Integralkurven des simultanen Systems (2) oder die *Charakteristiken* der partiellen Differentialgleichung (1) und (1'). Die allgemeinste Integralfläche von (1') wird also von $\infty^{n-2}$ Charakteristiken erzeugt.

Es seien gegeben $r$ lineare homogene Gleichungen

$$(3) \qquad X_i f = \xi_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{2i} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_{ni} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots r)$$

zwischen der unbekannten Funktion $f$ und den unabhängigen Variablen $x_1 \ldots x_n$; die $\xi$ sind Funktionen von $x_1 \ldots x_n$. Ein Integral von (3) genügt auch allen durch *Klammeroperation* daraus entstehenden linearen homogenen Gleichungen

$$(X_i X_k) = \sum_s (X_i \xi_{ks} - X_k \xi_{is}) \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0.$$

Sind die Ausdrücke $(X_i X_k)$ für jedes $f$ lineare Funktionen von $X_1 f \ldots X_r f$, so heißt das System (3) nach Clebsch (*J. f. Math.* **65**, 257 (1865)) ein *r-gliedriges vollständiges System*. Clebsch nennt das System (3) ferner ein *Jacobisches System*, wenn die $(X_i X_k)$ identisch verschwinden; auf diesen Fall kann ein vollständiges System immer zurückgeführt werden.

Die Integration eines Systems linearer homogener Gleichungen läßt sich immer auf diejenige eines vollständigen Systems zurückführen.

*Ein r-gliedriges vollständiges System* (3) *in n unabhängigen Veränderlichen besitzt genau* $n-r$ *unabhängige Integrale. Umgekehrt ist auch das System vollständig, wenn es gerade so viele unabhängige Integrale besitzt.*

Sind $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots f_n$ ein Lösungssystem, so ist das allgemeine Integral des Systems eine willkürliche Funktion von $f_{r+1}, \ldots f_n$.

Durch das vollständige System ist eine *Zerlegung* des Raumes $x_1 \ldots x_n$ in $\infty^{n-r}$ $r$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten

$$f_{r+1} = c_1, \ldots f_n = c_{n-r}$$

definiert, welche nach Lie die charakteristischen Mannigfaltigkeiten heißen.

Eine Integrationsmethode eines $r$-gliedrigen Jacobischen Systems in $n$ Veränderlichen besteht darin, daß man eine einzige Gleichung des Systems integriert und dann ihre Integrale als neue unabhängige Veränderliche in die übrigen Gleichungen einführt. Dadurch wird die Anzahl der Veränderlichen und die Gleichungen jedesmal um eine Einheit vermindert; das neue System ist wieder ein Jacobisches System, und ihre gemeinsamen Lösungen sind Lösungen des gegebenen Systems; $r-1$-malige Wiederholung dieses Verfahrens führt zur Integration *einer* Gleichung mit $n-r+1$ unabhängigen Variablen, die die gesuchten Lösungen ergeben.

Andere Methoden sind von Lie (*Math. Ann.* **11**, 507 (1877)) und Mayer (*Math. Ann.* **5**, 448 (1872)) angegeben (vgl. Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées part*, p. 46)

Wir wenden uns jetzt zur Theorie der *nicht linearen* partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung

Im Jahre 1772 gelang es Lagrange (*Œuvres* **3**, 549, vgl. Goursat, *Leçons*, p 89), die Integration einer allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1 Ordnung mit zwei unabhängigen $x$, $y$ und einer abhängigen $z$:

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

auf die Integration einer *linearen* partiellen Differentialgleichung 1 Ordnung und, durch deren Vermittlung, auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen

Die Integration einer allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1 Ordnung mit $n$ unabhängigen Variablen $x_1 \ldots x_n$ und einer abhängigen $z$.

$$(1) \qquad F(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n) = 0 \quad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$

wurde von Pfaff (*Berl Abhdlgn.*, S 76 (1814—15)) auf die

Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt. Andere Integrationsmethoden sind von Cauchy (*Bull. Soc. Phil.* p. 10 (1819)) und Jacobi (*Werke* 4, 166 u. 5, 1) angegeben.

Man versteht unter einem *vollständigen Integral* oder *einer vollständigen Lösung* der Gleichung (4) eine Relation zwischen $z, x_1 \ldots x_n$ und $n$ willkürlichen Konstanten $c_1 \ldots c_n$

$$V(z, x_1 \ldots x_n, c_1 \ldots c_n) = 0$$

von der Beschaffenheit, daß die Elimination der $c_1 \ldots c_n$ aus $V = 0$ und aus den $n$ Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

nur die Gleichung (4) liefert.

Wählt man $z, c_1 \ldots c_n$ so, daß gleichzeitig

$$V = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = 0, \ldots \frac{\partial V}{\partial c_n} = 0$$

und eliminiert $c_1 \ldots c_n$ zwischen diesen $n + 1$ Gleichungen, so erhält man ein Integral $z$, das keine willkürliche Funktion enthält, und nach Lagrange das *singuläre* Integral genannt wird.

Setzt man dagegen eine der Konstanten z. B. $c_n$ einer willkürlichen Funktion $\Phi$ aller übrigen gleich und eliminiert die Konstanten aus dem vollständigen Integral $V = 0$, $c_n = \Phi$ und den $n - 1$ Beziehungen

$$\frac{\partial V}{\partial c_i} + \frac{\partial V}{\partial c_n} \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0, \qquad (i = 1, 2 \ldots n - 1)$$

so erhält man eine Lösung, in welcher eine willkürliche Funktion vorkommt, nach Lagrange die *allgemeine Lösung* oder das *allgemeine* Integral. Hat man $k$ Relationen zwischen den Konstanten, so erhält man in analoger Weise eine *allgemeine* Lösung, die $k$ willkürliche Funktionen enthält.

Ist speziell

$$V(x, y, z, a, b) = 0$$

das vollständige Integral der Gleichung $f(x, y, z, p, q) = 0$, so ist die allgemeinste Integralfläche $W$ die Enveloppe von irgend $\infty^1$ durch eine Relation $b = \Phi(a)$ aus obiger Schar ausgeschiedenen Flächen, von denen jede die benachbarte nach einer *Charakteristik* schneidet (Monge, *Applications de l'analyse à la géométrie* 5^me éd. p. 121 (1850); vgl. Lie, *Geometrie der*

*Berührungstransformationen*, bearbeitet von Scheffers, Kap. 11), die Fläche wird also von $\infty^1$ Charakteristiken erzeugt. Die singuläre Integralfläche, die sich ergibt durch Elimination von $a$ und $b$ zwischen:

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

ist nicht von Charakteristiken erzeugt.

Kennt man ein vollständiges Integral, so lassen sich alle übrigen Integrale aus ihm ableiten.

Jede Lösung ist stets in einer dieser drei Gattungen von Integralen enthalten.

Eine beliebig vorgegebene partielle Gleichung 1. Ordnung hat im allgemeinen kein singuläres Integral (Darboux, *Mém. sur les sol. sing. des éq. aux dér. part.*, p. 113 (1883); vgl. Goursat, *Leçons*, p. 204).

Es ist übrigens zu bemerken, daß kein wesentlicher Unterschied zwischen dem vollständigen Integral und dem allgemeinen Integral besteht (Goursat, *Leçons*, p 87).

Um die Gleichung (4) zu integrieren, ermittelt man nach Jacobi (*Werke* 5, 1) weitere $n-1$ ähnliche Beziehungen mit $n-1$ Konstanten

$$F_i(z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = a_i, \qquad (i = 1, 2 \ldots n-1)$$

welche von der Beschaffenheit sind, daß die aus den $n$ Gleichungen sich ergebenden Größen $p_1 \ldots p_n$, in den Ausdruck

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n$$

eingesetzt, diesen in ein exaktes Differential verwandeln. Die Integration dieser letzten Gleichung ergibt sodann ein vollständiges Integral von (4). Die Bestimmung der Funktionen $F_1 \ldots F_{n-1}$ hängt von der Integration von linearen partiellen Differentialgleichungen ab. Setzt man

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial F_m}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z},$$

so ergibt sich $F_1$ aus der partiellen Differentialgleichung

$$[FF_1] = \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \frac{\partial F_1}{\partial p_i} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) \frac{\partial F}{\partial p_i} \right\} = 0$$

und alsdann $F_2$ aus den beiden Gleichungen: $[FF_2] = 0$,

$[F_1 F_2] = 0$; $F_3$ aus den drei Gleichungen: $[F F_3] = 0$, $[F_1 F_3] = 0$, $[F_2 F_3] = 0$ usw.

Die für die einzelne nicht lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung gefundenen Integrationsmethoden übertragen sich im wesentlichen auf die Theorie der *Systeme* solcher Gleichungen (vgl. Goursat, *Leçons*, Kap. 7 und 8).

## § 3. Partielle Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung.

Wir wenden uns jetzt zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung als der ersten.

Als *intermediäres Integral* (oder *Zwischenintegral*) einer Differentialgleichung $F = 0$ bezeichnet man eine Differentialgleichung $f = 0$ mit denselben Unbekannten und unabhängigen Variablen dann, wenn das allgemeine Integral von $f = 0$ die Gleichung $F = 0$ erfüllt, ohne mit dessen allgemeinem Integral identisch zu sein.

Durch rein algebraische Operationen wird man immer entscheiden können, ob eine vorgelegte Gleichung 2. Ordnung intermediäre Integrale hat oder nicht. Finden sich $\infty^2$ solche, so werden dieselben durch eine homogene partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in drei Variablen bestimmt; wenn es nur $\infty^1$ gibt, werden sie durch eine gewöhnliche Differentialgleichung in zwei Variablen hergeleitet; wenn schließlich intermediäre Integrale nur in endlicher Zahl existieren, so gehen dieselben durch rein algebraische Operationen hervor (Bäcklund, *Math. Ann.* **11**, 229 (1877)).

Hat eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen $x$, $y$ und einer abhängigen Variable $z$ ein intermediäres Integral 1. Ordnung von der Form

$$u = [\varphi(v)],$$

wo $\varphi$ eine willkürliche Funktion, $u$ und $v$ Funktionen von $x$, $y$, $z$, $p$ und $q$ sind, so muß sie die Monge-Ampèresche Form (vgl. Goursat, *Leçons sur l'intégration des éq. aux dér. part. du 2^e ordre*, p. 39 (1896)) haben:

$$(5) \qquad Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$$

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y},\quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

wo $R$, $S$, $T$, $U$, $V$ Funktionen von $x$, $y$, $z$, $p$ und $q$ sind.

Es ist zu bemerken, daß nicht jede Gleichung von der Form (5) ein intermediäres Integral von der Form $u = \varphi(v)$ besitzt.

Ist $u = \varphi(v)$ ein intermediäres Integral der Gleichung (5), so genügen $u$ und $v$ zwei partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung von der Form (Boole, *Treatise on Differential equations*, Suppl. Vol., p. 145):

$$R\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + S\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right) + T\left(\frac{df}{dy}\right)^2 + V\left\{\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{df}{dy}\right)\right\} = 0$$

$$R\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial f}{\partial q} + T\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial f}{\partial p} + U\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right) + V\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

wo

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{und} \quad \left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}$$

gesetzt ist.

Diese zwei Gleichungen für $u$ und $v$ lassen sich ferner in zwei Systeme von je zwei linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung auflösen; diese Systeme definieren die *Charakteristiken 1. Ordnung* von (5).

Die zwei Systeme lauten:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} R\left(\frac{df}{dx}\right) + m_1\left(\frac{df}{dy}\right) + V\frac{\partial f}{\partial p} &= 0 \\ m_2\left(\frac{df}{dx}\right) + T\left(\frac{df}{dy}\right) + V\frac{\partial f}{\partial q} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} R\left(\frac{df}{dx}\right) + m_2\left(\frac{df}{dy}\right) + V\frac{\partial f}{\partial p} &= 0 \\ m_1\left(\frac{df}{dx}\right) + T\left(\frac{df}{dy}\right) + V\frac{\partial f}{\partial q} &= 0, \end{aligned}$$

wo $m_1$ und $m_2$ die Wurzel der Gleichung:

$$m^2 - Sm + RT - UV = 0$$

sind.

*Wenn eines dieser beiden Systeme der „Charakteristiken" zwei Integrale $u$ und $v$ besitzt, so ist die Integration von (5) auf die Integration der Gleichung $u = \varphi(v)$ zurückgeführt.*

*Wenn $m_1 = m_2$, so kann das System der Charakteristiken drei Integrale $u = a$, $v = b$, $w = c$ besitzen. Eliminiert man $p$ und $q$ zwischen diesen drei Gleichungen, so erhält man die Glei-*

*chungen einer Flächenschar, die von drei Parametern abhängt. Das allgemeine Integral von (5) ergibt sich dann, wenn man zwei willkürliche Relationen zwischen a, b und c aufstellt und die Enveloppe der so erhaltenen Flächen bestimmt.*

Soll eine partielle Differentialgleichung 3. Ordnung ein intermediäres Integral 2. Ordnung von der Form haben:

$$u = \varphi(v)$$

($u$, $v$ = Funktionen von $x, y, z, p, q, r, s, t$), so muß sie die folgende Form besitzen:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E(\beta^2 - \alpha\gamma) + F(\gamma^2 - \beta\delta) + G(\alpha\delta - \beta\gamma) + H = 0,$$

wo

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

und $A, B \ldots H$ Funktionen von $x, y, z, p, q, r, s, t$ sind. Nicht jede Gleichung dieser Form besitzt ein intermediäres Integral der Form $u = \varphi(v)$. Existiert ein solches, so hängt seine Bestimmung von vier partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung ab (Forsyth, *Theory of diff. equat.* Part. 4, Vol. VI, p. 456 (1906)).

In betreff dieser Untersuchungen partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung siehe Backlund, *Math. Ann.* **11**, 236; **13**, 99 (1875—77); Tanner, *Proc. London Math. Soc.* **8**, 229 (1877); Natani, *Die höhere Analysis*, S. 380, Falk, *Nova Acta Regia Ups.* (1872); Hamburger, *J. f. Math.* **83**, 201 (1882); Guldberg, *Chr. Vid. Skrif.* (1900); Clariana, *Revista de Mat. Ano* **3**, 67 (1901).

Auf ganz anderen Prinzipien beruhende Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung sind von Darboux (*Ann. de l'École Norm.* **7**, 163 (1870)); König (*Math. Ann.* **24**, 165 (1884)) und Lie (*Leipz. Ber.*, S. 53 (1895)) auseinandergesetzt.

Hat man eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

so kann man, analog wie bei partiellen Gleichungen 1. Ordnung, versuchen, zwei andere partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung $u = a$, $v = b$ derart zu wählen, daß $r, s, t$ aus denselben und $F = 0$ bestimmt, in den Gleichungen

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

eingesetzt, diese Gleichungen in ein vollständig integrierbares System totaler Differentialgleichungen verwandeln. Gelingt es, die Funktionen $u$, $v$ derart zu bestimmen, so ist die Aufgabe gelöst, denn jedes $z$, welches diesem System allgemein genügt, befriedigt auch die Gleichung $F = 0$. Man erhält zwei simultane partielle Gleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung von $u$ und $v$; sie sind im Detail diskutiert bei König.

Über Systeme von partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung gibt es Arbeiten von Bäcklund, *Math. Ann.* **15** (1879), Darboux, *C R.* **70**, 675, 746 (1870), Lie, *Leipz. Ber.* **47** (1895) und v. Weber, *Münch. Ber.* **25**, **26** (1895, 1896), vgl. Goursat, *Leçons* **2** (1898).

Die besonderen Fälle von Gleichungen höherer Ordnung, welche eine eingehende Behandlung gefunden haben, sind sehr zahlreich. Wir führen hier einige der einfachsten an.

Die Gleichung

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} = 0$$

hat das Integral

$$Z = Y_0 + Y_1 x + \cdots + Y_{m-1} x^{m-1} + X_0 + X_1 y + \cdots + X_{n-1} y^{n-1},$$

wo die $Y$ und $X$ willkürliche Funktionen bzw. von $y$ und $x$ sind; speziell hat die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

das Integral

$$z = X + Y$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = M,$$

wo $a$, $b$, $c$ und $M$ Funktionen von $x$ und $y$ sind, hat, wenn die Koeffizienten $a$, $b$, $c$ wenigstens eine der Gleichungen:

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = 0 \qquad (\beta)$$

erfüllen, ein intermediäres Integral, das von einer willkürlichen Funktion abhängt.

Besteht die Gleichung ($\alpha$) identisch, so ist das allgemeine Integral der Gleichung:

$$Z = e^{-\int a\,dy}\left[X + \int\left\{Y + \int M e^{\int b\,dx}\,dx\right\} e^{\int a\,dy - b\,dx}\,dy\right],$$

wo $X$ und $Y$ willkürliche Funktionen von $x$ und $y$ sind.

Besteht die Gleichung ($\beta$) identisch, so hat das allgemeine Integral der Form

$$Z = e^{-\int b\,dx}\left[Y + \int\left\{X + \int M e^{\int a\,dy}\,dy\right\} e^{\int b\,dx - a\,dy}\,dx\right].$$

Wenn keine der beiden Gleichungen ($\alpha$) und ($\beta$) erfüllt ist, so besitzt die Gleichung kein intermediäres Integral. Laplace (*Rech. sur le calcul intégral aux diff. part.* (1773)) hat dann eine Transformationsmethode gefunden, wobei die Gleichung in gewissen Fällen in eine andere derselben Form transformiert werden kann, die ein intermediäres Integral hat (vgl. Goursat, *Leçons* **2** (1898) und Darboux, *Leçons sur la th. générale des surfaces*, **2**).

Die Liouvillesche Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = e^{2\lambda z}$$

hat das allgemeine Integral

$$Z = \frac{1}{2\lambda}\log\frac{f'(y)\,\varphi'(x)}{\lambda\,[f(y) + \varphi(x)]^2},$$

worin $f$ und $\varphi$ willkürliche Funktionen von $y$ bzw. $x$ sind (vgl. Jordan, *Cours d'Analyse* **3**, 358).

Die von Euler betrachtete Gleichung (vgl. Jordan, *Cours d'Analyse* **3**, 353)

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad (a,\ b,\ c\ \text{const})$$

hat das allgemeine Integral

$$z = f(x + \lambda_1 y) + \varphi(x + \lambda_2 y),$$

wenn $f$ und $\varphi$ willkürliche Funktionen, $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Wurzeln von

$$c\lambda^2 + 2b\lambda + a = 0$$

sind.

Ist $\lambda_1 = \lambda_2$, so wird das allgemeine Integral

$$z = f(x + \lambda y) + \varphi(x + \lambda y)(\gamma x + \delta y),$$

wo $\gamma$ und $\delta$ willkürliche Konstanten sind.

Eine Reihe geometrischer Probleme führt auf partielle Diffe-

rentialgleichungen. Wir führen einige an. Die *Spiralflächen* sind Integralflächen der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$(y + kx)\frac{\partial f}{\partial x} + (-x + ky)\frac{\partial f}{\partial y} + kz\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

ihre endliche Gleichung lautet:

$$\log z = k \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \Phi\left(\log \sqrt{x^2 + y^2} + k \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$

wo $k$ eine Konstante und $\Phi$ eine willkürliche Funktion ist.

*Die Haupttangentenkurven, Krümmungslinien und Minimallinien einer Spiralfläche lassen sich durch Quadraturen bestimmen* (vgl. Lie-Scheffers, *Vorles. über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, S. 260).

Das Problem, *alle Flächen zu finden, die hinsichtlich des Linienkomplexes aller Treffgeraden einer unendlich fernen ebenen Kurve konjugiert sind,* führt zu einer gewissen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung von der Form:

$$R(pq)r + S(pq)s + T(pq)t = 0.$$

Zunächst gehören zu den Integralflächen alle *Developpablen, deren Geraden nach der gegebenen unendlich fernen Kurve laufen.* Sie erfüllen eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, die demnach eine intermediäre Integralgleichung der partiellen Differentialgleichung ist. Alle übrigen Integralflächen sind *Translationsflächen,* deren erzeugende Kurven Rückkehrkurven von Developpablen sind, welche die gegebene unendlich ferne Kurve enthalten. Diese Translationsflächen sind dann und nur dann algebraisch, wenn ihre erzeugenden Kurven algebraisch sind (vgl. Lie-Scheffers, *Geom. d. Berührungstransformationen*, S. 383).

Die Differentialgleichung der *Minimalflächen* (d. h. der Flächen, die bei gegebener Begrenzung den kleinsten Flächeninhalt besitzen) lautet:

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet nach Monge, *Applications de l'Analyse à la Géométrie* § 20, 1850 und Legendre, *Mém. sav. étr.*, 309 (1789):

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \frac{d\psi(\beta)}{d\beta}; \quad y = \varphi(\alpha) - \alpha\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \psi(\beta) - \beta\frac{d\psi(\beta)}{d\beta},$$

$$\int \sqrt{-1 - \alpha^2}\,\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\,d\alpha + \int \sqrt{-1 - \beta^2}\,\frac{d^2\psi(\beta)}{d\beta^2}\,d\beta.$$

Hier bedeutet $\alpha$ und $\beta$ zwei Parameter, $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\beta)$ willkürliche Funktionen (vgl. v. Lilienthal, *Enzykl.* $III_3$, 308, für den Zusammenhang mit dem eben erwähnten Problem siehe Lie, a. a. O., 376).

*Die Flächen, die zu einem tetraedralen Komplexe konjugiert sind,* sind die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung von der Form:

$$(b-c)xqr-[(b-c)xp+(c-a)yq+(a-b)z]s+(c-a)ypt=0.$$

Zunächst gehören zu den Integralflächen alle Flächen, *deren eine Schar Haupttangentenkurven dem Komplexe angehören.* Diese Flächen, die man sämtlich angeben kann, sind die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung, die daher eine intermediäre, und zwar singuläre Integralgleichung der partiellen Differentialgleichung 2 Ordnung ist. Alle übrigen Integralflächen der partiellen Differentialgleichung erhält man so: Man wählt zwei beliebige, einander in einem Punkte $p$ schneidende Kurven $c$ und $\gamma$ des Komplexes aus und übt auf die eine Kurve, etwa auf $\gamma$, alle projektiven Transformationen aus, die erstens die Ecken des Tetraeders invariant lassen und zweitens den Punkt $p$ von $\gamma$ in beliebige Punkte von $c$ überführen. Die Art der so aus $\gamma$ hervorgehenden Kurven ist eine Fläche von der gesuchten Art. Sie läßt zwei Erzeugungen von dieser Art zu (vgl. Lie, a a O, 390).

Die Differentialgleichung der *Flächen mit konstantem Krümmungsmaß* $k$ lautet:

$$rt-s^2=k(1+p^2+q^2);$$

ist $k=0$, erhält man die Differentialgleichung der *abwickelbaren Flächen* (vgl. v Lilienthal, *Enzykl.* $III_3$, 333 ff).

## § 4 Totale Differentialgleichungen. Das Pfaffsche Problem. Mongesche Gleichungen.

Eine Gleichung von der Form

$$X_1dx_1+X_2dx_2+\cdots+X_ndx_n=0,$$

wo die $X$ Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ sind, heißt eine *lineare totale Differentialgleichung 1. Ordnung* Man nennt sie auch eine *Pfaffsche Gleichung.* Die Gleichung heißt *vollständig* oder *unbeschrankt integrabel*, wenn eine Funktion $M$ von $x_1 \ldots x_n$ von der Beschaffenheit existiert, daß $M(X_1dx_1+\cdots+X_ndx_n)$ gleich dem vollständigen Differential einer Funktion $V(x_1 \ldots x_n)$ ist.

Die Funktion $M$ heißt ein *Multiplikator* oder *integrierender Faktor*. Die Koeffizienten $X$ müssen folgende Gleichungen für alle Kombinationen je dreier Indices $m, p, r$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ identisch befriedigen:

$$\left(\frac{\partial X_m}{\partial x_p} - \frac{\partial X_p}{\partial x_m}\right) X_r + \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_r} - \frac{\partial X_r}{\partial x_p}\right) X_m + \left(\frac{\partial X_r}{\partial x_m} - \frac{\partial X_m}{\partial x_r}\right) X_p = 0.$$

Unter diesen Bedingungen sind nur $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ voneinander unabhängig. Ist der gegebene Ausdruck $\sum' X_i dx_i$ direkt gleich dem totalen Differential einer Funktion $V(x_1 \ldots x_n)$, so genügen die $X$ den $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r}.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so verfährt man nach Euler (*Inst. calc. integr.* 3, § 7—10), um die gesuchte Funktion zu ermitteln, von welcher der gegebene Ausdruck das totale Differential ist, auf die folgende Weise. Man betrachtet alle Veränderlichen bis auf zwei als Konstante und sucht für die so reduzierte Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 = 0$$

ein Integral $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u$, worin $u$ die Integrationskonstante bedeutet, also unabhängig von $x_1$ und $x_2$, im übrigen aber als veränderlich betrachtet werden soll. Dieses Integral liefert:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = du.$$

Sind nun die Integrationsbedingungen erfüllt, so kann man mit Hilfe dieser Differentialgleichung und der gegebenen $\sum' X_i dx_i = 0$ die veränderlichen $x_1$ und $x_2$ und ihre Differentiale aus dem Integral $f = u$ eliminieren, wodurch man eine neue Differentialgleichung mit nur $n-1$ Variablen erhält. Diese Verminderung der Variablen kann man wiederholen, bis man auf eine Gleichung kommt, die nur zwei Variable enthält. Andere Methoden zur Auffindung der Funktion $V$ sind von Natani (*Hdb. Anal.*, 303 (1866)), Du Bois-Reymond (*J. f. Math.* 70, 299 (1869)), Collet (*Éc. Norm.* 7, 59 (1870)) und anderen angegeben (vgl. Forsyth, *Theory of Differential equations,* part 1).

Ist ein System von $m$ totalen linearen Differentialgleichungen

1. Ordnung zwischen $n$ Variablen gegeben, welches man immer unter der Form

$$(1)\quad \begin{cases} dx_{n-m+1} - \sum_{i=1}^{i=n-m} X_{n-m+1,i}\,dx_i = 0 \\ dx_{n-m+2} - \sum_{i=1}^{i=n-m} X_{n-m+2,i}\,dx_i = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_n - \sum_{i=1}^{i=n-m} X_{n,i}\,dx_i = 0 \end{cases}$$

darstellen kann, so heißt das System *vollständig* oder *unbeschränkt integrabel*, wenn $m$ Integralgleichungen

$$f_1(x_1 \ldots x_n) = c_1, \ldots f_m(x_1 \ldots x_n) = c_m$$

existieren, die das gegebene System erfüllen Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß das System (1) unbeschränkt integrabel ist, sind

$$(\alpha)\qquad F_i(X_{k,j}) - F_j(X_{k,i}) = 0\,, \qquad \begin{pmatrix} k = n-m+1, \ldots n \\ i, j = 1, 2 \ldots n-m \end{pmatrix}$$

worin

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=n-m+1}^{\lambda=n} X_{\lambda,i}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$$

ist.

Die Bedingungen ($\alpha$) sagen aber aus, daß das System linearer partieller Differentialgleichungen 1 Ordnung

$$(2)\qquad F_i(\varphi) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n-m)$$

ein $n-m$ gliedriges Jacobisches System in $n$ Variablen ist, d h daß es gerade $m$ Losungen besitzt Es gilt dann der Satz:

*Die Integration des Systems (1) reduziert sich auf die Integration des Jacobischen Systems (2). Umgekehrt, hat man das System (2) integriert, so hat man auch unmittelbar das allgemeine Integral von dem System (1) gefunden.*

Die Integration der Systeme (1) und (2) sind also äquivalente Probleme (vgl Kap XII)

Ist eine totale Differentialgleichung

$$(3)\qquad \Delta = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_m\,dx_m = 0$$

*nicht* unbeschränkt integrabel, kann sie also nicht durch eine Relation von der Form $V(x_1 \ldots x_n) =$ const. erfüllt werden, so wurde sie von Euler als unzulässig betrachtet. Im Jahre 1784

zeigte aber Monge (*Par. Mém.*, p. 502), daß die Gleichung dann stets durch $m - 1$ bez. weniger Gleichungen in den $x$ befriedigt werden kann. Doch erst Pfaff legte in seiner Abhandlung in den *Berl. Abh.* aus dem Jahre 1814 den Grund zu der Theorie der Gleichung (3), indem er zeigte, daß, wenn $m = 2n$ oder $2n - 1$ ist, $\Delta$ auf eine Form $F_1' df_1 + F_2' df_2 + \ldots + F_n' df_n$ mit nur $n$ Differentialen gebracht werden kann, daß die Gleichung (3) daher schon durch $n$ Gleichungen befriedigt werden kann. Die Gleichung (3) wird daher eine Pfaffsche Gleichung, ihre rechte Seite ein *Pfaffscher Ausdruck* genannt. Das *Pfaffsche Problem* besteht nun darin, die Gleichung (3) durch die *kleinstmögliche* Zahl von Relationen zwischen den $x$ zu integrieren, oder auch $\Delta$ auf eine Form mit der kleinstmöglichen Zahl von Differentialen zu bringen (siehe E. v. Weber, *Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung*; vgl Kap. XII).

Wir betrachteten bisher *lineare* totale Gleichungen 1. Ordnung. Man kann aber auch totale Gleichungen 1. Ordnung betrachten, die *nicht linear* sind. Monge ist der erste Mathematiker, der sich eingehend mit Gleichungen von der Form

$$\Omega(x, y, z; dx, dy, dz) = 0 \tag{6}$$

beschäftigte, die in $dx, dy, dz$ homogen sind. Man bezeichnet deshalb derartige Gleichungen als *Mongesche* Gleichungen

Mit jeder Mongeschen Gleichung ist eine Reihe von Integrationsproblemen verknüpft So liegt das Problem vor, alle *Integralkurven* einer Mongeschen Gleichung zu finden, d h. alle Kurven zu bestimmen, deren Linienelemente die Mongesche Gleichung erfüllen. Man versteht dabei unter *Linienelement* im Raume den Inbegriff eines Punktes und einer durch ihn gehenden *Geraden* Die Bestimmungsstücke eines Linienelementes sind die Koordinaten $x, y, z$ seines Punktes und die beiden Verhältnisse der Inkremente $dx, dy, dz$, welche die Koordinaten $x, y, z$ beim Fortschreiten auf der Geraden des Elementes erfahren Es gibt $\infty^5$ Linienelemente im Raume Durch die Mongesche Gleichung

$$\Omega(x, y, z; dx, dy, dz) = 0$$

werden $\infty^4$ Linienelemente ausgewählt Durch den Punkt $(x, y, z)$ gehen $\infty^1$ dieser Elemente Diese durch einen Punkt gehenden $\infty^1$ Linienelemente bilden daselbst einen Kegel von Fortschreitungsrichtungen, den man den *Elementarkegel* des Punktes nennt *Die Mongesche Gleichung ordnet also jedem Punkte des Raumes einen Elementarkegel zu.*

*Zu jedem Linienkomplex im Raume* $(x, y, z)$ *gehört eine ganz bestimmte* M o n g e*sche Gleichung von der besonderen Form*

$$\Phi(y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,\ x\,dy - y\,dx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0,$$

*die homogen in den sechs Argumenten der Funktion* $\Phi$ *ist. Die Geraden des Komplexes sind die* $\infty^3$ *geradlinigen Integralkurven dieser* M o n g e*schen Gleichung. Die durch einen beliebigen Punkt allgemeiner Lage gehenden* $\infty^1$ *Komplexgeraden erzeugen den Elementarkegel, der dem Punkte vermöge der* M o n g e*schen Gleichung zugeordnet ist. Umgekehrt definiert jede solche Gleichung* $\Phi = 0$ *einen Linienkomplex.*

Es erhellt hieraus, daß die *Plücker*sche Liniengeometrie der M o n g e schen Gleichung untergeordnet ist.

Unter einem *Flächenelement* im Raume versteht man den Inbegriff eines Punktes und einer durch den Punkt gehenden Ebene. Es gibt $\infty^5$ Flächenelemente. Eine Fläche besitzt $\infty^2$ Flächenelemente. Jeder Elementarkegel bestimmt $\infty^1$ Flächenelemente. Eine nicht lineare M o n g e sche Gleichung bestimmt $\infty^4$ Flächenelemente, und zwar so, daß sie jedem Punkte $\infty^1$ Flächenelemente zuordnet, die den Elementarkegel des Punktes umhüllen.

Es ist nun ein wichtiges Integrationsproblem, bei gegebener M o n g e scher Gleichung $\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$ *alle Flächen zu bestimmen, die in allen ihren Punkten die den Punkten zugeordneten Elementarkegel berühren.* Man kann dieses Integrationsproblem auch so formulieren: Es liegt eine M o n g e sche Gleichung $\Omega = 0$ vor, die $\infty^4$ Flächenelemente im Raume definiert. Gesucht werden alle Flächen, deren sämtliche Flächenelemente zu diesen $\infty^4$ Flächenelementen gehören.

*Alle Flächen*

$$z = \omega(x, y),$$

*die in jedem ihrer Punkte den Elementarkegel berühren, der dem Punkte durch eine vorgelegte, in* $dx, dy, dz$ *nicht lineare* M o n g e*sche Gleichung*

$$\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$$

*zugeordnet wird, ergeben sich durch Integration einer gewissen zugehörigen partiellen Differentialgleichung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

*Diese Differentialgleichung geht hervor durch Elimination der drei homogen auftretenden Größen* $x', y', z'$ *aus den drei Gleichungen*

$$\Omega(x, y, z; x', y', z') = 0$$

$$\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x'}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y'}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial z'}}{-1}.$$

Jede Integralfläche der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ wird von $\infty^1$ Kurven überdeckt, derart, daß in jedem Punkte der Fläche der zugehörige Elementarkegel längs der betreffenden Kurve berührt. Man nennt nach Monge diese Kurven auf den Integralflächen *Charakteristiken* (vgl. § 1).

*Liegt eine Mongesche Gleichung*

$$\Omega(x, y, z; dx, dy, dz) = 0$$

*vor, so findet man ihre Integralkurven, indem man die zugehörige partielle Differentialgleichung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

*integriert und die Rückkehrkurven auf ihren Integralflächen, d. h. die Umhüllenden der Charakteristiken auf ihren Integralflächen konstruiert.*

Eine eingehende Theorie der Mongeschen Gleichungen findet man bei Lie-Scheffers, *Geometrie d. Berührungstransformationen;* für die hier mitgeteilten Begriffe und Sätze siehe Kap. VII.

Eine Gleichung $\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$ kann *unbeschränkt integrabel* sein, d. h. durch eine Relation zwischen $x, y, z$ erfüllt sein; die Koeffizienten von $dx, dy, dz$ müssen dann gewissen Bedingungen genügen (vgl. Forsyth, *Treatise on diff. equations*, 3. ed., p. 300). Die *singulären Lösungen* solcher Gleichungen lassen sich genau in derselben Weise definieren und behandeln wie im Falle von gewöhnlichen Differentialgleichungen (Guldberg, *Chr. Vid. Skr.* (1899)).

Die Theorie der totalen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung ist von Guldberg (*Chr. Vid. Skr.* (1898); *J. f. Math.* **122**, 34 (1900)) in Angriff genommen, später in einer Reihe von Arbeiten von Pascal (*C. R.*, 5. März 1900, *Rend. Ist. Lomb.* (2) **33** (1900), *Math. Ann.* **54**, 400 (1900); *Ann. di Mat.* (3) **7** (1901)) und Sinigallia (*Rend. Ist. Lomb.* (2) **34** (1902)), Morera (*Mem. Acc. Torino* (2), t. 52, 1902–03) ausgebildet, vgl. Kap. XII.

In betreff Literatur über partielle und totale Differentialgleichungen und Würdigung der Arbeiten der Mathematiker siehe v. Weber, *Enzykl.* **2**, 294 ff.

# Kapitel XII.

## Totale Differentialgleichungen und Differentialformen.

Von *Ernesto Pascal* in Neapel.

### § 1. Pfaffsche Formen und Gleichungen. — Vollständige Integrabilität. Pfaffsches Problem.

Ein Ausdruck von der Form

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \, d x_i ,$$

wo die $X_i$ Funktionen der $x$ sind, heißt eine *Differentialform 1. Ordnung* und *ersten Grades*, oder auch eine *Pfaffsche Form*. Die Gleichung $X = 0$ heißt eine *totale Differentialgleichung 1. Ordnung* oder *eine Pfaffsche Gleichung*.

Wir setzen:

$$(i, j) = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$

und betrachten die drei Matrizen:

$$A \quad \left\| \begin{matrix} X_1, & X_2, & \ldots, & X_n \\ 0, & (1, 2), & \ldots, & (1, n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n, 1), & (n, 2), & \ldots, & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$B = \left\| \begin{matrix} 0, & X_1, & X_2, & \ldots, & X_n \\ X_1, & 0, & (1, 2), & \ldots, & (1, n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_n, & (n, 1), & (n, 2), & \ldots, & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$C \equiv \begin{Vmatrix} 0, & (1,2), & \ldots, & (1,n) \\ (2,1), & 0, & \ldots, & (2,n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n,1), & (n,2), & \ldots, & 0 \end{Vmatrix}$$

mit den Rangzahlen $k, k_1, k_2$. *Man hat immer:*

$$k_1 \geqq k \geqq k_2, \quad k = \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

*Außerdem sind $k_1$ und $k_2$ immer gerade.*

Die Zahl $k$ heißt *Klasse* der Pfaffschen *Form. Die Klasse bleibt bei jeder Transformation der Variabeln ungeändert, ist also eine Invariante. Ferner sind Invarianten die Zahlen $k_1$ und $k_2$.*

Zwei Pfaffsche Formen heißen *äquivalent*, wenn man sie durch eine Transformation der Variabeln ineinander überführen kann.

*Für die Äquivalenz zweier Formen ist die Gleichheit ihrer Klassen $k$ notwendig und hinreichend*

*Bei der Multiplikation einer Form mit einem (von den $x$ abhängigen) Faktor bleibt die Zahl $k_1$ ungeändert.*

*Addiert man zu einer Form ein exaktes Differential, so bleibt die Zahl $k_2$ ungeändert.*

*Wenn die Klasse $k$ von $X$ gerade ist, so ist die von $\varrho \cdot X$, wo $\varrho$ eine Funktion der $x$ bedeutet, gleich $k$ oder $k - 1$; ist $k$ ungerade, so ist dagegen die Klasse von $\varrho X$ entweder $k$ oder $k + 1$ (Frobenius)*

*Wenn zwischen den Koeffizienten einer Form $X$ keine Relation besteht und die Zahl $n$ der Variabeln ungerade ist, so bleibt die Klasse ungeändert, wenn man $X$ mit einem Faktor multipliziert; ist aber $n$ gerade, so bleibt die Klasse ungeändert, wenn man zu $X$ ein exaktes Differential addiert.*

In Verknüpfung mit der Form:

$$X \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i \, dx_i$$

betrachten wir einen Ausdruck:

$$\Xi f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

der in den partiellen Derivierten einer erzeugenden Funktion $f$ linear sei *Dann ist die Bildung:*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n}{}' \xi_i X_i$$

*bei jeder Transformation der Variabeln invariant.* Bekanntlich kann $\Xi f$ als Symbol einer *Infinitesimaltransformation* aufgefaßt werden, und deshalb kann man sagen, $\Delta$ sei die *Simultaninvariante* der Pfaffschen Form $X$ und der Infinitesimaltransformation $\Xi$.

Es liege vor ein System von $m(< n)$ Pfaffschen Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} X^{(1)} = \sum_{i=1}^{n}{}' X_{1i} dx_i = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\ X^{(m)} = \sum_{i=1}^{n}{}' X_{mi} dx_i = 0 \end{cases}$$

und man bilde die linearen Gleichungen:

$$\Delta_s = \sum_{i=1}^{n}{}' X_{si} \xi_i = 0 , \qquad s = (1, 2, \ldots, m)$$

mit den Unbekannten $\xi$.

Wenn die Formen

$$X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$$

linear unabhängig sind, d. h. keine lineare Gleichung zwischen ihnen besteht, so ist die Matrix der Koeffizienten $X_{si}$ von Null verschieden, und die vorhergehenden Gleichungen haben $n - m$ Lösungssysteme in den $\xi$:

$$\begin{matrix} \xi_{11}, & \ldots, & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n-m,1}, & \ldots, & \xi_{n-m,n} \end{matrix}$$

Die linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen mit den Koeffizienten $\xi$, nämlich:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Xi^{(1)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{1i} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Xi^{(n-m)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{n-m,i} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

bilden das zu dem gegebenen System Pfaffscher Gleichungen *adjungierte System*, und umgekehrt kann das System (1) zu (2) *adjungiert* genannt werden.

Das adjungierte und das gegebene System können durch folgende symmetrischen Ausdrücke dargestellt werden:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mn} \end{matrix} \right\| = 0, \qquad \left\| \begin{matrix} dx_1 & \cdots & dx_n \\ \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ \xi_{n-m,1} & \cdots & \xi_{n-m,n} \end{matrix} \right\| = 0,$$

mit der Vorschrift, alle Determinanten höchster Ordnung, die in beiden Matrizen enthalten sind, gleich null zu setzen.

Wenn das System der $X^{(s)}$ nach den Differentialen $dx_1, \ldots, dx_m$ aufgelöst und somit auf die Form:

$$(3) \qquad \begin{cases} dx_1 - \sum\limits_{i=m+1}^{n} X_{1i}\, dx_i = 0 \\ \cdots \\ dx_m - \sum\limits_{i=m+1}^{n} X_{mi}\, dx_i = 0 \end{cases}$$

gebracht ist, so kann auch das adjungierte System aufgelöst und in die Form gebracht werden:

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \sum\limits_{i=1}^{m} X_{i\,m+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum\limits_{i=1}^{m} X_{in} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

Man kann sagen, daß das adjungierte System mit dem gegebenen invariant verknüpft ist, weil die Simultaninvariante $\Delta$ jeder Gleichung des gegebenen und jeder Gleichung des adjungierten Systems immer gleich Null ist.

*Durch eine Transformation der Variabeln geht das adjungierte System über in ein System, das zu dem transformierten des gegebenen Systems adjungiert ist.*

Ein System (1) von Pfaffschen Gleichungen heißt *vollständig integrierbar*, wenn $m$ lineare Kombinationen der ersten Glieder jener Gleichungen bestehen, die $m$ exakte Differentiale $df_1 \ldots df_m$ sind. In diesem Falle heißen:

$$f_1 = \text{const.}, \ldots, f_m = \text{const.}$$

die Integrale des Systems (1).

Die Determinante $\varrho$ der Koeffizienten $\varrho_{\mu\nu}$ der angegebenen linearen Kombinationen:

$$\begin{array}{l} \varrho_{11} X^{(1)} + \ldots + \varrho_{1m} X^{(m)} = df_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho_{m1} X^{(1)} + \ldots + \varrho_{mm} X^{(m)} = df_m, \end{array}$$

heißt der *Multiplikator* des Systems (1).

Über diesen Multiplikator gelten die folgenden Sätze als Erweiterungen gewisser Sätze über die integrierenden Faktoren gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung und ersten Grades.

*Wenn man $\varrho$ mit irgendeiner Funktion $F(f_1, \ldots, f_m)$ der $f$ multipliziert, so erhält man wieder einen Multiplikator. Es gibt also unendlich viele Multiplikatoren.*

*Jeder Multiplikator ist immer in dem Ausdruck $\varrho \cdot F(f_1, \ldots, f_m)$ enthalten.*

*Jeder Multiplikator ist die gemeinsame Lösung eines gewissen vollständigen Systems linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung, und jede gemeinsame Lösung dieses Systems ist ein Multiplikator.*

Wenn das System (1) vollständig integrierbar ist, so ist das adjungierte System (2) vollständig (siehe das Kapitel über *partielle lineare Differentialgleichungen*) und umgekehrt.

*$f_1 = \text{const}, \ldots, f_m = \text{const}$ sind die $m$ unabhängigen Lösungen des vollständigen Systems (2).*

Deshalb gilt auch der Satz:

*Die notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Integrabilität des Systems (3) besteht darin, daß die Gleichungen erfüllt sind:*

$$\left(\frac{\partial X_{jr}}{\partial x_s} - \frac{\partial X_{js}}{\partial x_r}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(X_{is}\frac{\partial X_{jr}}{\partial x_i} - X_{ir}\frac{\partial X_{js}}{\partial x_i}\right) = 0,$$

$$\text{für } j = 1, 2, \ldots, m \text{ und } r, s = m + 1, \ldots, n.$$

*Um das vollständig integrierbare System* (1) *zu integrieren, genügt es, m unabhängige Lösungen des vollständigen Systems* (2) *zu finden.*

*Die notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Integrierbarkeit des Systems* (1) *besteht in dem Verschwinden der Bilinearformen:*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial X_{si}}{\partial x_j}-\frac{\partial X_{sj}}{\partial x_i}\right)U_i V_j \qquad (s=1,2,\ldots,m)$$

*für alle die Wertsysteme $U_i$, $V_j$, die den Gleichungen genügen:*

$$\sum_{i=1}^{n} X_{1i}U_i=0, \quad \sum_{j=1}^{n} X_{1j}V_j=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{mi}U_i=0, \quad \sum_{i=1}^{n} X_{mj}V_j=0.$$

Setzt man:

$$\frac{\partial X_{si}}{\partial x_j}-\frac{\partial X_{sj}}{\partial x_i}=(i,j)_s,$$

so kann die Bedingung für die vollständige Integrierbarkeit auch in die umgewandelt werden, *daß die Matrizen:*

$$\left\|\begin{matrix} 0, & (1,2)_s,\ldots, & (1,n)_s, & X_{11},\ldots & X_{m1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ (n,1)_s, & (n,2)_s,\ldots, & 0, & X_{1n},\ldots, & X_{mn}\\ X_{11}, & X_{12}, & X_{1n}, & 0, & \ldots, 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ X_{m1}, & X_{m2},\ldots, & X_{mn}, & 0, & \ldots, 0 \end{matrix}\right\|$$

*den Rang 2m haben.*

*Wenn ein System* (1) *vollständig integrierbar ist und unter seinen Gleichungen m — p vorkommen, die p Variable weder in endlicher noch in Differentialform enthalten, so bilden jene m — p Gleichungen ihrerseits ein vollständig integrierbares System.*

*Wenn eine einzige Pfaffsche Gleichung gegeben ist und die anderen gebildet werden.*

$$\sum_{i=1}^{n}(i,j)\,dx_i=0, \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

*wo die $(i, j)$ die gewöhnlichen, mit den Koeffizienten der gegebenen Gleichung gebildeten Ausdrücke sind, so bilden die unabhängigen unter diesen so gebildeten Gleichungen ein vollständig integrierbares System.*

*Eine einzelne Pfaffsche Gleichung $X = 0$ ist immer nur dann vollständig integrierbar, also $X$ nur dann von der Form $\varrho df$, wenn die Gleichungen erfüllt sind:*

$$X_i(j, h) + X_j(h, i) + X_h(i, j) = 0.$$

*Diese Bedingungen können auch dadurch ausgedrückt werden, daß die Matrix $A$ den Rang 2 hat. Wenn der Rang von $A$ gleich 1 ist, was also bedeutet, daß alle $(i, j)$ gleich null sind, so ist $X$ ein exaktes Differential, und umgekehrt. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Integrierbarkeit eines Systems Pfaffscher Gleichungen besteht darin, daß seine Gleichungen alle die durch das adjungierte System dargestellten Infinitesimaltransformationen gestatten.*

---

Wenn man eine Pfaffsche Form $X$ und eine Infinitesimaltransformation

$$\Xi f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

hat, so *ergibt die Anwendung von $\Xi$ auf $X$ das Resultat*:

$$\Xi X = d A + \sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n}{}' \xi_j (i, j) d x_i,$$

*wo $A$ die Simultaninvariante von $X$ und $\Xi$ ist.*

Man sagt, die *Form $X$ gestatte die Infinitesimaltransformation $\Xi$*, wenn $\Xi X$ identisch null ist, und *die Gleichung $X = 0$ gestatte die Transformation $\Xi$*, wenn $\Xi X$ gleich dem Produkte von $X$ mit einem Faktor ist, und folglich wegen $X = 0$ selbst verschwindet.

Wie viele und welche Infinitesimaltransformationen gestattet eine Pfaffsche Gleichung?

*Wenn $A = 0$ sein soll, so daß die Transformation $\Xi$ dem zu $X$ adjungierten System angehören soll, wenn ferner die Klasse $k$ von $X$ ungerade ist, so gibt es $n - k$ Infinitesimaltransformationen von der angegebenen Art $\Xi^{(1)}, \Xi^{(2)}, \ldots, \Xi^{(n-k)}$, und ihre*

***Koeffizienten $\xi$ findet man, indem man die gemeinsamen Lösungen der linearen Gleichungen aufsucht:***

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}(i, j)\,\xi_j = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \sum_{j=1}^{n} X_j \xi_j = 0 . \end{cases}$$

***Wenn dagegen die Klasse $k$ gerade ist, so gibt es $n - k + 1$ Infinitesimaltransformationen der angegebenen Art, und die Koeffizienten $\xi$ sind die Wurzeln der Gleichungen:***

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}(i, j)\,\xi_j = \xi_0 X_i & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \sum_{j=1}^{n} X_j \xi_j = 0 , \end{cases}$$

***wo $\xi_0$ eine einzige neue Unbekannte ist, die in diesem Falle nicht, wie bei ungeradem $k$, ausschließlich den Wert null hat.***

Die Systeme der partiellen Differentialgleichungen, die man erhält, wenn man die $\Xi f$ im ersten bzw. zweiten Falle gleich null setzt, heißen System $W$ und System $V$

*Diese Systeme sind vollständige Systeme.*

Wenn $k$ gerade ist, so existieren die beiden Systeme $W$ und $V$, dagegen existiert nur das eine System $W$, wenn $k$ ungerade ist Wenn wir nun bei der Aufsuchung der Infinitesimalformationen, die die Pfaffsche Gleichung gestattet, die Bedingung $\Delta = 0$ weglassen, so finden wir, daß *die Invariante $\Delta$ in jedem Falle die Lösung des vollständigen Systems $W$ sein muß*

---

Das *Reduktionsproblem von Pfaff*, welches die erste Auflösungsmethode der partiellen Differentialgleichungen mit mehr als zwei Variabeln liefert, ist folgendes:

Wenn eine Pfaffsche Form $X$ mit $n$ Variabeln gegeben ist, so soll man die allgemeinste Transformation der Variabeln $x$ in $y$ finden, durch die die Form $X$ übergeht in $\sigma Y$, wo $\sigma$ ein endlicher Faktor und $Y$ eine Pfaffsche Form in den neuen Variabeln $y$ ist, die aber nur mehr $n - 1$ von ihnen enthält.

Es laßt sich zeigen, daß man die allgemeinste Transformation dieser Art auf folgende Weise erhält:

*Man betrachte eine Gleichung des Systems $W$ oder $V$, je nachdem $k$ ungerade oder gerade ist, und es seien deren $n-1$ unabhängige Integrale gefunden:*

$$(7)\qquad \begin{cases} f_1(x) \quad = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{n-1}(x) = y_{n-1}, \end{cases}$$

*wo die $y$ die Konstanten seien.*

*Man wähle darauf eine willkürliche, von den $f_1, \ldots, f_{n-1}$ unabhängige Funktion der $x$:*

$$(8)\qquad f_n(x) = y_n.$$

*Dann ist die durch (7) und (8) dargestellte Transformation von $x$ in $y$ eine der gesuchten; und jede Transformation der gesuchten Art ist von dieser Form.*

Wenn $n$ ungerade ist und $k$ seinen größten Wert hat, nämlich $n$ (wenn wir z. B. annehmen, daß unter den Koeffizienten der gegebenen Form keine identische Relation besteht), so enthält das System $W$ keine Gleichung (weil $n - k = 0$), und daher existiert die genannte Transformation nicht.

Wenn dagegen $n$ gerade ist, so existieren immer Transformationen, die auf die genannte Weise die Zahl der Variabeln vermindern.

Unter passender Anwendung der Reduktionsmethode haben wir alsdann den Satz:

*Es existieren immer Transformationen der Variabeln, durch die man eine Pfaffsche Form ungeraden Ranges $k = 2\lambda - 1$ auf die kanonische Form bringen kann:*

$$\sigma(y_1, \ldots, y_{2\lambda-1})\,\{dy_\lambda + y_{\lambda+1}dy_1 + y_{\lambda+2}dy_2 + \cdots + y_{2\lambda-1}dy_{\lambda-1}\},$$

*während eine Pfaffsche Form gerader Klasse $k = 2\lambda$ sich in die kanonische Form:*

$$y_{\lambda+1}dy_1 + y_{\lambda+2}dy_2 + \cdots + y_{2\lambda}dy_\lambda$$

*bringen läßt.*

Der Begründer der hier vorgetragenen Theorie der Formen ist Pfaff (*Abh. der Berl. Akad.* 1814—1815, Ostwalds *Klassiker* **119**), unmittelbar gefolgt von Gauß (*Gött. Gelehrte Anzeigen*, 1815, *Werke* **3**, 231), Jacobi (*J. f. Math.* **2**, 347 (1827), **17**, 97 (1837)) und Deahna (*J. f. Math.* **20**, 340 (1840)); Natani (*J. f. Math.* **58**, 301 (1861)); Clebsch (*J. f. Math.* **60**, 193 (1862), **61**, 146 (1863)); Graßmann (*Ausdehnungslehre*,

Berlin 1862, § 500, 527); Frobenius (*J. f. Math.* **82**, 230 (1877)); Lie (*Arch. for Math. og Nat.* **2**, 1877); Darboux (*Bull. de math.* (2) **6**); Engel (*Leipz. Berichte* 1889, 1890).

Eine Entwicklung der Theorie findet sich in Forsyth (*Th. of. diff. equat.* **1**, 1890) und namentlich in dem Buch von v. Weber, *Das Pfaffsche Problem etc.*, Leipzig 1900.

Eine Ausdehnung des Pfaffschen Problems auf $m$ Differentialformen findet sich bei Imschenetsky, *Arch. Math. u. Phys.* (2) **54**, 290 (1872); Frobenius, *J. f. Math.* **82**; Engel, *Leipz. Berichte*, 1889, 1890; Biermann, *Schlöm. Zeitschrift* **30**, 234 (1885).

## § 2. Die Differentialformen von höherer als der ersten Ordnung.

Bevor wir zum Studium der höheren Differentialformen und zu einem Überblick über die Resultate übergehen, die man aus den Formen 1. Ordnung durch Verallgemeinerung erhalten hat, wollen wir einige fundamentale Formeln der Analysis vorausschicken.

*Das* $r^{\text{te}}$ *Differential einer Funktion von* $n$ *unabhängigen Variabeln ist:*

$$d^r f = \sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_m}.$$

*Darin bedeutet* $\delta$ *den Ausdruck:*

$$\delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_m} = \frac{1}{m!} \mathop{\mathrm{S}}_{j} \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_m} [i_1 \ldots i_m]^{(r)} d x_{j_1}^{i_1} \ldots d x_{j_m}^{i_m}, \qquad \left( \sum_{s=1}^{m} i_s = r \right)$$

*worin* $S_j$ *die Summation über alle möglichen Permutationen der* $j$ *bedeutet und die Summation über die* $i_1, \ldots, i_m$ *auf alle Zerlegungen ohne Wiederholung der Zahl* $r$ *in* $m$ *Summanden erstreckt wird. Außerdem ist das Symbol* $[i_1 \ldots i_m]^{(r)}$ *ein numerischer Koeffizient, der von den Indizes* $i_1, \ldots, i_m$ *abhängt und den Wert hat:*

$$[i_1 \ldots i_m]^{(r)} = \frac{r!}{i_1! \ldots i_m! \, \varrho_1! \ldots \varrho_s!};$$

*darin bedeutet* $s$ *die Anzahl der voneinander verschiedenen Indizes* $i_1 \ldots i_m$, *also* $s \leqq m$, *und die Zahlen* $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ *geben an, wie oft jeder von diesen Indizes vorkommt, so daß* $\varrho_1 + \cdots + \varrho_s = m$. *Die* $\delta$ *haben die Eigenschaft, daß sich ihre Differentiale durch*

*die δ selbst ausdrücken, und daß das Resultat der Anwendung einer Infinitesimaltransformation auf eines der δ ebenfalls durch die δ ausdrückbar ist.*

*Außerdem transformieren sich die δ durch eine allgemeine Transformation der Variabeln linear.*

Eine lineare Differentialform $r^{\text{ter}}$ Ordnung ist eine Linearform in den δ:

$$X^{(r)} = \sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \ldots j_m}^{1 \ldots n} X_{j_1 \ldots j_m} \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_m},$$

wo die $X_{j_1 \ldots j_m}$ Funktionen der $x_1, \ldots, x_n$ sind, die symmetrisch von den Indizes abhängen.

Wir können auch Differentialformen bilden, die in den δ nicht linear sind, und zwar vom Grade $k$:

$$X^{(r_1, \ldots, r_k)} = \sum_{m=1}^{r_1} \ldots \sum_{p=1}^{r_k} \sum_{j_1, \ldots, i_1}^{1 \ldots n} X_{j_1 \ldots j_m, \ldots, i_1 \ldots i_p} \delta^{(r)}_{j_1 \ldots j_m} \ldots \delta^{(r_k)}_{i_1 \ldots i_p}.$$

*Diese Art von Formen ist invariant gegenüber jeder Variabelntransformation.*

*Die Form $k^{\text{ten}}$ Grades $X^{(r_1 \ldots r_k)}$ transformiert sich wie das Produkt der $k$ linearen Formen:*

$$X^{(r_1)} \ldots X^{(r_k)},$$

*so daß ihre Koeffizienten sich genau so transformieren wie die Koeffizienten des Produktes dieser Formen.*

Ein System von Funktionen der $x_1, \ldots, x_n$, das durch $k$ Indizesgruppen gekennzeichnet ist und sich wie die Koeffizienten einer Differentialform $k^{\text{ten}}$ Grades transformiert, wollen wir *ein zu den $k$ Indizesgruppen kovariantes System* nennen. Dieses stellt eine Verallgemeinerung der kovarianten Systeme des *absoluten Differentialkalküls* dar, die man erhielte, wenn jede Indexgruppe aus einem einzigen Index besteht, d. h. wenn

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 1.$$

Zum Studium dieser Differentialformen wollen wir nun eine fundamentale *Operation* einführen. Wir betrachten die $q^{\text{te}}$ Derivierte eines Koeffizienten $X$:

$$D = \frac{\partial^q X_{j_1 \ldots j_m, \ldots, i_1 \ldots i_p}}{\partial x_{g_1} \ldots \partial x_{g_q}} = \frac{j_1 \ldots j_m, \ldots, i_1 \ldots i_p}{g_1 \ldots g_q}$$

und darauf alle die $k \cdot q$ Derivierten von der Ordnung $q - 1$,

die man erhält, indem man jeden der Indizes des Nenners in den Zähler setzt, so daß die Derivierten dargestellt werden durch:

$$j_1 \ldots j_m, g_1; \ldots; \begin{matrix} i_1 \ldots i_p \\ g_2 \ldots g_q \end{matrix}; \ldots; \begin{matrix} j_1 \ldots j_m; \ldots; i_1 \ldots i_p, g_q \\ g_1 \ldots g_{q-1} \end{matrix}.$$

Wir bezeichnen mit $\Omega$ die Summation aller Derivierten, die so aus einer oder mehreren gegebenen Derivierten abgeleitet sind, und führen die Bildung ein:

$$D - \Omega D + \frac{1}{2!}\Omega^2 D - + \cdots + (-1)^q \frac{1}{q!}\Omega^q D,$$

die wir symbolisch bezeichnen:

$$(9) \qquad ((j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p;\ g_1 \ldots g_q))x,$$

und nennen sie *die $q^{te}$ abgeleitete Kovariante* der Koeffizienten $X_{j_1 \ldots j_m, \ldots, i_1 \ldots i_p}$ bezüglich der Indizes $g_1 \ldots g_q$.

*Die Abgeleitete einer Abgeleiteten, als Funktion von $k$, nicht $k+1$ Indizesgruppen betrachtet, ist wieder eine Abgeleitete.*

Die Derivierte einer Abgeleiteten drückt sich durch die Formel aus:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_\omega}((j_1 \ldots j_m; \ldots; i_1 \ldots i_p;\ g_1 \ldots g_q)) \\
&= ((j_1 \ldots j_m\omega; \ldots; i_1 \ldots i_p;\ g_1 \ldots g_q)) + \cdots \\
&+ \cdots \cdots \cdots \\
&+ ((j_1 \ldots j_m; \ldots; i_1 \ldots i_p\omega;\ g_1 \ldots g_q)) \\
&+ ((j_1 \ldots j_m; \ldots; i_1 \ldots i_p;\ g_1 \ldots g_q\omega))
\end{aligned}$$

*Die Abgeleiteten bilden ein System von Funktionen mit $k+1$ Indizesgruppen, und die Abgeleitete jedes ihrer Elemente ist immer identisch null.*

Bei der allgemeinen Transformation der Variabeln transformiert sich die Abgeleitete (9) mit $k+1$ Indizesgruppen wie die Produkte der $X_{j_1 \ldots j_m} \ldots X_{i_1 \ldots i_p} X_{g_1 \ldots g_q}$, also:

*Das System aller Abgeleiteten der Elemente eines kovarianten Systems bildet wiederum ein kovariantes System.*

Wir beschränken uns auf den Fall $k=1$. Dann haben die Abgeleiteten nur zwei Indizesgruppen. Wir konstruieren mit Hilfe der oben eingeführten Bildungen die folgenden.

Wir setzen:

$$
\begin{aligned}
((j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p)) + ((i_1 \ldots i_p;\ j_1 \ldots j_m)),&\\
= \{j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p\}&, \text{ wenn } m+p \text{ gerade ist,}\\
= (j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p)&, \text{ wenn } m+p \text{ ungerade ist.}\\
((j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p)) - ((i_1 \ldots i_p;\ j_1 \ldots j_m)),&\\
= (j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p)&, \text{ wenn } m+p \text{ gerade,}\\
= \{j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p\}&, \text{ wenn } m+p \text{ ungerade ist.}
\end{aligned}
$$

Die Symbole mit runden Klammern nennen wir *Hauptsymbole erster Art*, die mit geschweiften Klammern *Hauptsymbole zweiter Art*. Der einfachste Fall von Symbolen erster Art entspricht dem Symbol $(j,\ i)$, das wir schon bei der Theorie der Pfaffschen Formen eingeführt haben. Der folgende Fall entspricht dem Symbol $(j_1 j_2;\ i)$, das sich mit dem *Christoffelschen Symbol* in der Theorie der quadratischen Differentialformen identisch erweist.

Es gelten die Formeln:

$$
\frac{\partial}{\partial x_\omega}(j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p) = \{j_1 \ldots j_m \omega;\ i_1 \ldots i_p\} + \{j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p \omega\}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x_\omega}\{j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p\} = (j_1 \ldots j_m \omega;\ i_1 \ldots i_p) + (j_1 \ldots j_m;\ i_1 \ldots i_p \omega).
$$

*Jedes Symbol erster Art läßt sich immer durch eine lineare Kombination der Derivierten der Symbole zweiter Art ausdrücken.*

Es gibt zahlreiche, mit den Hauptsymbolen gebildete Matrizen mit der wichtigen Eigenschaft, daß ihr *Rang* bei jeder Transformation der Variabeln *ungeändert* bleibt.

*Diese Matrizen sind in der ganzen Matrix enthalten:*

$$
\left\|\begin{array}{llcl}
0 & X_1 & \cdot & X_n \\
X_1 & (1;\ 1) & \cdot & (1;\ n) \\
 & & & \cdot\ \ \cdot \\
X_n & (n,\ 1) & \cdot & (n;\ n) \\
X_1 & \{1;\ 1\} & & \{1,\ 1\} \\
X_n & \{n;\ 1\} & & \{n,\ n\} \\
X_{11} & (11;\ 1) & & (11;\ n) \\
 & & & \cdot\ \ \cdot \\
X_{nn} & (nn;\ 1) & & (nn;\ n) \\
X_{11} & \{11;\ 1\}\ \cdot & \cdot & \cdot\ \{11;\ n\} \\
 & \cdot & & \cdot \\
X_{nn} & \{nn;\ 1\}\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \{nn;\ n\} \\
\cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}\right\|
\begin{array}{l}
\}\ M \\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}(M)_1 \\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}\{M\}_1 \\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}(M)_2 \\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}\{M\}_2 \\
\\
\end{array}
$$

Wenn man die aus den angegebenen Gruppen von Zeilen gebildeten Teilmatrizen mit $M$; $(M)_1$; $\{M\}_1$; ... bezeichnet, so gilt der Satz, daß *alle Matrizen:*

$$\begin{array}{l}
M + (M)_1 \\
M + \{M\}_1 \\
M + (M)_1 + \{M\}_1 \\
M + (M)_1 + \{M\}_2 \\
M + \{M\}_1 + (M)_2 \\
M + (M)_1 + \{M\}_1 + \{M\}_2 \\
M + (M)_1 + \{M\}_1 + (M)_2 \\
M + (M)_1 + \{M\}_1 + (M)_2 + \{M\}_2 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

*gegenüber jeder Transformation der Variabeln invarianten Rang haben.*

*Dasselbe gilt für die Matrizen, die man aus den angegebenen erhält, wenn man die erste Spalte oder die erste Zeile $M$, oder schließlich die erste Zeile und die erste Spalte unterdrückt.*

Wenn eine Differentialform $r^{ter}$ Ordnung vorliegt, so ist die letzte der obigen Matrizen:

$$M + \sum_{\varrho=1}^{r-1} |(M)_\varrho + \{M\}_\varrho| + (M)_\varrho \qquad E,$$

und diese umfaßt alle anderen.

*Wird die gegebene Differentialform mit einem Faktor multipliziert, so behält die Matrix $E$ ihren Rang bei.*

Ein besonderer Fall dieses Satzes ist der folgende:

*Wenn eine quadratische Differentialform:*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

gegeben ist, so haben die Matrix:

$$\left\| \begin{array}{llll}
0 & X_{11} & \cdots & X_{1n} \\
\cdot\ \cdot & & \cdot & \\
0 & X_{n1} & \cdot & \cdot\ X_{nn} \\
X_{11} & \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot & \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ n \end{bmatrix} \\
X_{12} & \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \cdot & \cdot \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ n \end{bmatrix} \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
X_{nn} & \begin{bmatrix} n\ n \\ 1 \end{bmatrix} & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot & \cdot \begin{bmatrix} n\ n \\ n \end{bmatrix}
\end{array} \right\|$$

*und die daraus durch Unterdrückung der ersten Spalte hervorgehende einen gegenüber jeder Transformation der Variabeln invarianten Rang.*

Wenn man nach dem Vorbilde einer allgemeinen Differentialform $X^{(r_1 \dots r_k)}$ vom Grade $k$ in den $\delta$ einen Ausdruck betrachtet, der in den partiellen Derivierten von $k$ unbestimmten Funktionen multilinear ist:

$$\Xi^{(s_1 \dots s_k)} = \sum_{m=1}^{s_1} \dots \sum_{p=1}^{s_k} \sum_{j \dots i} \xi_{j_1 \dots j_m; \dots; i_1 \dots i_p} \frac{\partial^m f_1}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \dots \frac{\partial^p f_k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}},$$

*so ist der Ausdruck:*

$$\Lambda = \sum_{m=1}^{s_1}{}' \dots \sum_{p=1}^{s_k}{}' \sum_{j \dots i}{}' X_{j_1 \dots j_m, \dots, i_1 \dots i_p} \xi_{j_1 \dots j_m; \dots; i_1 \dots i_p},$$

*vorausgesetzt, daß die s nicht größer sind als die r von gleichem Index, eine Simultaninvariante der Formen X und Ξ.*

*Die Differentialform $(k+1)^{ten}$ Grades, die zu Koeffizienten die abgeleiteten Kovarianten der Koeffizienten der gegebenen Form hat, also der Ausdruck:*

$$X^{(s_1 \dots s_k s_{k+1})} = \sum_{m=1}^{s_1}{}' \dots \sum_{q=1}^{s_{k+1}}{}' \sum_{j \dots g}{}' ((j_1 \dots j_m, \dots, g_1 \dots g_q)) \delta^{(s_1)}_{j_1 \dots j_m} \dots \delta^{(s_{k+1})}_{g_1 \dots g_q},$$

wo $s_1 < r_1, \dots, s_k \leq r_k$, *ist eine Kovariante der gegebenen Form. Es gilt die einfache Formel:*

$$d X^{(s_1 \dots s_{k+1})} = \sum_{i=1}^{k+1}{}' X^{(s_1 \dots s_i + 1 \dots s_{k+1})}$$

*Wenn eine lineare Differentialform $r^{ter}$ Ordnung und eine Infinitesimaltransformation mit den Koeffizienten $\xi_1, \dots, \xi_n$ gegeben ist, so ist der Ausdruck:*

$$C^{(r-1)} = \sum_{q=1}^{r-1}{}' \sum_{j, g}{}' ((j; g_1 \dots g_q)) \delta^{(r-1)}_{g_1 \dots g_q}$$

*eine Kovariante.*

*Das Resultat der Anwendung einer Infinitesimaltransformation auf eine lineare Differentialform $r^{ter}$ Ordnung ist eine neue lineare Differentialform $r^{ter}$ Ordnung.*

Wenn diese bis auf einen Faktor mit der ursprünglichen identisch ist, so sagt man, jene *gestatte die Infinitesimaltransformation*

*Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer endlichen Transformation der Variabeln, durch die eine Form $X^{(r)}$ in das Produkt eines endlichen Faktors mit einer anderen Differentialform übergeht, die eine Variable weniger enthält, besteht darin, daß eine von der gegebenen Form gestattete Infinitesimaltransformation existiert, für die die Invariante $\Lambda$ und die Kovariante $C^{(r-1)}$ null sind.*

*Eine charakteristische Bedingung besteht auch in dem Verschwinden der $(n+1)$-spaltigen Matrix $E$.*

*Wenn deren Rang $\nu < n+1$ ist, so können wir immer $n+1-\nu$ Variabeln eliminieren, so daß man zu einer Differentialform gelangt, die bis auf einen endlichen Faktor nur $\nu-1$ Variabeln enthält.*

Man kann auch für die höheren Differentialformen sich das Problem der vollständigen Integrabilität und verwandte Probleme vorlegen.

Es läßt sich zeigen, daß auch in diesem Falle ein Theorem besteht analog dem, das eine Verbindung herstellt zwischen der vollständigen Integrabilität und der Möglichkeit von Infinitesimaltransformationen des adjungierten Systems (s. Pascal, *C R*, 1° sem. 1904; *Ann di Matem* (3) 7). Ferner:

*Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit, eine Differentialform 2 Ordnung auf die Form $\sigma d^2 f$ zu bringen, falls nicht alle $(ij)$ gleich Null sind, ist die, daß der Rang der Matrix $(M)_1 + \{M\}_1 + (M)_2$ gleich 2 ist*

*Damit die Form $X^{(2)}$ auf die Form*

$$d^2 f \quad (d\varphi)^2$$

*gebracht werden kann, wo $f$ und $\varphi$ Independenten seien, ist notwendig und hinreichend, daß die Rangzahlen der zwei Matrizen*

$$(M)_1 \text{ und}$$

$$(M)_1 + \{M\}_1 + (M)_2$$

*resp gleich 1 und 2 seien.*

*Damit die Form 2. Ordnung $X^{(2)}$ auf die Form*

$$\sigma[d^2 f + df \sum_j Y_j dx_j]$$

*gebracht werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß die Rangzahlen der zwei Matrizen $(M)_1$ und $M + \{M\}_1$ gleich 2 seien*

Andere Sätze dieser Art, zugleich mit Untersuchung einiger Ausnahmefälle, finden sich bei Pascal (*Rend. Ist Lomb.* 1902, 1903).

Die Theorie der höheren Differentialformen ist in den letzten Jahren hauptsächlich von E. Pascal entwickelt worden in einer zahlreichen Reihe von Arbeiten, die in vielen akademischen Akten und mathematischen Zeitschriften zerstreut sind, z. B. *C. R*, 1900—1902; *Ann. di Mat.* (3) **7**; *R. Ist. Lomb. Rend* 1900, 1901, 1902, 1903, 1906; *Math. Ann.* **54**, 400 (1901); *Acc. dei Lincei Rend.* 1902, 1903, 1906; *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22**, 97 (1906). Eine vollständige Darstellung der ganzen Theorie enthält die Abhandlung von Pascal, *La teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque, Mem Acc dei Lincei* (5) **8** (1910), p. 1—102

Andere Arbeiten über diesen Gegenstand sind die von Sinigallia (*Rend. Ist. Lomb* 1902, 1903, 1904) und Morera in *Torino Mem.* (2) **52**, 1902—02. Eine viel speziellere Untersuchung uber den Fall der 2. Ordnung ist von Guldberg begonnen worden, *Christiania Akad* 1898—1899; *C R* **127**, 1199 (1898).

## § 3. Quadratische Differentialformen.

Eine quadratische Differentialform ist ein Ausdruck von der Form:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\,dx_i\,dx_j\,,$$

wobei wir die Determinante der $X_{ij}$ von Null verschieden und $X_{ij} = X_{ji}$ annehmen

Die Untersuchungen über die quadratischen Differentialformen, besonders bezüglich ihrer Anwendung auf die Infinitesimalgeometrie, erstrecken sich auf ihre Invariantentheorie und ihre Transformation

In dieser Theorie sind *die Symbole von Christoffel und Riemann* grundlegend.

*Die Christoffelschen Symbole erster Art mit drei Indizes sind*

$$\begin{bmatrix} i & j \\ & h \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_{ih}}{\partial x_j} + \frac{\partial X_{hj}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_{ji}}{\partial x_h}\right),$$

*und die zweite Art mit drei Indizes:*

$$\begin{Bmatrix} i & j \\ & h \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} X'_{hk}\begin{bmatrix} i & j \\ & k \end{bmatrix},$$

*wo $X'_{hk}$ die Adjunkte des Elementes $X_{hk}$ in der Determinante $|X|$ der $X_{hk}$ ist, dividiert durch die Determinante $|X|$ selbst.*

*Es bestehen die Beziehungen:*

$$\left[{i\ j \atop h}\right] = \sum_{k=1}^{n} X_{hk} \left\{{i\ j \atop k}\right\}$$

$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_h} = \left[{i\ h \atop j}\right] + \left[{j\ h \atop i}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \log \sqrt{|X|} = \sum_{i} \left\{{i\ h \atop i}\right\},$$

*wo $|X|$ die Determinante der $X_{hk}$ ist.*

Die Symbole mit vier Indizes (*Riemannsche Symbole*) *erster Art* sind definiert durch die Formel:

$$(ij,\, hk) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[{i\ h \atop j}\right] - \frac{\partial}{\partial x_h}\left[{i\ k \atop j}\right] + \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} X'_{rs}\left\{\left[{i\ k \atop r}\right]\left[{j\ h \atop s}\right] - \left[{i\ h \atop r}\right]\left[{j\ k \atop s}\right]\right\},$$

und die *zweiter Art* sind gegeben durch:

$$\{ij,\, hk\} = \sum_{r=1}^{n} X'_{jr}\,(ir,\, hk).$$

*Es bestehen die Relationen:*

$$\{ij,\, hk\} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{{i\ h \atop j}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_h}\left\{{i\ k \atop j}\right\} + \sum_{r=1}^{n}\left\{\left\{{i\ h \atop r}\right\}\left\{{r\ k \atop j}\right\} - \left\{{i\ k \atop r}\right\}\left\{{r\ h \atop j}\right\}\right\}$$

$$(ij,\, hk) = \sum_{r=1}^{n} X_{jr}\,\{ir,\, hk\}$$

$$(ij,\, hk) = -(ji,\, hk) = -(ij,\, kh)$$

$$(ij,\, hk) + (ih,\, kj) + (ik,\, jh) = 0$$

$$(ij,\, hk) = (hk,\, ij).$$

Bei einer Transformation der Variabeln:

$$x_i = \varphi_i(y_1 \ldots y_n), \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

gelten die Formeln, falls man die Koeffizienten der transfor-

mierten Form mit $Y$ und die mit den Koeffizienten $Y$ anstatt mit den $X$ gebildeten Symbole mit $\begin{bmatrix} i\ j \\ h \end{bmatrix}_Y$ usw. bezeichnet:

$$Y_{hk} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} X_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_h} \frac{\partial x_s}{\partial y_k}$$

$$\begin{bmatrix} i\ j \\ h \end{bmatrix}_Y = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} X_{rs} \frac{\partial^2 x_r}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} \begin{bmatrix} r\ s \\ t \end{bmatrix}_X \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \frac{\partial x_s}{\partial y_j} \frac{\partial x_t}{\partial y_h}$$

$$(ij,\, hk)_Y = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{u=1}^{n} (rs,\, tu)_X \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \frac{\partial x_s}{\partial y_j} \frac{\partial x_t}{\partial y_h} \frac{\partial x_u}{\partial y_k}.$$

Ein *System* von Funktionen mit $\mu$ Indizes $X_{i_1 \ldots i_\mu}$ heißt *kovariant von der Ordnung* $\mu$, wenn die Funktionen des transformierten Systems sich durch die ursprünglichen ausdrücken mittels der Formel:

$$Y_{i_1 \ldots i_\mu} = \sum_{r_1=1}^{n} \cdots \sum_{r_\mu=1}^{n} X_{r_1 \ldots r_\mu} \frac{\partial x_{r_1}}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial x_{r_\mu}}{\partial y_{i_\mu}}$$

(falls natürlich festgesetzt ist, wie die Funktionen des transformierten Systems gebildet werden sollen).

So bilden z. B. die Koeffizienten einer Differentialform $\mu^{\text{ten}}$ Grades:

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_\mu=1}^{n} X_{i_1 \ldots i_\mu} dx_{i_1} \cdots dx_{i_\mu}$$

ein *kovariantes System*; die Funktionen des transformierten Systems sind hier die Koeffizienten der transformierten Differentialform.

Die $\mu^{\text{ten}}$ Derivierten einer Funktion der $x_1 \ldots x_n$ bilden *kein* kovariantes System, die Funktionen des transformierten Systems sind hier die (nach $y$ genommenen) Derivierten der transformierten Funktion.

Der Begriff der kovarianten Systeme kann übrigens durch Einführung der Theorie der Differentialformen höherer Ordnung (s. S. 588) erweitert werden, und dann bilden die Derivierten einer Funktion ein kovariantes System *in weiterem Sinne*. Unter Einführung dieses Begriffes können wir sagen:

*Die Riemannschen Symbole erster Art bilden ein kovariantes System.* Wenn man, außer den Koeffizienten der quadratischen Differentialform, andere willkürliche Funktionen mit drei

und mit vier Indizes einführt, die sich wie die Koeffizienten einer *vollständigen* Differentialform 4. Ordnung transformieren, *so kann man das Riemannsche Symbol darstellen als Differenz zweier Ausdrücke, die die Elemente eines ebenfalls kovarianten Systems sind* (Pascal, *Rend. Lincei*, 1906, 1. sem.).

Sei gegeben eine quadratische Differentialform und ein kovariantes System $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung; wir bilden das System von der Ordnung $\mu + 1$ (das also von $\mu + 1$ Indizes abhängt):

$$X_{i_1 \ldots i_\mu i_{\mu+1}} = \frac{\partial X_{i_1 \ldots i_\mu}}{\partial x_{i_{\mu+1}}} - \sum_{l=1}^{\mu} \sum_{m=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} i_l \, i_{\mu+1} \\ m \end{matrix} \right\} X_{i_1 \ldots i_{l-1} m i_{l+1} \ldots i_\mu},$$

wo die Symbole $\left\{ \begin{matrix} i_l \, i_{\mu+1} \\ m \end{matrix} \right\}$ die Christoffelschen Symbole zweiter Art bezüglich der gegebenen quadratischen Differentialform bedeuten.

*Die Elemente des so gebildeten Systems sind ihrerseits Elemente eines kovarianten Systems* (Christoffel). Diese Elemente heißen die *abgeleiteten Kovarianten* der Elemente des gegebenen Systems in bezug auf die gegebene Differentialform. Über die Umkehrung dieses Theorems siehe Pascal, *Rend. Ist. Lomb.* 1906, p. 114.

Dieses Theorem ist von grundlegender Bedeutung und von Ricci zum Ausgangspunkt des sogenannten *absoluten Differentialkalkuls* gemacht worden (s. Ricci, *Ann. di Mat.* (2) **14** (1886) und Ricci und Levi Civita, *Math. Ann.* **54**, 125 (1901)).

Man nennt *Differentialinvariante* einen Ausdruck, der mit den Koeffizienten $X_{ij}$ einer gegebenen quadratischen Differentialform und mit deren Derivierten gebildet ist und bei der Transformation der Variabeln ungeändert bleibt. Enthält er nun, außer den Koeffizienten $X_{ij}$ und deren Derivierten, auch willkürliche Funktionen nebst ihren Derivierten, so heißt er *Differentialparameter*; er heißt von der Ordnung $r$, wenn $r$ die Ordnung der höchsten Derivierten der darin vorkommenden willkürlichen Funktionen ist.

*Der Ausdruck*:

$$\Delta_1 U = \sum_{r,s}^{1 \ldots n} X'_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s},$$

*worin die $X'$ dieselbe Bedeutung wie oben haben, ist ein Differentialparameter 1. Ordnung* (Beltrami).

*Ebenso ist Differentialparameter der Ausdruck:*

$$\nabla(U, V) = \sum_{r,s}^{1..n} X'_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s}. \quad \text{(Beltrami.)}$$

*Der Ausdruck:*

$$\Delta_2 U = \sum_{r,s}^{1..n} X'_{rs} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_m \begin{Bmatrix} r\ s \\ m \end{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_m} \right\}$$

*ist ein Differentialparameter 2. Ordnung* (Beltrami).

Hier ist zu bemerken, daß die Koeffizienten der $X'$ in $\Delta_2 U$ die *zweiten abgeleiteten Kovarianten* der Funktion $U$ sind, nach der Bezeichnung von Ricci.

Ein wichtiges Problem in der Theorie der quadratischen Differentialformen ist das ihrer *Äquivalenz.* Es handelt sich um die Untersuchung der Bedingungen für die Transformierbarkeit einer Differentialform in eine andere (in diesem Falle heißen beide Formen *äquivalent*), und die Aufsuchung der allgemeinsten Variabelntransformation, durch die eine Form in eine andere übergeht. Es läßt sich zeigen, *daß die Gleichungen der allgemeinsten Variabelntransformation, die eine Differentialform in eine andere überführt, höchstens* $\frac{n(n+1)}{2}$ *willkürliche Konstanten enthalten können. Die Transformationen einer Differentialform in sich selbst bilden eine kontinuierliche Gruppe mit höchstens* $\frac{n(n+1)}{2}$ *Parametern.*

*Damit eine Form einer anderen mit konstanten Koeffizienten äquivalent sei, ist notwendig und hinreichend, daß alle Riemannschen Symbole verschwinden.*

Wenn bei einer Differentialform die Riemannschen Symbole den Relationen genügen:

$$(ij, hk) = c(X_{ih} X_{jk} - X_{ik} X_{jh}),$$

wo $c$ konstant, so schreibt man der Differentialform *eine konstante Krümmung* von der Größe $c$ zu.

*Wenn eine Differentialform konstante Krümmung hat, so hat jede äquivalente Form dieselbe konstante Krümmung.*

*Zwei Differentialformen mit derselben konstanten Krümmung sind immer äquivalent, und die Formeln der allgemeinsten Transformation einer in die andere enthalten* $\frac{n(n+1)}{2}$ *willkürliche Konstanten.*

*Eine Form konstanter Krümmung gestattet eine kontinuierliche Gruppe von Transformationen in sich selbst mit* $\frac{n(n+1)}{2}$ *Parametern.*

Es läßt sich zeigen, *daß für die Äquivalenz zweier allgemeiner Differentialformen die Bedingung notwendig ist, daß die mit den* Christoffel*schen Symbolen folgendermaßen für beide Formen gebildeten Matrizen:*

$$\left\| \begin{matrix} 0 & X_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots & X_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & X_{n1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & X_{nn} \\ X_{11} & \left[{1\,1 \atop 1}\right] & \ldots\ldots\ldots\ldots & \left[{1\,1 \atop 1}\right] \\ X_{12} & \left[{1\,2 \atop 1}\right] & \ldots\ldots\ldots\ldots & \left[{1\,2 \atop n}\right] \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ X_{nn} & \left[{n\,n \atop 1}\right] & \ldots\ldots\ldots\ldots & \left[{n\,n \atop n}\right] \end{matrix} \right\|$$

*denselben Rang haben* (Pascal, *Rend. Lincei* 1902, 2.° sem.).

Die Theorie der quadratischen Differentialformen ist speziell hervorgegangen aus Anwendungen auf die Theorie der krummen Oberflächen (Gauß, *Disquis. circa sup. curvas. Comm. Gott.* **6**, 1826 = *Werke* **4**). Dann beschäftigten sich besonders damit: Riemann, *Comm. math. Werke* p. 391; Beltrami, *Mem. Acc. di Bologna* (2) **8**, (1869); Christoffel, *J. f. Math.* **70**, 46 (1869); Lipschitz, *J. f. Math.* **70**, **71**, **72**, **74**, **78**, **81**; Ricci, *Ann. di Mat.* (2) **12**, 135 (1883), **14**, 1 (1886); *Rend. Acc. Lincei* 1888, 1.° sem.; *Delle derivazioni covarianti etc.* Padova 1888, *Teoria delle superficie*, Padova 1898. Schlaefli, *Ann. di Mat.* (2) **5** 178 (1871) Ricci und Levi Civita, *Math. Ann.* **54**, 125 (1901); Maschke, *Trans. Am. soc.* **1**, 197 (1900), **4**, 441 (1903); siehe auch Bianchi, *Geometria differenziale* (1902), Kap. II.

Die Ausdehnung des Äquivalenzproblems auf *vollständige* Differenzialformen 2. Ordnung ist behandelt worden von Pascal, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22**, 1906.

## Kapitel XIII.

## Die Lehre von den Transformationsgruppen.

Von *A. Guldberg* in Christiania.

### § 1. Gruppen von Punkttransformationen.

Die $n$ Gleichungen

$$x'_i = f_i(x_1 \ldots x_n), \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

worin die $f$ analytische Funktionen der $x$ sind, bestimmen eine Transformation der $n$ Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ in den $n$ Veränderlichen $x_1' \ldots x_n'$, wenn sie nach den $x_1 \ldots x_n$ auflösbar sind, wenn also ihre Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial f_i(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_k} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nicht identisch verschwindet.

Enthalten die Gleichungen noch willkürliche Konstanten, etwa die $r$ Parameter $a_1 \ldots a_r$:

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n; \; a_1 \ldots a_r), \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{1}$$

so bestimmen sie eine *Schar von Transformationen*. Diese Schar enthält $\infty^r$ verschiedene Transformationen, wenn die Zahl $r$ der Parameter nicht erniedrigt werden kann; die $r$ Parameter heißen dann *wesentliche*. Jedes System von Werten $a$ liefert eine Transformation; eine Transformation, welche die Veränderlichen ungeändert läßt, heißt die *identische* Transformation. Die Ausführung zweier Transformationen nacheinander erzeugt, wie bei der Lehre von Substitutionen, das *Produkt der beiden Transformationen*. Zwei Transformationen heißen *invers* oder *reziprok*, wenn ihr Produkt die identische Transformation liefert. Bezeichnen wir die einzelnen Transformationen mit $T_a, T_b, \ldots$, so bedeutet $T_a^{-1}$ die inverse von $T_a$, und $T_a T_a^{-1} = 1$ die identische Transformation. Zwei Transformationen $T_a$ und $T_b$ heißen *vertauschbar*, wenn das Produkt $T_a T_b = T_b T_a$.

Die Schar (1) von $\infty^r$ verschiedenen Transformationen bildet eine *r-gliedrige kontinuierliche Transformationsgruppe* in $n$ Veränderlichen, wenn stets die Aufeinanderfolge zweier Transformationen der Schar einer einzigen Transformation der Schar äquivalent ist.

Sind die $f$ speziell rationale Funktionen von den $x$ und $a$ und sind auch ihre inversen Funktionen rational, so erhält man *Cremonasche* oder *birationale Transformationen*, die eine Gruppe bilden. *Jede Cremonasche Gruppe enthält die identische Transformation, und ihre Transformationen ordnen sich paarweise zu inversen zusammen.* Nicht alle Gruppen besitzen diese Eigenschaft.[1])

Die $r$ Parameter $a_1 \ldots a_r$ sind *wesentlich* dann und nur dann, wenn es keine von $x_1 \ldots x_n$ freie partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in $f$:

$$\sum_{k=1}^{k=r} \varphi_k(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

gibt, der die Funktionen $f_1 \ldots f_n$ sämtlich genügen.

*Erster Fundamentalsatz: Bestimmen die Gleichungen* (1) $\infty^r$ *verschiedene Transformationen, die eine Gruppe bilden, so bestehen* $r \cdot n$ *Gleichungen von der Form*

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{1}^{r} \psi_{jk}(a_1 \ldots a_r)\, \xi_{ji}(x_1' \ldots x_n') \qquad \binom{i = 1, 2 \ldots n}{k = 1, 2 \ldots r}$$

*sowie ihre Auflösungen*

$$(\beta) \qquad \xi_{ji}(x_1' \ldots x_n') = \sum_{1}^{r} \alpha_{jk}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}, \qquad \binom{i = 1 \ldots n}{k = 1 \ldots r}$$

*während die* $\xi_{ji}(x')$ *keine* $n$ *linearen homogenen Relationen*

$$e_1 \xi_{1i}(x') + \cdots e_r \xi_{ri}(x') = 0 \qquad (i = 1 \ldots n)$$

*mit konstanten Koeffizienten* $e_1 \ldots e_r$ *erfüllen.* *Wenn umgekehrt solche* $n$ *Gleichungen* (1), *die* $\infty^r$ *verschiedene Trans-*

1) Es läßt sich nachweisen, daß nicht jede kontinuierliche Gruppe die identische Transformation enthält. Aber selbst wenn die identische Transformation in einer Gruppe auftritt, so folgt daraus nicht ohne weiteres, daß die Transformationen der Gruppe sich paarweise als inverse zusammenordnen lassen, vgl. Lie, *Theorie d. Transformationsgruppen* 1, 163. Dies wird indessen im folgenden vorausgesetzt.

*formationen darstellen, $r \cdot n$ Gleichungen von der Form ($\alpha$) und infolgedessen auch $r \cdot n$ Gleichungen von der Form ($\beta$) erfüllen, wenn überdies für gewisse konstante Größen $a_1^0 \ldots a_r^0$ die Gleichungen*

$$f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1^0 \ldots a_r^0) = x_i \qquad (i = 1 \ldots n)$$

*bestehen und schließlich die Determinante der $\alpha_{jk}$ von Null und Unendlich verschieden ist, so stellen die Gleichungen* (1) *eine Gruppe dar.*

Wenn wir in den Gleichungen (1) einer Gruppe den Parametern $a_1 \ldots a_r$ Werte geben, die unendlich wenig von denjenigen Werten $a_1^0 \ldots a_r^0$ abweichen, welche die identische Transformation liefern, so ergibt sich eine *infinitesimale Transformation* der Gruppe. Eine infinitesimale Transformation zwischen $x_1 \ldots x_n$, welche diesen Größen die Inkremente $\partial x_k = \xi_k(x_1 \ldots x_n)\partial t$ erteilt, bezeichnet man mit dem Symbol

$$Xf = \xi_1(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

*Jede eingliedrige Gruppe in $n$ Veränderlichen mit paarweise inversen Transformationen enthält eine und nur eine infinitesimale Transformation. Jede infinitesimale Transformation gehört umgekehrt einer und nur einer eingliedrigen Gruppe an. Dieselbe besitzt paarweise inverse Transformationen*

Die endlichen Gleichungen der von der infinitesimalen Transformation

$$Xf = \sum_1^n \xi_i(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe können in Form von Reihenentwicklungen nach dem Parameter $t$ der Gruppe so geschrieben werden:

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} X x_i + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X(X x_i) + \cdots$$

Hat man $r$ infinitesimale Transformationen $X_1 f, \ldots X_r f$, so heißen sie voneinander *unabhängig*, wenn keine Relation von der Form

$$c_1 X_1 f + \cdots + c_r X_r f = 0,$$

in der die $c_1 \ldots c_r$ Konstanten bedeuten, bestehen.

Jede $r$-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen enthält $r$ und nur $r$ voneinander unabhängige infinitesimale Transformationen.

*Zweiter Fundamentalsatz: r voneinander unabhängige infinitesimale Transformationen*

$$X_i f = \sum_1^n \xi_{i\nu}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (i = 1, 2 \ldots r)$$

*erzeugen dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe, wenn die* $X_1 f, \ldots X_r f$ *paarweise Relationen von der Form*

$$X_i(X_k f) - X_k(X_i f) = (X_i X_k) = \sum_1^r c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1, 2 \ldots r)$$

*mit konstanten Koeffizienten* $c_{iks}$ *erfüllen. Diese Gruppe enthält die identische und paarweise inverse Transformationen.*

Das System dieser Konstanten $c_{iks}$ bestimmt die *Zusammensetzung* der Gruppe $X_1 f, \ldots X_r f$. Zwei $r$-gliedrige Gruppen, welche ein und dieselbe Zusammensetzung haben, nennt man *gleichzusammengesetzt.*

*Dritter Fundamentalsatz:* $r^3$ *Konstanten* $c_{iks}$ *bestimmen dann, aber auch nur dann die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe, wenn sie die Relationen erfüllen:*

$$c_{ikl} + c_{kil} = 0$$

$$\sum_1^r (c_{iks} c_{slt} + c_{kls} c_{sit} + c_{lis} c_{skt}) = 0. \qquad (i, k, l, t = 1, 2 \ldots r)$$

Zwei $r$-gliedrige Gruppen

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1 \ldots n)$$
$$y_i' = g_i(y_1 \ldots y_n;\ b_1 \ldots b_r) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

heißen *ähnlich,* wenn die eine durch Einführung neuer Veränderlichen und Parameter in die andere übergeführt werden kann.

Eine $r$-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ heißt *transitiv,* wenn es im Raume $(x_1 \ldots x_n)$ ein $n$-fach ausgedehntes Gebiet gibt, innerhalb dessen jeder Punkt durch mindestens eine Transformation der Gruppe in jeden beliebigen anderen übergeführt werden kann. Jede Gruppe, die nicht transitiv ist, heißt *intransitiv.*

*Die r-gliedrige Gruppe* $X_1 f, \ldots X_r f$ *des Raumes* $x_1 \ldots x_n$ *ist transitiv, wenn sich unter den r Gleichungen* $X_1 f = 0, \ldots X_r f = 0$ *gerade n voneinander unabhängige befinden, im entgegengesetzten Fall ist sie intransitiv.*

Eine $n$-gliedrige transitive Gruppe in $n$ Veränderlichen heißt eine *einfach transitive* Gruppe.

*Zwei einfach transitive Gruppen in $n$ Veränderlichen sind dann und nur dann miteinander ähnlich, wenn sie gleich zusammengesetzt sind.* Bei intransitiven Gruppen treten stets Funktionen der Veränderlichen auf, welche durch die Transformationen der Gruppe keine Veränderung erleidet; eine solche Funktion heißt eine *Invariante.*

Sind alle Transformationen einer $\varrho$-gliedrigen Gruppe in einer Gruppe mit $r > \varrho$ Parametern enthalten, so heißt die $\varrho$-gliedrige Gruppe eine *Untergruppe* der $r$-gliedrigen Gruppe. *Die Aufsuchung aller kontinuierlichen Untergruppen einer gegegebenen $r$-gliedrigen Gruppe erfordert nur algebraische Operationen.*

*Alle Transformationen, die in zwei Untergruppen einer Gruppe zugleich enthalten sind, bilden für sich eine Untergruppe.*

*Alle Transformationen, die zwei verschiedenen Gruppen zugleich angehören, bilden für sich eine Gruppe.*

Enthält die Gruppe mit den Transformationen $T_a \ldots$ die kontinuierliche Untergruppe mit den Transformationen $S_b \ldots$, und ist jeder Aufeinanderfolge $T_a^{-1} S_b T_a$ wieder eine Transformation $S$ äquivalent, so heißt die Untergruppe $S_b$. eine *invariante* Untergruppe (vgl. S. 186).

Eine Gruppe, welche keine kontinuierlichen invarianten Untergruppen besitzt, heißt *einfach.* Gruppen, die nicht einfach sind, heißen *zusammengesetzt* *Erzeugen die $r$ voneinander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ eine $r$-gliedrige Gruppe, so erzeugt der Inbegriff aller $(X_i X_k)$ eine Gruppe; sind unter diesen Klammerausdrücken $\varrho\,(\leqq r)$ voneinander unabhängig, so erzeugen sie eine $\varrho$-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe $X_1 f, \ldots X_r f$.*

Die Gruppe der $(X_i X_k)$ heißt die *erste derivierte* Gruppe Man kann von dieser Gruppe die erste derivierte suchen usw Die sich dadurch ergebenden Untergruppen heißen die zweite, dritte usw derivierte Gruppe der gegebenen Gruppe. Eine Gruppe, die ihre eigene erste derivierte ist, heißt eine *perfekte* Gruppe

Eine $r$-gliedrige Gruppe $G_r$ heißt *integrabel*, wenn sie folgende Eigenschaft hat: $G_r$ hat eine $r - 1$ gliedrige invariante Untergruppe $G_{r-1}$, $G_{r-1}$ eine invariante $G_{r-2}$, usf bis zur $G_1$.

*Eine $r$-gliedrige Gruppe ist dann und nur dann integrabel, wenn ihre $r^{te}$ Derivierte oder eine frühere Derivierte sich auf die Identität reduziert*

Das anschaulichste Beispiel einer Gruppe bietet die Gesamt-

heit der Bewegungen des Raumes (vgl. S. 170). Eine bemerkenswerte Gruppe ist die $n(n+2)$-gliedrige *projektive* Gruppe in $n$ Veränderlichen

$$x_\nu' = \frac{a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \cdots + a_{\nu n}x_n + a_{\nu, n+1}}{a_{n+1, 1}x_1 + a_{n+1, 2}x_2 \cdots + a_{n+1, n}x_{n+1}} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

und ihre Untergruppen, die $n(n+1)$ gliedrige *allgemeine lineare* Gruppe:

$$x_\nu' = a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \cdots + a_{\nu n}x_n + a_{\nu, n+1} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

und die $n^2$-gliedrige *homogene lineare* Gruppe (vgl. S. 245):

$$x_\nu' = a_{\nu 1}x_1 + \cdots + a_{\nu n}x_n. \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

Um eine Übersicht über alle überhaupt möglichen Gruppen zu erhalten, faßt Lie alle untereinander *ähnlichen* Gruppen in einem *Typus* zusammen. Für $n = 1$ gibt es nur drei Typen von endlichen kontinuierlichen Gruppen: 1. die eingliedrige $x' = x + a$, 2. die zweigliedrige $x' = ax + b$, 3. die dreigliedrige $x' = \frac{ax+b}{cx+1}$. Auch für $n > 1$ gibt es *in einem gewissen Sinne* nur eine begrenzte Anzahl von Typen.

Es gibt auch Gruppen von Transformationen, die den früher aufgestellten Bedingungen genügen, ohne durch ein einziges Gleichungssystem der Form (1) darstellbar zu sein. Jede solche Gruppe $G$ zerfällt in eine endliche oder unendliche Anzahl von Scharen, von denen jede durch ein solches System dargestellt werden kann, von denen aber nur eine eine Gruppe $G$ ist. Als Beispiel solcher Gruppen nennen wir die Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen. Ist die Anzahl dieser Scharen endlich, so haben sie alle dieselbe Parameterzahl und bestehen aus Transformationen, die $G$ invariant lassen. Solche Gruppen nennt man *gemischte* oder *komplexe* Gruppen.

Die hier betrachteten Gruppen, deren Transformationen von einer gewissen endlichen Anzahl von Parametern abhängen, heißen *endliche* Gruppen. Um nun die Definition der *unendlichen* Gruppen zu verstehen, geben wir der Definition der endlichen Gruppen eine andere Form. Wir differenzieren die Gleichungen (1) so oft, daß wir die Konstanten $a_1 \ldots a_r$ eliminieren können. Wir erhalten dann ein System von Differentialgleichungen, welches die folgende Eigenschaft besitzt: 1. wenn

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\; a_1 \ldots a_r)$$

ein System von Lösungen ist, und

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\; b_1 \ldots b_r)$$

ein zweites, so stellt auch

$$x_i' = f_i(f_1(x, a) \ldots f_n(x, a);\ b_1 \ldots b_r)$$

ein Lösungssystem dar; darin liegt, daß wir es mit einer Gruppe zu tun haben. 2. Das allgemeinste Lösungssystem des Systems hängt nur von einer endlichen Anzahl von willkürlichen Konstanten ab.

Nehmen wir nun an: es ist eine Schar von Transformationen $x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n)$ durch ein System von Differentialgleichungen definiert, welches zwar die erste der beiden erwähnten Eigenschaften besitzt, nicht aber die zweite, daß also mit $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ und $x_i' = g_i(x_1 \ldots x_n)$ stets auch $x_i' = g_i(f_1 \ldots f_n)$ ein Lösungssystem ist, daß aber das allgemeinste Lösungssystem nicht bloß von einer endlichen Anzahl willkürlicher Konstanten abhängen, sondern von willkürlichen Funktionen. Dann bildet der Inbegriff von allen Transformationen, welche den betreffenden Differentialgleichungen genügen, eine Gruppe, und zwar eine *unendliche kontinuierliche Gruppe*.

So definieren die Gleichungen

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = 0 \qquad (i \neq k,\ i, k = 1 \ldots n)$$

eine unendliche Gruppe

$$x_i' = \Pi_i(x_1 \ldots x_n),$$

wo die $\Pi_i$ willkürliche Funktionen sind.

## § 2. Berührungstransformationen.

Eine Transformation der Veränderlichen $x, y, y'$:

$$(1) \qquad x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = P(x, y, y'),$$

wo $X, Y, P$ reguläre analytische Funktionen ihrer Argumente sind, und $y'$ den Differentialquotient von $y$ nach $x$, $y_1'$ den von $y_1$ nach $x_1$ bedeutet, heißt dann und nur dann eine *Berührungstransformation*, wenn vermöge der Transformation eine Relation von der Form

$$dy_1 - y_1' dx_1 = \varrho(x, y, y')(dy - y' dx)$$

besteht.

Setzt man symbolisch

$$[XY] = \frac{\partial X}{\partial y'}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + y' \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \frac{\partial Y}{\partial y'}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + y' \frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

*so müssen $X$ und $Y$ der Bedingung*

$$[XY] = 0$$

*genügen.*

*Ist diese Bedingung identisch erfüllt, so ergeben sich für $P$ und $\varrho$ eindeutige Werte, und zwar ist der Wert von $\varrho$ nicht identisch null.*

*Die Aufeinanderfolge zweier Berührungstransformationen ist wieder eine Berührungstransformation.*

*Die inverse einer Berührungstransformation ist ebenfalls eine solche.*

Den Inbegriff eines Punktes $(x, y)$ und einer hindurchgehenden Geraden bezeichnet Lie als ein *Linienelement.* Eine Kurve definiert $\infty^1$ Linienelemente, die man die Linienelemente der Kurve nennt. Eine Schar von Linienelementen $(x, y, y')$ der Ebene, welche die Relation $dy - y'dx = 0$ erfüllt, heißt einen *Verein von Linienelementen* oder *Elementverein.* Benutzt man diesen Begriff, so wird eine Berührungstransformation folgendermaßen definiert:

Eine Transformation (1) in den drei Veränderlichen $x, y, y'$ der Koordinaten der Linienelementen der Ebene heißt eine *Berührungstransformation* der $(xy)$-Ebene, wenn sie jeden Elementverein in einen solchen überführt.

Als Beispiele von Berührungstransformationen der Ebene nennen wir die Dilatation, die Fußpunkttransformation und die Transformation durch reziproke Polaren. Der Name Berührungstransformation kommt daher, daß die Transformation (1) solche Kurven der Ebene, welche sich in einem gemeinsamen Punkt berühren, wieder in derartige Kurven verwandelt.

Der Begriff der Berührungstransformation dehnt sich nun leicht auf den Fall mehrerer Variablen aus.

Ist eine Transformation in den $(2n+1)$ Variablen $z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n$:

$$(2) \qquad \begin{gathered} z' = Z(z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n), \quad x_i' = X_i(z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n), \\ p_i' = P_i(z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n), \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \end{gathered}$$

wo $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ ist, so beschaffen, daß sie die Pfaffsche Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

invariant läßt, also eine Beziehung von folgender Gestalt:

$$dZ - P_1 dX_1 - \cdots - P_n dX_n = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n)$$

identisch besteht, so heißt sie eine *Berührungstransformation* des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes $z, x_1 \ldots x_n$, wobei $\varrho$ eine gewisse Funktion von $z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n$ bedeutet.

Benutzt man das Poissonsche Symbol $[\varphi, \psi]$ für den Ausdruck:

$$\sum_i^{1\ldots n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right],$$

*so sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß die Gleichungen* (2) *eine Berührungstransformation darstellen, daß die Relationen*

$$[X_i X_k] = [X_i Z] = [P_i P_k] = 0,$$

$$[P_i X_k] = \varepsilon_{ik}\varrho, \qquad [P_i Z] = \varrho P_i,$$

*erfüllt sind,* wo $\varepsilon_{ik}$ für $k = i$ den Wert 1 hat und sonst verschwindet.

*Der Inbegriff aller Berührungstransformationen des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes bildet eine unendliche kontinuierliche Gruppe mit paarweise inversen Transformationen.*

Die Größen $z$, $x_i$, $p_i$ sind hier die Koordinaten der *Elemente* des Raumes $z, x_1, \ldots, x_n$, und zwar ist das Element $z, x_i, p_i$ die Figur, die aus dem Punkte $z, x_i$ und aus der hindurchgehenden $n$-fach ausgedehnten Ebene:

$$\mathfrak{z} - z = \sum p_i(\mathfrak{x}_i - x_i)$$

mit den laufenden Koordinaten $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_i$ besteht. Die invariante Gleichung:

$$dz - \sum p_i dx_i = 0$$

ist die Bedingung für die *vereinigte Lage* der beiden unendlich benachbarten Elemente:

$$z,\ x_i,\ p_i \quad \text{und} \quad z + dz,\ x_i + dx_i,\ p_i + dp_i$$

Läßt die Berührungstransformation den Pfaffschen Ausdruck: $dz - \sum p_i dx_i$ invariant, ist also $\varrho = 1$, so hat sie die Form:

$$x_i' = X_i(x, p),\ p_i' = P_i(x, p),\ z' = z + \Omega(x, p)$$

und es besteht eine Identität von der Gestalt:

$$(3) \quad P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n + d\Omega$$

Läßt man hier die Gleichung: $z' = z + \Omega$ weg, so hat man eine sogenannte Berührungstransformation in den $x$, $p$, bei der der Ausdruck $\sum p_i dx_i$ invariant bleibt bis auf ein additives vollständiges Differential.

Für das Bestehen einer Identität (3) ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionen $X_i$, $P_i$ den Gleichungen:

$$(4) \qquad (X_i X_k) = 0, \quad (P_i X_k) = \varepsilon_{ik}, \quad (P_i P_k) = 0$$

genügen, wo $(\varphi\psi)$ der Ausdruck $[\varphi\psi]$ ist, gebildet für den Fall, daß $\varphi$ und $\psi$ beide von $z$ frei sind. Die Funktion $\Omega$ wird dann aus den immer integrablen Gleichungen:

$$(5) \qquad (\Omega X_i) = \sum_k p_k \frac{\partial X_i}{\partial p_k}, \quad (\Omega P_i) = \sum_k p_k \frac{\partial P_i}{\partial p_k} - P_i$$

durch eine Quadratur gefunden.

Wird $\Omega = 0$, so stellen die Gleichungen $x_i' = X_i$, $p_i' = P_i$ eine *homogene Berührungstransformation* dar, die durch die Gleichungen (4) und durch die aus (5) folgende Eigenschaft definiert wird, daß die $X_i$ homogen von nullter O in $p_1, \ldots, p_n$ sind, die $P_i$ aber homogen von 1. O.

Setzt man:

$$x_i = y_i (i = 1, \ldots n - 1), \quad x_n = z, \quad - p_i : p_n = q_i,$$

so kann man $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ als homogene Koordinaten der Elemente $z, y_1, \ldots, y_{n-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}$ des $n$-fach ausgedehnten Raumes $z, y_1, \ldots, y_{n-1}$ auffassen, und es wird $\sum p_i dx_i = 0$ die Bedingung der vereinigten Lage für diese Elemente. Die allgemeinste homogene Berührungstransformation in $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ ist dann zugleich die allgemeinste Berührungstransformation des Raumes $z, y_1, \ldots, y_{n-1}$

Eine einfache und wichtige Berührungstransformation ist die folgende:

$$z' = z - x_1 p_1 - \cdots - x_q p_q,$$

$$x_1' = p_1, \ldots, x_q' = p_q, \quad x_{q+1}' = x_{q+1}, \ldots, x_n' = x_n,$$

$$p_1' = - x_1, \ldots, p_q' = - x_q, \quad p_{q+1}' = p_{q+1}, \ldots, p_n' = p_n,$$

wo $q$ eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bedeutet. Transformationen dieser Art benutzt schon Euler; der Fall $n = 2$, $q = 2$ ist bekannt als die Legendresche Transformation, der $n = 2$, $q = 1$ als die Ampèresche.

Eine *infinitesimale Berührungstransformation* ist eine infinitesimale Transformation:

$$Xf = \sum_i^{1\ldots n} \left( \xi_i(z, x, p) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \pi_i(z, x, p) \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \zeta(z, x, p) \frac{\partial f}{\partial z}$$

in den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, bei der die Pfaffsche Gleichung: $dz - \sum p_i dx_i = 0$ invariant bleibt. *Sie ist durch die Funktion:*

$$U = \sum_i^{1\ldots n} p_i \xi_i - \zeta,$$

*ihre charakteristische Funktion vollständig bestimmt, und umgekehrt ist jede Funktion $U(z, x, p)$ die charakteristische Funktion einer ganz bestimmten infinitesimalen Berührungstransformation, deren Symbol lautet:*

$$Xf = [Uf] - U \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ist $Yf$ eine zweite infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion $V$, so ist auch $X(Y(f)) - Y(X(f)) = (XY)$ eine solche Transformation und hat die charakteristische Funktion:

$$[UV] - U \frac{\partial V}{\partial z} + V \frac{\partial U}{\partial z} = \{UV\}.$$

Eine *infinitesimale Berührungstransformation in den $x, p$* erteilt den Veränderlichen $x, p$ unendlich kleine Zuwachse von der Form:

$$\delta x_i = \frac{\partial U}{\partial p_i} \delta t, \quad \delta p_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \delta t \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wo $U$ eine beliebige Funktion von den $x, p$ ist. Ihr Symbol $Xf$ lautet:

$$Xf = (Uf) = \sum_i^{1\ldots n} \left( \frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right),$$

und es wird für sie:

$$\delta \sum p_i dx_i = d\left( \sum p_i \frac{\partial U}{\partial p_i} - U \right) \cdot \delta t$$

Ist $Yf = (Vf)$ eine zweite infinitesimale Transformation dieser Art, so hat man:

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = (U(Vf)) - (V(Uf)) \equiv ((UV)f),$$

was eine Form der berühmten Jacobischen Identität ist.

Eine *infinitesimale homogene Berührungstransformation* erhält man, wenn man für $U$ eine Funktion $H(x, p)$ setzt, die in den $p$ homogen von 1. O. ist. $H$ heißt dann die zugehörige charakteristische Funktion.

Jede infinitesimale Berührungstransformation (Berührungstransformation in den $x$, $p$, homogene Berührungstransformation) erzeugt eine eingliedrige Gruppe von Transformationen derselben Art.

## § 3. Invarianten und invariante Gleichungssysteme.

Ein sehr wichtiges Problem der Gruppentheorie ist die Bestimmung der bei einer Gruppe invarianten Funktionen und Gleichungssysteme. Wir betrachten zunächst eine eingliedrige Gruppe der $(x, y)$-Ebene

$$x_1 = \varphi(x, y, a), \quad y_1 = \psi(x, y, a), \tag{1}$$

deren infinitesimale Transformation ist:

$$Xf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

*Eine Funktion $\Omega(x, y)$ bleibt invariant bei allen Transformationen der Gruppe (1), wenn aus (1) folgt: $\Omega(x_1, y_1) = \Omega(x, y)$. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn identisch*

$$X\Omega = \xi\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$$

*ist.*

Den Ort aller $\infty^1$ Punkte, in welche ein bestimmter Punkt $p_0(x_0, y_0)$ der $(x, y)$-Ebene vermöge aller Transformationen der Gruppe (1) übergeführt werden kann, nennt man die *Bahnkurve des Punktes* $p_0$.

*Jede eingliedrige Gruppe der Ebene besitzt $\infty^1$ Bahnkurven.*

*Die Invariante $\Omega(x, y)$ einer eingliedrigen Gruppe (1) ist dadurch charakterisiert, daß sie, gleich einer Konstanten gesetzt, die Bahnkurven definiert.*

*Es gibt zweierlei Kurven, welche bei einer Gruppe (1) invariant sein können. Die einen, stets vorkommenden, sind die $\infty^1$ Bahnkurven der Gruppe; sie werden erhalten, indem man die Invariante der Gruppe einer Konstanten gleich setzt. Die Kurven der anderen Art bestehen aus lauter einzelnen invarianten Punkten, für welche $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$ ist.*

*Die Kurve $\omega(x, y) = 0$ ist bei der Gruppe (1) dann und nur dann invariant, wenn $X\omega = 0$ ist, vermöge $\omega = 0$. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Ableitungen von $\omega$ nach $x$ und $y$ nicht beide vermöge $\omega = 0$ verschwinden.*

*Die Schar der $\infty^1$ Kurven $\omega(x, y) = const.$ ist invariant dann und nur dann bei allen Transformationen der Gruppe (1), wenn $X\omega$ eine Funktion von $\omega$ allein ist: $X\omega = F(\omega)$. Insbesondere bleibt jede Kurve der Schar einzeln bei allen Transformationen invariant, wenn $X\omega = 0$ ist.*

Wir gehen zu dem allgemeinen Fall über.

*Ist die r-gliedrige Gruppe $X_1 f, \ldots X_r f$ des Raumes $x_1 \ldots x_n$ transitiv, so hat sie keine Invarianten, ist sie intransitiv, so sind die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $X_1 f = 0, \ldots X_r f = 0$ ihre einzigen Invarianten.*

*Kennt man die endlichen Gleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\; a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

*einer intransitiven Gruppe, so kann man die Invarianten dieser Gruppe durch Elimination finden.*

Bleibt ein Gleichungssystem

$$(\alpha) \qquad \Omega_1(x_1 \ldots x_n) = 0, \ldots, \Omega_{n-m}(x_1 \ldots x_n) = 0$$

bei allen Transformationen einer Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ invariant, so sagt man, daß es die betreffende Gruppe gestattet Dabei wird in der Regel vorausgesetzt, daß in der Matrix der Ableitungen von $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-m}$ nach $x_1, \ldots, x_n$ nicht alle $(n-m)$-reihigen Determinanten vermöge $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden

*Das Gleichungssystem $(\alpha)$ gestattet dann und nur dann alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe $Xf$, wenn alle $n-m$ Ausdrücke $X\Omega_\lambda$ vermöge $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden.*

*Es gibt zwei Arten von solchen Gleichungssystemen, welche die eingliedrige Gruppe*

$$Xf = \sum_{\nu}^{1 \ldots n} \xi_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

*gestatten Die Gleichungssysteme der ersten Art werden durch ganz beliebige Relationen zwischen den Lösungen der Gleichung $Xf = 0$ dargestellt. Die Gleichungssysteme der zweiten Art haben die Form:*

$$\xi_1 = 0, \ldots \xi_n = 0, \quad \psi_1(x_1 \ldots x_n) = 0, \quad \psi_2(x_1 \ldots x_n) = 0, \ldots$$

*wobei die $\psi$ vollkommen willkürlich sind, nur muß es Wertsysteme $x_1 \ldots x_n$ geben, welche die betreffenden Gleichungen befriedigen.*

*Führt man auf einen Punkt $P$ des Raumes $x_1 \ldots x_n$ alle $\infty^r$ Transformationen einer $r$-gliedrigen Gruppe dieses Raumes aus, so bildet der Inbegriff aller Lagen, welche der Punkt auf diese Weise annimmt, eine bei der Gruppe invariante Mannigfaltigkeit; diese Mannigfaltigkeit enthält kein kleineres bei der Gruppe invariantes Teilgebiet, dagegen ist sie selbst in allen invarianten Mannigfaltigkeiten enthalten, in welchen der Punkt $P$ liegt.*

*Erzeugen die $r$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen*

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{k i}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\ldots r)$$

*eine $r$-gliedrige Gruppe, so erhält man durch Nullsetzen aller $(r-m+1)$-reihigen Determinanten der Matrix*

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{rn} \end{vmatrix}$$

*stets ein Gleichungssystem, welches alle Transformationen der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ gestattet; das gilt für jede Zahl $m \leqq r$, vorausgesetzt nur, daß es überhaupt Wertsysteme $x_1 \ldots x_n$ gibt, welche alle die bewußten $(r-m+1)$-reihigen Determinanten zum Verschwinden bringen.*

## § 4. Differentialinvarianten und Integralinvarianten.

Wir betrachten zunächst eine besonders einfache Art von Differentialinvarianten. In den $\infty^r$ Transformationen der $r$-gliedrigen Gruppe $(G)$ $X_1 f \ldots X_r f$ oder

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1 \ldots x_n; a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

betrachten wir die Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ als Funktionen einer Hilfsvariablen $t$, welche von den Transformationen (1) gar nicht transformiert wird. Offenbar sind dann auch $y_1 \ldots y_n$ als Funktionen von $t$ aufzufassen; setzen wir daher:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i^{(1)}; \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i^{(1)},$$

so ergibt sich aus (1) durch Differentiation nach $t$:

$$(2) \qquad y_i = f_i(x_1 \ldots x_n;\, a_1 \ldots a_r), \quad y_i^{(1)} = \sum_{\nu}^{1 \ldots n} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_\nu}\, x_\nu^{(1)} \quad (i = 1 \ldots n).$$

Es läßt sich nachweisen, daß die Gleichungen (2) eine $r$-gliedrige Gruppe in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \ldots x_n, x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}$ darstellen. Diese neue Gruppe heißt die einmal *erweiterte* Gruppe von $G$. Wir bezeichnen sie mit $G^{(1)}$. Die Gruppe $G^{(1)}$ ist erzeugt von den $r$ *erweiterten* infinitesimalen Transformationen

$$X_k^{(1)} f = \sum_i^{1 \ldots n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i^{1 \ldots n} \xi_{ki}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}} \qquad (k = 1, 2 \ldots r),$$

wo $X_k f = \sum_i^{1 \ldots n} \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ und $\sum_i^{1 \ldots n} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_\nu}\, x_\nu^{(1)} = \xi_{ji}^{(1)}$

gesetzt ist.

Die (endlichen) Invarianten von $G^{(1)}$ heißen *Differentialinvarianten* 1. Ordnung von $G$. Die Differentialinvarianten $\Omega^{(1)}$ von $G$, d. h. die Invarianten von $G^{(1)}$ sind daher die Lösungen der Gleichungen $X_k^{(1)} f = 0$. Durch weitere Differenzierung der Gleichungen (1) werden auf analoge Art Differentialinvarianten höherer Ordnung von $G$ definiert.

Man kann aber eine Gruppe auch auf andere Art erweitern.

Wir betrachten die $r$-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ in den $n + m$ Veränderlichen $x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m$:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1 \ldots x_n,\; z_1 \ldots z_m,\; a_1 \ldots a_r) && (i = 1 \ldots n) \\ z_\mu' &= F_\mu(x_1 \ldots x_n,\; z_1 \ldots z_m,\; a_1 \ldots a_r) && (\mu = 1 \ldots m) \end{aligned}$$

Hier seien $x_1 \ldots x_n$ unabhängige Veränderliche und $z_1 \ldots z_m$ beliebig wählbare Funktionen von $x_1 \ldots x_n$. Unter dieser Voraussetzung sind dann $x_1' \ldots x_n'$ im allgemeinen von einander unabhängig, während $z_1' \ldots z_m'$ Funktionen von $x_1' \ldots x_n'$ werden. Für die Differentialquotienten der $z$ nach den $x$ und der $z'$ nach den $x'$ führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} = z_{\nu,k}, \quad \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} z_\mu}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = z_{\mu,\alpha_1 \ldots \alpha_n},$$

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} z'}{\partial x_1'^{\alpha_1} \ldots \partial x_n'^{\alpha_n}} = z'_{\mu,\alpha_1 \ldots \alpha_n}$$

Die $z'_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}$ lassen sich dann durch $x_1 \ldots x_n$, $z_1 \ldots z_m$ und die Differentialquotienten $z_{\nu, \beta_1 \cdots \beta_n}$ von der ersten bis $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$-ten Ordnung ausdrücken:

$$(4) \qquad z'_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n} = F^{\mu}_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}(x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m, z_{\nu, \beta_1 \ldots \beta_n}, a_1 \ldots a_r)$$

$$(\nu = 1 \ldots m, \ \mu = 1 \ldots m, \ \beta_1 + \cdots + \beta_n < \alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

Aus (3) denken wir uns alle Gleichungen von der Form (4) abgeleitet, in denen $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leqq N$ ist. Diese Gleichungen mit den Gleichungen (3) zusammen bilden wieder eine $r$-gliedrige Gruppe, die mit der ursprünglichen Gruppe gleichzusammengesetzt ist und von deren *erweiterten* infinitesimalen Transformationen $X_1^{(N)}f, \ldots X_r^{(N)}f$ erzeugt ist.

Da man die Zahl $N$ so groß wählen kann, daß die infinitesimalen Transformationen $X_k^{(N)}f$ mehr als $r$ Veränderliche enthalten, läßt es sich immer so einrichten, daß die $r$ Gleichungen $X_k^{(N)}f = 0$ ein vollständiges System mit einer oder mehreren Lösungen bilden. Diese Lösungen sind Funktionen von den $x$, den $z$ und den Differentialquotienten der letzteren, sie gestatten jede endliche Transformation der erweiterten Gruppe $X_k^{(N)}f$ und sind daher Invarianten dieser Gruppe; sie sind *Differentialinvarianten* der ursprünglichen Gruppe; es gilt also der Satz:

*Jede endliche kontinuierliche Transformationsgruppe $X_1 f, \ldots X_r f$ bestimmt eine unendliche Reihe von Differentialinvarianten, welche sich als Lösungen von vollständigen Systemen definieren lassen.*

Ferner läßt sich zeigen, daß diese unendliche Reihe von Differentialinvarianten sich sämtlich *durch Differentiation aus einer endlich begrenzten Anzahl derartiger Differentialinvarianten ableiten lassen.* Wir bezeichnen den Inbegriff derjenigen Differentialinvarianten, aus denen sich alle durch Differentiation ableiten lassen, als *ein volles System von Differentialinvarianten*

Eine ganz besondere Stellung nehmen gewisse Ausdrücke ein, die uns gestatten, aus bekannten Differentialinvarianten einer Gruppe neue Differentialinvarianten abzuleiten. Der Einfachheit halber betrachten wir eine $r$-gliedrige Gruppe $G$ der $(x, y)$-Ebene. Eine Funktion $\Omega(x, y, y', \ldots, \varphi, \varphi', \ldots)$ hänge ab von $x$, $y$, den Differentialquotienten von $y$ nach $x$, sowie von einer Funktion $\varphi$ und von deren nach $x$ genommenen vollständigen Differentialquotienten $\varphi', \varphi'', \ldots$. Ist dann, wenn $\varphi$ irgend eine Differentialinvariante der Gruppe ist, stets auch $\Omega$ eine, so heißt $\Omega$ ein *Differentialparameter* oder *Differentiator* der Gruppe. Wenn wir

alsdann diese Funktion $\Omega$ kennen, sowie eine Differentialinvariante $I$, so liefert uns $\Omega$, wenn man $\varphi$ durch $I$ ersetzt, eine zweite Differentialinvariante. Diese würde in $\Omega$ für $\varphi$ eingesetzt eine dritte ergeben usw.

Wie wir eben gesehen haben, können wir eine Gruppe auf verschiedene Weise erweitern und uns deshalb verschiedene Arten von Differentialinvarianten verschaffen. Liegt daher eine kontinuierliche Gruppe vor, so gehören zu dieser Gruppe *mehrere* Reihen von Differentialinvarianten, deren Form nicht allein von der Gruppe sondern auch von den *Gegenständen* abhängt, auf welche die Transformationen der Gruppe ausgeführt werden. Besteht die Gruppe z. B. aus Punkttransformationen des Raumes $x$, $y$, $z$, so können diese Transformationen auf *Kurven*, *Flächen*, auf *Differentialgleichungen*, auf *Flächenscharen*, überhaupt auf viele Gegenstände ausgeführt werden.

Stellt man nun die Frage, ob gewisse Differentialgleichungen oder gewisse analytische Ausdrücke durch eine Transformation einer vorgelegten Gruppe auf gewisse gegebene Formen gebracht werden können, so erhält man jedesmal als notwendige Kriterien gewisse Differentialrelationen, die gegenüber der gegebenen Gruppe einen invarianten Charakter besitzen. Fragt man z. B., wann ein vorgelegter Ausdruck $X(x,y)dx + Y(x,y)dy$ die Form eines vollständigen Differentials $dU(x, y)$ erhalten kann, so ist die Antwort bekanntlich, daß hierzu das Bestehen der Gleichung $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ erforderlich und hinreichend ist Diese Bedingungsgleichung wird durch jede Punkttransformation in ungeänderter Form reproduziert

Die Theorie des Pfaffschen Problems gibt in ganz ähnlicher Weise eine Reihe Kriterien, die gegenüber beliebigen Punkttransformationen einen invarianten Charakter besitzen, vgl. Kap. XII

Wünscht man zu entscheiden, ob zwei Kurven oder Flächen durch Bewegung in einander überführbar, d. h. ob sie kongruent, oder noch anders ausgedrückt, ob sie miteinander vermöge der Gruppe der Bewegungen äquivalent sind, so handelt es sich um nichts anderes als die Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen.

Ein anderes Beispiel ist die von Gauß und Minding begründete Deformationstheorie. Ist das Bogenelement nach Gauß auf die Form gebracht:

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2,$$

und führen wir neue Veränderliche ein:

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y),$$

so erhält unser Bogenelement eine neue Form

$$ds^2 = E_1 dx_1^2 + 2F_1 dx_1 dy_1 + G_1 dy_1^2.$$

Dabei werden $E_1$, $F_1$, $G_1$ als Funktionen von $E$, $F$, $G$ und $x$, $y$ durch gewisse Relationen bestimmt, die mit $x_1 = X$, $y_1 = Y$ vereinigt eine *unendliche* Gruppe bilden. Eine erste Differentialinvariante dieser Gruppe ist das Gaußsche Krümmungsmaß. Auch die von Beltrami und Lamé betrachteten *Differentialparameter (Differentiatoren)* sind Differentialinvarianten von Gruppen.

Als letztes Beispiel sei genannt die Invariantentheorie der algebraischen Formen gegenüber der linearen homogenen Gruppe, die von Boole, Cayley, Aronhold und Clebsch begründet worden ist.

Die Theorie der Differentialinvarianten liefert auch die Theorie der *Integralinvarianten*. Liegt eine endliche oder unendliche Transformationsgruppe in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, $z_1 \ldots z_m$ vor, so sagt man, daß ein Integral:

$$\iint \cdots \int \Omega\left(x_1 \ldots x_n, \; z_1 \ldots z_m, \; \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdots, \; \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \cdots\right) dx_1 \cdots dx_n$$

eine *Integralinvariante* der betreffenden Gruppe darstellt, wenn die Variation $\delta \int \Omega dx_1 \ldots dx_n$ des Integrals bei allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe verschwindet, anders ausgesprochen, wenn die Form des Integrals bei allen endlichen Transformationen der Gruppe erhalten bleibt. Es ist hier Voraussetzung, daß die $z$ als Funktionen der $x$ betrachtet werden.

Ist nun

$$Xf = \sum_k^{1 \ldots n} \xi_k(x, z) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i^{1 \ldots m} \zeta_i(x, z) \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

das allgemeine Symbol einer infinitesimalen Transformation der gegebenen Gruppe, so gelten die Gleichungen:

$$X^{(r)}\Omega + \Omega \sum_i \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \xi_i}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial x_i} \right\} = 0,$$

und umgekehrt gibt *jede Lösung $\Omega$ dieser Gleichungen eine Integralinvariante.* Hier bedeutet $X^{(r)}f$ die $r$-mal erweiterte infinitesimale Transformation von $Xf$.

Ein *Integralparameter* ist eine Funktion $\Omega(x, y, y' \ldots, \varphi, \varphi' \ldots)$ von der Art, daß wenn $\int \varphi(x, y, y' \ldots) dx$ eine Integralinvariante einer Gruppe $G$ der $(xy)$-Ebene ist, auch stets $\int \Omega\, dx$ eine Integralinvariante der Gruppe $G$ ist.

Die in diesem Paragraphen auseinandergesetzte Theorie der Differentialinvarianten und Integralinvarianten rührt von Sophus Lie her; ihre Beziehung zu den Arbeiten von Gauß, Minding, Lamé, Beltrami, Sylvester, Cayley, Schwarz, Halphen, Poincaré, Zorawski, Cartan u. a. findet man besprochen in den folgenden Arbeiten von Lie: *Theorie der Transformationsgruppen* **1**, Kap. 25, *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen,* Kap. 23, *Gesammelte Abh.* **6**, Abh. II (1884), Abh. XXVII (1897).

## § 5. Anwendung der Theorie der Transformationsgruppen auf Differentialgleichungen.

Wir betrachten zuerst eine Differentialgleichung 1 Ordnung und ersten Grades

$$X(x, y)\, dy - Y(x, y)\, dx = 0. \tag{1}$$

Man sagt, daß die Gleichung (1) eine *Transformation gestattet* oder *zulaßt,* sobald sie bei Ausführung derselben bis auf einen Faktor ihre Form bewahrt

*Die Differentialgleichung* (1) *gestattet eine Transformation dann und nur dann, wenn die Schar ihrer Integralkurven diese Transformation gestattet, anders ausgesprochen, wenn jede Integralkurve bei der Transformation in eine Integralkurve ubergeht.*

*Die Differentialgleichung* (1) *gestattet dann und nur dann die eingliedrige Gruppe* $Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$, *wenn* $Uf$ *und der Ausdruck* $Af = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}$ *fur alle Werte von* $x, y$ *und fur jede Funktion* $f(x, y)$ *identisch eine Relation von der Form erfullen:*

$$U(Af) - A(Uf) = \lambda Af,$$

*in der* $\lambda$ *eine Funktion von* $x$ *und* $y$ *allein bedeutet.*

*Wenn die Gleichung* (1) *die eingliedrige Gruppe*

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

*gestattet, so ist* $\frac{1}{X\eta - Y\xi}$ *ein Integrabilitätsfaktor der Gleichung, sobald* $X\eta - Y\xi \neq 0$ *ist. Ein Integral der Gleichung ist demnach*

$$\int \frac{X\,dy - Y\,dx}{X\eta - Y\xi} = \text{const.}$$

*Jede gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen zwei Veränderlichen gestattet unendlich viele infinitesimale Transformationen oder eingliedrige Gruppen.*

*Die Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen* $x$ *und* $y$

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

*gestattet die eingliedrige Gruppe*

$$Uf = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}$$

*dann und nur dann, wenn der Ausdruck*

$$U^{(1)}\Omega \equiv \xi \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \right\} \frac{\partial \Omega}{\partial y'}$$

*vermöge* $\Omega = 0$ *verschwindet, vorausgesetzt, daß die Differentialgleichung* $\Omega = 0$ *nicht in einer solchen Form geschrieben ist, in der* $\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \frac{\partial \Omega}{\partial y'}$ *sämtlich vermöge* $\Omega = 0$ *verschwinden.*

Nicht jede Differentialgleichung $n$-ter Ordnung zwischen $x$ und $y$ $(n > 1)$ gestattet eine infinitesimale Transformation in $x$ und $y$.

*Eine Differentialgleichung 2. Ordnung gestattet höchstens acht unabhängige infinitesimale Transformationen. Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung* $(n > 2)$ *gestattet nicht mehr als* $n + 4$ *von einander unabhängige infinitesimale Transformationen.*

*Der Inbegriff aller Transformationen, die eine Differentialgleichung n-ter Ordnung* $(n > 1)$ *gestattet, bildet eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen, wo die Zahl r an eine endliche obere Grenze gebunden ist.*

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung, die eine Gruppe $G$ gestatten, zerfallen in *Klassen* je nach dem *Typus* von $G$. Da Sophus Lie die verschiedenen Typen von

Gruppen bestimmt hat, ergibt sich die Bestimmung der invarianten Differentialgleichungen unmittelbar aus der Theorie der Invarianten und invarianten Gleichungssysteme der erweiterten Gruppen. Außer einzelnen exzeptionellen Gleichungen, die durch Nullsetzen gewisser Determinanten erhalten werden, sind die Gleichungen, die eine Gruppe $G$ gestatten, von der Form:

$$F\left(J_1, J_2, \frac{dJ_1}{dJ_2}, \frac{d^2J_1}{dJ_2^2}, \ldots\right) = 0,$$

in der $J_1$, $J_2$ die beiden Differentialinvarianten niedrigster Ordnung von $G$ bedeuten, $F$ eine willkürliche Funktion. Für jede der so erhaltenen Gleichungen hat Sophus Lie ein Integrationsverfahren gegeben (*Gesammelte Abh.* 5, Abh. IX, X, XI, XIV (1882, 1883)).

Eine lineare homogene partielle Differentialgleichung 1 O.:

$$Af = \sum_i^{1 \ldots n} \alpha_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

bleibt bei Einführung neuer Veränderlicher:

$$x_i' = F_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

invariant, wenn eine Gleichung von der Form:

$$\sum_i^{1 \ldots n} \alpha_i(x_1', \ldots, x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} = \varrho\,(x_1, \ldots, x_n) \sum_i^{1 \ldots n} \alpha_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

besteht. Man sagt dann, daß $Af = 0$ die Transformation: $x_i' = F_i(x)$ *gestattet* oder *zuläßt*. Notwendig und hinreichend hierfür ist, daß die Transformation jede Lösung von $Af = 0$ wieder in eine Lösung überführt.

Sind $u_1, \ldots, u_{n-1}$ unabhängige Lösungen von $Af = 0$, so gestattet die Gleichung $Af = 0$ dann und nur dann die infinitesimale Transformation $Xf$, wenn $n - 1$ Relationen von der Form:

$$X(u_\nu) = \omega_\nu(u_1, \ldots, u_{n-1}) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

bestehen. Sie gestattet dann zugleich alle Transformationen der von $Xf$ erzeugten eingliedrigen Gruppe. Kennt man die Lösungen von $Af = 0$ nicht, so muß man ein anderes Kriterium anwenden. Es gilt nämlich auch der Satz:

*Die Gleichung $Af = 0$ gestattet dann und nur dann die infinitesimale Transformation $Xf$, wenn eine Beziehung von der Form*

$$X(A(f)) - A(X(f)) = \lambda(x_1, \ldots, x_n) Af$$

*besteht.*

Hat man $q$ unabhängige lineare homogene partielle Differentialgleichungen:

$$A_k f = \sum_i^{1 \ldots n} \alpha_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q),$$

so besitzen diese niemals mehr als $n - q$ unabhängige gemeinsame Lösungen und gerade $n - q$ Lösungen dieser Art haben sie dann und nur dann, wenn sie ein $q$-gliedriges vollständiges System bilden, das heißt, wenn Beziehungen von der Form:

$$(A_k A_j) = \sum_s^{1 \ldots q} \varphi_{kjs}(x_1, \ldots, x_n) A_s f \qquad (k, j = 1, \ldots, q)$$

bestehen

Ein $q$-gliedriges vollständiges System $A_k f = 0$ gestattet eine Transformation $x_i' = F_i(x)$, wenn es bei Einführung der neuen Veränderlichen $x_i'$ in ein System übergeht, das $q$ unabhängige Gleichungen von der Form:

$$A_k' f = \sum_i^{1 \ldots n} \alpha_{ki}(x_1', \ldots, x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q)$$

enthält. *Insbesondere gestattet es die infinitesimale Transformation $Xf$ und die von dieser erzeugte eingliedrige Gruppe dann und nur dann, wenn Relationen von der Form*

$$(A_k X) = \sum_s^{1 \ldots q} \chi_{ks}(x_1, \ldots, x_n) A_s f \qquad (k = 1, \ldots,$$

*bestehen.*

Gestattet ein vollständiges System die beiden infinitesimalen Transformationen $Xf$ und $Yf$, so gestattet es erstens jede infinitesimale Transformation:

$$uXf + vYf + \sum_s^{1 \ldots q} w_s A_s f,$$

wo $u$ und $v$ beliebige Lösungen des vollständigen Systems, die $w_s$ aber willkürliche Funktionen bezeichnen, und *es gestattet zweitens auch die infinitesimale Transformation:*

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = (XY).$$

Ist ein vollständiges System $A_k f = 0$ vorgelegt und kennt man mehrere, etwa $m$ infinitesimale Transformationen: $X_1 f, \ldots, X_m f$, die es gestattet, so kann der Fall eintreten, daß: $A_1 f, \ldots, A_q f$, $X_1 f, \ldots, X_l f$ $(l < m)$ durch keine lineare homogene Relation verknüpft sind, während jedes $X_{l+\mu} f$ sich so darstellen läßt:

$$X_{l+\mu} f = \sum_{\lambda}^{1 \ldots l} \psi_{\mu\lambda}(x_1, \ldots, x_n) X_\lambda f + \sum_{s}^{1 \ldots q} \chi_{\mu s}(x) A_s f \qquad (\mu = 1, \ldots, m - l)$$

*Dann ist jede Funktion $\psi_{\mu\lambda}$ eine Lösung des vollständigen Systems.*

So kann man aus den bekannten infinitesimalen Transformationen des vollständigen Systems einerseits Lösungen, andrerseits neue infinitesimale Transformationen ableiten. Findet man dabei nicht alle Lösungen, so läßt sich das ganze Integrationsproblem schließlich auf das Liesche *Normalproblem* zurückführen:

*Gegeben ist ein $q$-gliedriges vollständiges System $A_k f = 0$ in $n$ Veränderlichen, das $n - q$ bekannte infinitesimale Transformationen: $X_1 f, \ldots, X_{n-q} f$ gestattet, dabei sind: $A_1 f, \ldots, A_q f$, $X_1 f, \ldots, X_{n-q} f$ nicht durch eine lineare Relation verknüpft, es bestehen aber Beziehungen von der Form:*

$$(X_i X_k) = \sum_{s}^{1 \ldots n-q} c_{iks} X_s f + \sum_{j}^{1 \ldots q} \vartheta_{ikj}(x_1, \ldots, x_n) A_j f \qquad (i, k = 1, \ldots, n - q),$$

*wo die $c_{iks}$ Konstanten bezeichnen.*

Sind $u_1, \ldots, u_{n-q}$ die unbekannten Lösungen des vollständigen Systems, so wird:

$$X_k u_\mu = \eta_{k\mu}(u_1, \ldots, u_{n-q}),$$

und die $n - q$ infinitesimalen Transformationen:

$$\bar{X}_k f = \sum_{\mu}^{1 \ldots n-q} \eta_{k\mu}(u_1, \ldots, u_{n-q}) \frac{\partial f}{\partial u_\mu} \qquad (k = 1, \ldots, n - q),$$

die in den Beziehungen:

$$(\bar{X}_i \bar{X}_k) = \sum_{s}^{1 \ldots n-q} c_{iks} \bar{X}_s f$$

stehen, erzeugen eine $(n-q)$-gliedrige einfache transitive Gruppe, die angibt, wie die Lösungen des vollständigen Systems bei den infinitesimalen Transformationen $X_k f$ unter einander vertauscht werden. Da die Konstanten $c_{iks}$ bekannt sind, so ist die *Zusammensetzung* dieser Gruppe: $X_1 f, \ldots, X_{n-q} f$ bekannt.

Diese Zusammensetzung ist es, die die Integrationstheorie des Normalproblems beherrscht Ist $X_1 f, \ldots, X_l f$ eine Untergruppe der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_{n-q} f$, so kann man eine *Resolvente* des Problems aufstellen, indem man das vollständige System:

$$A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0, \quad X_1 f = 0, \ldots, X_l f = 0$$

bildet. Hat man dieses integriert, also $n - q - l$ unabhängige Lösungen: $v_1, \ldots, v_{n-q-l}$ des Systems gefunden, so sind:

$$X_{l+\mu} v_k, \quad X_{l+\mu} X_{l+\nu} v_k, \ldots \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n-q-l)$$

im allgemeinen neue Lösungen des Systems $A_k f = 0$. Ist $X_1 f, \ldots, X_h f$ die größte in der Untergruppe $X_1 f, \ldots, X_l f$ enthaltene invariante Untergruppe der Gruppe: $X_1 f, \ldots, X_{n-q} f$, so findet man auf diese Weise alle Lösungen des vollständigen Systems:

$$A_1 f = 0, \ldots, A_q f = 0, \quad X_1 f = 0, \ldots, X_h f = 0.$$

Ist insbesondere die Gruppe $X_1 f, \ldots, X_{n-q} f$ *einfach*, enthält sie also keine invariante Untergruppe, so ist $h = 0$, und das ganze Integrationsproblem ist erledigt. Die Ordnung der erforderlichen Integrationsoperationen wird dabei möglichst klein, wenn man die Untergruppe: $X_1 f, \ldots, X_l f$ so wählt, daß ihre Gliederzahl $l$ möglichst groß ist.

Diese ganze Integrationstheorie zeigt die vollkommenste Analogie zu der Galoisschen Behandlung der algebraischen Gleichungen.

Eine unübersehbare Fülle von Integrationsproblemen läßt sich auf Probleme von der Art zurückführen, wo ein vollständiges System mit bekannten infinitesimalen Transformationen zu integrieren ist Die Liesche Invariantentheorie gestattet in jedem Falle, genau festzustellen, welche Integrationsoperationen zur Erledigung des Problems erforderlich sind.

Alle in diesem Kapitel zusammengestellten Begriffe und Sätze rühren von Sophus Lie her. Seine zahlreichen Abhand-

lungen über Transformationsgruppen und deren Anwendung auf die Integrationstheorie findet man in Bd. V und VI seiner Gesammelten Abhandlungen vereinigt. Man vgl. ferner sein großes Werk: *Theorie der Transformationsgruppen*, bearbeitet unter Mitwirkung von F. Engel, 3 Bde. 1888, 91, 93. *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* (1891), herausgegeben von Scheffers, *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen* (1893), herausgegeben von Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, dargestellt von Lie und Scheffers.

W. Killing ist es gelungen, alle möglichen Zusammensetzungen der einfachen endlichen kontinuierlichen Gruppen zu bestimmen *Math. Ann.* **31**, **33**, **34**, **36** (1888—90). E. Cartan hat die Killingschen Ergebnisse bestätigt und die allgemeine Theorie der Zusammensetzung ganz außerordentlich vervollkommnet, es ist ihm auch gelungen, den Begriff der Zusammensetzung für die unendlichen kontinuierlichen Gruppen zu definieren und die Zusammensetzungen aller einfachen Gruppen dieser Art zu bestimmen. S. seine Thèse 1894 und Abhandlungen im *American Journal* **18**, 1896 und den *Annales de l'École normale* (3), **21**, **22** (1904, 1905).

Lie selbst hat alle endlichen und alle unendlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkt- und Berührungstransformationen des Raumes aufgestellt, diese aber nur teilweise veröffentlicht. Ugo Amaldi hat die Bestimmung aller unendlichen Gruppen von Berührungstransformationen und von Punkttransformationen des Raumes durchgeführt. Accademia di Torino 1906, 80 S. und Accademia di Modena 1910, 1912, 73 und 343 S.

## Kapitel XIV.

## Variationsrechnung.

Von *Hans Hahn* in Wien.

### § 1. Das einfachste Problem der Variationsrechnung.

Die Variationsrechnung behandelt die Aufgabe, in gewissen Ausdrücken, deren Wert von der Wahl einer oder mehrerer Funktionen abhängt, diese Funktionen so zu bestimmen, daß der Ausdruck einen möglichst kleinen oder möglichst großen Wert annimmt. Die ersten Aufgaben dieser Art haben Newton und die Brüder Bernoulli behandelt (s. § 9). Zu einer eigenen Disziplin wurde die Variationsrechnung ausgestaltet durch Euler und Lagrange (vgl. hierzu A. Kneser, *Abh. zur Gesch. d. math. Wiss.* **25**, 23 (1907)), auf exakte Grundlage gestellt und — wenigstens für die einfachsten Probleme — zu einer gewissen Vollendung gebracht durch Weierstraß.

Wir nennen eine Reihe moderner Lehrbücher, in denen die im folgenden behandelten Probleme und auch manche andere ausführlich dargestellt sind: A. Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung,* Braunschweig 1900, 2. Aufl. 1925; H. Hancock, *Lectures on the calculus of variations,* Cincinnati 1904; O. Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung,* Leipzig und Berlin 1909; J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations* **1**, Paris 1910; L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni,* 2 Bde., Bologna 1921, 1923. G. Vivanti, *Elementi del calcolo delle variazioni,* Messina 1923. Eine kurze Darstellung der Elemente in É. Goursat, *Cours d'analyse* (2° u. 3° éd.) **3**. Viele historische Notizen und Literaturangaben bei E. Pascal, *Calcolo delle variazioni,* Mailand 1897, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1899, sowie besonders in den Artikeln über Variationsrechnung der Enzyklopädie (ausführlicher in der französischen Ausgabe). Vollständige Literaturverzeichnisse: M. Lecat, *Bibliographie du calcul des variations*

*depuis les origines jusqu'à* 1850, Gand 1916; *Bibl. d. calc. d. var.* 1850—1913, Gand 1913. Nachträge hierzu in: *Bibl. d. séries trigonométriques* (Gand 1921), 156. Über Fortschritte der Variationsrechnung in den letzten Jahren referiert G. A. Bliss, *Am. Bull.* **26**, 343 (1920).

Wir beginnen mit Besprechung des sog. einfachsten Problemes der Variationsrechnung. Wir verstehen unter $f(x, y, y')$ eine Funktion, die für alle in einem gewissen Bereiche $\mathfrak{R}$ liegenden Wertepaare $(x, y)$ und für alle endlichen Werte von $y'$ regulär analytisch ist.[1] Von allen in Betracht kommenden Punkten und Kurven wird angenommen, daß sie im Innern von $\mathfrak{R}$ liegen. Partielle Differentiationen von $f$ (und anderen Funktionen) werden durch angehängte Indizes angedeutet; so bedeutet $f_x(x, y, y')$ die Ableitung von $f$ nach der ersten Veränderlichen, $f_{xy}(x, y, y')$ die nach der ersten und zweiten Veränderlichen usw.

Unter $y(x)$ (ebenso unter $\bar{y}(x)$, $\eta(x)$, $u(x)$ usw.) wird eine eindeutige zweimal stetig differenzierbare Funktion von $x$, unter $y'(x)$ ihre erste, unter $y''(x)$ ihre zweite Ableitung verstanden. Unter der *Nachbarschaft* $\varrho$ des durch $x_1 \leq x < x_2$ gegebenen Bogens $(x_1, x_2)$ der Kurve $y = y(x)$ verstehen wir die Gesamtheit jener Punkte der $xy$-Ebene, deren Abstand von wenigstens einem Punkte des genannten Bogens die Zahl $\varrho$ nicht übersteigt.

Unter „*Wert des Integrales*

$$\int f(x, y, y')\,dx \tag{1}$$

*erstreckt über den Bogen* $(x_1, x_2)$ *der Kurve* $y = y(x)$" (oder „*Wert, den dieser Bogen dem Integrale* (1) *erteilt*") verstehen wir den Ausdruck:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\,dx\,.$$

Wir sagen: Der Bogen $(x_1, x_2)$ der Kurve $y = y(x)$ *macht das Integral* (1) *zu einem Minimum (Maximum)* gegenüber allen anderen (irgendwelchen Bedingungen genugenden) Kurvenbogen, wenn es eine Nachbarschaft $\varrho$ dieses Bogens gibt derart, daß jeder andere diesen Bedingungen genügende und ganz in dieser Nachbarschaft liegende Bogen einer Kurve $y = \bar{y}(x)$ dem Integrale (1) einen größeren (kleineren) Wert erteilt. Wir sagen

---

1) Es geschieht dies der Einfachheit halber, es genügen weniger weitgehende Voraussetzungen.

von dem genannten Bogen, *er macht das Integral zu einem schwachen Minimum (Maximum),* wenn es zwei positive Konstanten $\varrho$ und $\varrho'$ gibt, derart, daß jeder andere unseren Bedingungen genügende, in die Nachbarschaft $\varrho$ unseres Bogens fallende Kurvenbogen, dessen Punkte sich auf die unseres Bogens eineindeutig stetig so beziehen lassen, daß der Winkel zwischen den Tangenten in entsprechenden Punkten dieser Bögen kleiner als $\varrho'$ ist, dem Integrale (1) einen größeren (kleineren) Wert erteilt. Im Gegensatze zum schwachen Minimum (Maximum) wird das an erster Stelle genannte auch als *starkes* Minimum (Maximum) bezeichnet.

Das *einfachste Problem der Variationsrechnung* lautet: Unter allen, zwei gegebene Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ $(x_2 > x_1)$ der Ebene verbindenden Kurvenbögen $y = y(x)$ diejenigen aufzufinden, welche ein Integral der Form (1) zu einem Minimum (Maximum) machen.

Sei $y = y(x)$ ein solcher Kurvenbogen, $\eta(x)$ eine beliebige den Gleichungen $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ genügende Funktion, $\varepsilon$ ein Parameter. Wir bilden die Schar der Kurven:

$$(2) \qquad y = y(x) + \varepsilon\eta(x),$$

die sämtlich durch die beiden gegebenen Punkte hindurchgehen; der Wert, den der Bogen $(x_1, x_2)$ der zum Parameterwerte $\varepsilon$ gehörigen Kurve dieser Schar dem Integrale (1) erteilt, ist eine Funktion von $\varepsilon$; sie werde bezeichnet mit $J(\varepsilon)$; diese Funktion ist an der Stelle $\varepsilon = 0$ regulär analytisch; wir setzen:

$$(3) \quad J(\varepsilon) - J(0) = \frac{\varepsilon}{1!}\,\delta J + \frac{\varepsilon^2}{2!}\,\delta^2 J + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\,\delta^n J + \cdots$$

der Ausdruck $\delta^n J$ hängt nur ab von der Wahl von $y(x)$ und $\eta(x)$; er wird bezeichnet als *die* $n^{te}$ *Variation des Integrales* (1) (bei Übergang von der Kurve $y = y(x)$ zu den Vergleichskurven (2)).

Für die erste und zweite Variation gelten demnach die Formeln:

$$(4) \quad \delta J = \int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y, y')\eta + f_{y'}(x, y, y')\eta']\,dx.$$

$$(5) \quad \delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} [f_{yy}(x,y,y')\eta^2 + 2 f_{yy'}(x,y,y')\eta\eta' + f_{y'y'}(x,y,y')\eta'^2]\,dx.$$

Wenn der Bogen $(x_1, x_2)$ der Kurve $y = y(x)$ das Integral (1) zu einem (starken oder schwachen) Minimum (bzw. Maximum) macht, so muß in (3) für alle genügend kleinen, von Null verschiedenen $|\varepsilon|$ die Ungleichung bestehen: $J(\varepsilon) - J(0) > 0$ (bzw. $< 0$). Nach der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima (Rep. $\mathrm{I}_1$, Kap. VII, § 7) ist das nur möglich, wenn: $\delta J = 0$; $\delta^2 J \geq 0$ (bzw. $\leqq 0$). Daher:

*Damit der Bogen $(x_1, x_2)$ der Kurve $y = y(x)$ ein (starkes oder schwaches) Minimum (bzw. Maximum) des Integrales* (1) *liefere, ist notwendig, daß er der ersten Variation dieses Integrales den Wert Null erteile, der zweiten Variation aber einen nicht negativen (bzw nicht positiven) Wert, bei beliebiger Wahl der (nur durch $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ eingeschränkten) Funktion $\eta$.*

Durch partielle Integration läßt sich $\delta J$ auf die Form bringen:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x))]\, \eta(x)\, dx, \tag{6}$$

woraus man (wegen $\delta J = 0$) leicht folgert:

*Damit die Kurve $y = y(x)$ ein Minimum (Maximum) von* (1) *liefere, ist notwendig, daß sie der Gleichung genugt:*

$$f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') = 0. \tag{7}$$

Nach Ausführung der Differentiation nach $x$ lautet diese Gleichung:

$$\begin{aligned} f_y(x, y, y') - f_{y'x}(x, y, y') - f_{y'y}(x, y, y')y' \\ - f_{y'y'}(x, y, y')y'' = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Sie wird als die *Eulersche Gleichung* unseres Variationsproblemes bezeichnet (sie kommt zuerst vor bei Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (1744), Kap II, Art 21; ubersetzt von Stäckel in Ostwalds Klass., Nr 46; zu Eulers Herleitung dieser Gleichung vgl. A. Kneser, *Euler und die Variationsrechnung, Abh z Gesch d Math Wiss.* **25** (1907) und R B. Rubbins, *Am Journ.* **37**, 367 (1915)). Nach der hier angegebenen Methode wurde sie zuerst hergeleitet von Lagrange (*Œuvres* **1**, 335 (1752), auch **14**, 138 (1755)) und wird vielfach auch als *Lagrangesche Gleichung* bezeichnet; diese Methode setzt die Existenz der zweiten Ableitung $y''$ der gesuchten Funktion voraus, während man von vornherein gar

nicht wissen kann, ob die gesuchte Funktion eine zweite Ableitung besitzt (Einwand von P. Du Bois-Reymond, *Math. Ann.* **15**, 312 (1879)); Herleitungen der Gleichung (7), die diesem Einwande Rechnung tragen, findet man in den Lehrbüchern von Bolza, Hadamard, Tonelli; ferner: A. Razmadzé, *Math. Ann.* **84**, 115 (1921); H. Hahn, *Math. Ann.* **63**, 253 (1906)).

Gleichung (8) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für $y$, ausgenommen den Fall, daß $f_{y'y'}$ identisch verschwindet, d. h. $f(x, y, y')$ linear in $y'$ ist:

$$f(x, y, y') = A(x, y) + y' B(x, y);$$

in diesem Falle reduziert sie sich auf die Gleichung $A_y - B_x = 0$ zwischen $x$ und $y$, oder ist identisch erfüllt, falls für alle $x$ und $y$ gilt: $A_y = B_x$; in diesem letzteren Falle gibt es eine Funktion $C(x, y)$, so daß $A(x, y) = C_x(x, y)$, $B(x, y) = C_y(x, y)$, es ist also

$$f(x, y, y') = A(x, y) + y' B(x, y) = \frac{d}{dx} C(x, y),$$

(mit anderen Worten: es ist $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ ein vollständiges Differential) infolgedessen ist für alle im Punkte $(x_1, y_1)$ beginnenden, im Punkte $(x_2, y_2)$ endigenden Kurvenbögen:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx = C(x_2, y_2) - C(x_1, y_1),$$

d. h. *der Wert des Integrales ist vom Wege unabhängig*

Ist Gleichung (8) wirklich von 2 Ordnung, so gibt es eine zweiparametrige Schar von Extremalen; durch jedes reguläre Linienelement $x_0, y_0, y_0'$ (d. h durch jenes Linienelement, für welches $f_{y'y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$ ist) ist eine Extremale eindeutig festgelegt; durch einen Punkt $(x_0, y_0)$ geht eine einparametrige Schar von Extremalen Zwei hinreichend nahe Punkte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ können i. a durch eine Extremale verbunden werden; über das in die Theorie der Differentialgleichungen gehörige „Randwertproblem“, ob zwei vorgegebene Punkte durch eine Extremale verbunden werden können, vgl auch § 4

Sei $y = y(x)$ eine die beiden gegebenen Punkte verbindende Extremale; wir setzen:

$$(9) \quad \begin{gathered} f_{yy}(x, y(x), y'(x)) = P(x); \; f_{yy'}(x, y(x), y'(x)) = Q(x); \\ f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) = R(x). \end{gathered}$$

Die zweite Variation läßt sich in die Form bringen:

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} \psi(\eta)\eta\, dx, \tag{10}$$

wo:

$$\psi(\eta) = (P - Q')\eta - R'\eta' - R\eta''. \tag{11}$$

Setzen wir

$$\psi(u) = 0, \tag{12}$$

so erhalten wir eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für $u$, die sogenannte *Jacobische Differentialgleichung* (C. G. J. Jacobi, *J. f. Math.* **17**, 68 (1837); abgedruckt in Ostwalds Klass., Nr. 47).

Ist das Intervall $(\xi_1, \xi_2)$ $(x_1 < \xi_1 < \xi_2 \leq x_2)$ so klein gewählt, daß es eine Lösung $u(x)$ von (12) gibt, die darin nirgends verschwindet, ist ferner die Funktion $\eta(x)$ überall Null außer in $(\xi_1, \xi_2)$, so kann $\delta^2 J$ auf die Form gebracht werden:

$$\delta^2 J = \int_{\xi_1}^{\xi_2} R \frac{(\eta' u - \eta u')^2}{u^2}\, dx. \tag{13}$$

Wegen $\delta^2 J \geqq 0$ (bzw. $\leqq 0$) entnimmt man daraus unter Beachtung von (9): *Damit die Extremale $y = y(x)$ ein (starkes oder schwaches) Minimum (bzw Maximum) von* (1) *liefere, ist notwendig, daß in $(x_1, x_2)$ die Ungleichung erfüllt ist:*

$$f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0 \quad (\text{bzw } \leqq 0) \tag{14}$$

(*notwendige Bedingung von* Legendre: *Mém. Acad. sc.* 1786, 7; übersetzt von Stäckel in Ostwalds Klass Nr. 47; vgl hierzu auch § 4).

Wir setzen von nun an die Legendresche Bedingung als erfüllt voraus, und zwar in der schärferen Form:

$$f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0. \tag{15}$$

Der Bogen $(x_1, x_2)$ unserer Extremale besteht dann aus lauter regulären Elementen der Gleichung (8), die Lösung $y(x)$ von (8) ist daher im Intervalle $(x_1, x_2)$ regulär analytisch. Die Gleichung (12) hat dann im Intervalle $(x_1, x_2)$ keine singuläre Stelle. Aus (10) leitet man ab die *notwendige Bedingung von Jacobi*:

*Damit der Bogen* $(x_1, x_2)$ *der Extremale* $y = y(x)$ *ein (starkes oder schwaches) Minimum (Maximum) von* (1) *liefere, ist notwendig, daß die in* $x_1$ *verschwindenden Lösungen der* **Jacobi***schen Gleichung*[1] *(abgesehen von der identisch verschwindenden Lösung) keine Nullstelle im Innern des Integrationsintervalles haben* (Jacobi, a. a. O.; strenge Beweise von Weierstraß in seinen Vorlesungen, G. Erdmann, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* **23**, 367 (1878); L. Scheeffer, *Math. Ann.* **25**, 550 (1885); G. A. Bliss, *Am. Bull.* **26**, 356 (1920)).

Sei $x_1'(x_1' > x_1)$ die auf $x_1$ zunächst folgende Nullstelle der in $x_1$ verschwindenden Lösungen von (12) (falls es eine solche Nullstelle gibt); der Punkt unserer Extremale, dessen Abszisse $x_1'$ ist, heißt dann der (auf dieser Extremale) *zu* $x_1$ *konjugierte Punkt.* Dieser Punkt hat folgende geometrische Bedeutung: er ist der erste (rechts von $x_1$ liegende) Punkt, in dem die Einhüllende der durch den Punkt $(x_1, y_1)$ unserer Extremale hindurchgehenden einparametrigen Extremalenschar unsere Extremale berührt.

Sei $y = y(x, \alpha, \beta)$ die zweiparametrige Schar der Extremalen unseres Variationsproblemes; die Extremale $y = y(x)$ werde daraus erhalten für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$. Dann genügen[2]

$$u_1(x) = y_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0); \quad u_2(x) = y_\beta(x, \alpha_0, \beta_0) \tag{16}$$

der **Jacobi**schen Gleichung; und zwar sind diese beiden Lösungen von (12) bei geeigneter Wahl von $\alpha$ und $\beta$ linear unabhängig. Der Ausdruck

$$\begin{aligned} &D(x, x_1) = \\ &y_\beta(x_1, \alpha_0, \beta_0)y_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0) - y_\alpha(x_1, \alpha_0, \beta_0)y_\beta(x, \alpha_0, \beta_0) \end{aligned} \tag{17}$$

ist dann eine im Punkte $x_1$ (aber nicht identisch) verschwindende Lösung von (12), so daß die eben angeführte notwendige Bedingung die Form erhält:

*Damit der Bogen* $(x_1, x_2)$ *der Extremale* $y = y(x)$ *ein (starkes oder schwaches) Minimum (Maximum) von* (1) *liefere, ist notwendig, daß der Ausdruck* (17) *für* $x_1 < x < x_2$ *nicht verschwindet.*

1) Diese Lösungen unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor.

2) Die Suffixe $\alpha$ und $\beta$ bedeuten partielle Differentiationen.

Wir setzen von nun an die Jacobische Bedingung als erfüllt voraus, und zwar in der schärferen Form, daß auch $D(x_2, x_1) \neq 0$ ist. Der Bogen $(x_1, x_2)$ unserer Extremale enthält dann den zu seinem Anfangspunkt $x_1$ konjugierten Punkt nicht.

Sei $y = y(x, a)$ eine einparametrige Schar von Extremalen, und *durch jeden Punkt eines abgeschlossenen Bereiches* $\mathfrak{S}$ *der* $(x, y)$*-Ebene gehe eine und nur eine Extremale dieser Schar hindurch.* Mit $p(x, y)$ werde der Wert, den der Richtungskoeffizient $y_x(x, a)$ der durch den Punkt $(x, y)$ von $\mathfrak{S}$ hindurchgehenden Extremale der Schar in diesem Punkte hat, bezeichnet. Die Funktion $p(x, y)$ wird im Gebiete $\mathfrak{S}$ i. a. regulär analytisch sein. Wir sagen dann: die Extremalenschar $y = y(x, a)$ *bildet im Gebiete* $\mathfrak{S}$ *ein Feld.* Die Funktion $p(x, y)$ heißt die *Gefällsfunktion* dieses Feldes.

*Enthält der Bogen* $(x_1, x_2)$ *der Extremale* $y = y(x)$ *den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht, so gibt es eine Extremalenschar* $y = y(x, a)$, *welche (etwa für* $a = a_0$*) die Extremale* $y = y(x)$ *enthält und in einer geeigneten Nachbarschaft* $\varrho$ *dieses Bogens ein Feld bildet.* Man erhält eine solche Extremalenschar etwa auf folgende Weise: $(x_0, y_0)$ $(x_0 < x_1)$ sei ein genügend nahe an $(x_1, y_1)$ liegender Punkt unserer Extremale, $A$ eine hinlänglich kleine positive Konstante, $y = y(x, a)$ die durch den Punkt $(x_0, y_0)$ hindurchgehende einparametrige Extremalenschar. Die der Ungleichung $|a - a_0| < A$ genügenden Extremalen dieser Schar bilden das gesuchte Feld

Allgemein: Enthält die Extremalenschar $y = y(x, a)$ für $a = a_0$ die Extremale $y = y(x)$ und ist $y_a(x, a_0) \neq 0$ im Intervalle $(x_1, x_2)$, so gibt es zwei positive Zahlen $\varrho$ und $A$, so daß die der Ungleichung $|a - a_0| < A$ genügenden Extremalen der Schar in der Nachbarschaft $\varrho$ des Bogens $(x_1, x_2)$ der Extremale $y = y(x)$ ein Feld bilden

*Damit die regulär analytische Funktion* $p(x, y)$ *Gefällsfunktion eines Feldes von Extremalen sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie der partiellen Differentialgleichung genügt:*

$$(18)\qquad \begin{aligned} f_y(x, y, p) - f_{y'x}(x, y, p) - f_{y'y}(x, y, p)\,p \\ - f_{y'y'}(x, y, p)(p_x + p\,p_y) = 0\,. \end{aligned}$$

(*Beltramische Differentialgleichung*, E. Beltrami, *Rend Lomb.* (2) **1**, 708 (1868); *Opere* **1**, 366).

Da diese Gleichung auch geschrieben werden kann:

$$(18\text{a})\qquad \frac{\partial}{\partial x} f_{y'}(x, y, p(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y, p(x, y)) - p(x, y) f_{y'}(x, y, p(x, y))],$$

folgt daraus unmittelbar: *Ist die Funktion $p(x, y)$ Gefällsfunktion eines Extremalenfeldes, so ist der Ausdruck:*

$$(19)\qquad [f(x, y, p(x, y)) - p(x, y) f_{y'}(x, y, p(x, y))]dx + f_{y'}(x, y, p(x, y))dy$$

*ein vollständiges Differential, und somit das Integral:*

$$(20)\qquad \int [f(x, y, p(x, y)) + (y' - p(x, y)) f_{y'}(x, y, p(x, y))dx$$

*vom Wege unabhängig.* (*Hilbertscher Unabhängigkeitssatz;* D. Hilbert, *Gött. Nachr.* 1900, 291; *C. R. du deuxième congr. intern. des math.*, Paris 1900, 106.)

Wir bezeichnen das Integral (20) als *Feldintegral*, im Gegensatze dazu das Integral (1) als *Grundintegral*. Das Feldintegral, erstreckt von einem beliebigen Punkte $(x_0, y_0)$ des Feldes bis zum variablen Punkt $(x, y)$, liefert eine im ganzen Felde definierte Funktion von $(x, y)$, die wir mit $U(x, y)$ bezeichnen und die in jedem Punkte des Feldes regulär analytisch ist; es ist die Funktion, deren Differential (19) ist. Die Kurvenschar

$$(21)\qquad U(x, y) = \text{const}$$

bezeichnet man als die *Transversalen des Feldes*. Sie genügen der Differentialgleichung 1. Ordnung.

$$(22)\qquad [f(x, y, p(x, y)) - p(x, y) f_{y'}(x, y, p(x, y))]dx + f_{y'}(x, y, p(x, y))dy = 0.$$

Sei $(x, y)$ der Schnittpunkt einer beliebigen Extremalen mit irgendeiner Kurve $C$, sei $y'$ der Richtungskoeffizient der Extremale, $dy : dx$ die Fortschreitungsrichtung auf $C$ im Punkte $(x, y)$. Besteht dann die Gleichung:

$$(23)\qquad [f(x, y, y') - y' f_{y'}(x, y, y')]dx + f_{y'}(x, y, y')dy = 0,$$

so sagt man: *die Kurve $C$ schneidet die Extremale transversal.*

Die Transversalen des Feldes schneiden demnach in jedem ihrer Punkte die durch diesen Punkt hindurchgehende Extremale des Feldes transversal.

Es gelten die Sätze: *Das Feldintegral erstreckt über eine Transversale des Feldes ist Null. Das Feldintegral erstreckt über eine Extremale des Feldes ist gleich dem Grundintegral.*

*Zwei von denselben Transversalen begrenzte Extremalenbögen des Feldes erteilen dem Grundintegrale denselben Wert* (Satz von Kneser, *Lehrb. der Var.* § 15).

Sei $y = y(x)$ der die beiden Punkte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ verbindende Extremalenbogen des Feldes; er erteile dem Integrale (1) den Wert $J$; $y = \bar{y}(x)$ sei eine andere dieselben beiden Punkte verbindende Kurve, die ganz innerhalb des Feldes verbleibt, sie erteile dem Integrale (1) den Wert $\bar{J}$. *Dann ist* (wie aus dem Unabhängigkeitssatze leicht folgt):

$$(24) \qquad \bar{J} - J = \int_{x_1}^{x_2} E(x, \bar{y}(x), p(x, \bar{y}(x)), \bar{y}'(x))\, dx,$$

*wo*

$$(25) \qquad E(x, y, y', \bar{y}') = f(x, y, \bar{y}') - f(x, y, y') - (\bar{y}' - y') f_{y'}(x, y, y')$$

*gesetzt ist.* (*Satz von Weierstraß*; zuerst bewiesen in Vorlesungen 1879)

An die $E$-Funktion knüpft sich die notwendige Bedingung von Weierstraß: *Damit der Bogen* $(x_1, x_2)$ *der Extremale* $y = y(x)$ *ein starkes Minimum (bzw. Maximum) von* (1) *liefere, ist notwendig, daß für* $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *und alle endlichen Werte von* $\bar{y}'$ *die Ungleichung besteht:*

$$(26) \qquad E(x, y(x), y'(x), \bar{y}') > 0 \quad (\text{bzw.} \leqq 0).$$

Vgl. hierzu auch § 4.

Die $E$-Funktion (25) verschwindet stets für $y' = \bar{y}'$; verschwindet sie für keinen anderen Wert von $\bar{y}'$, so sagen wir, sie verschwinde nur *in ordentlicher Weise*.

Es enthalte ein die Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ verbindender regulärer Bogen der Extremale $y = y(x)$ den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht und sei $p(x, y)$ die Gefällsfunktion eines diesen Bogen enthaltenden, seine Nachbar-

schaft $\varrho$ einfach überdeckenden Extremalenfeldes; dann folgt aus (24): *ist für jeden Punkt* $(x, y)$ $(x_1 \leq x \leq x_2)$ *dieser Nachbarschaft und jeden endlichen Wert von* $y'$:

$$(27) \qquad E(x, y, p(x, y), y') \geqq 0 \quad (\text{bzw.} \leqq 0)$$

*und verschwindet die E-Funktion daselbst nur in ordentlicher Weise, so liefert unser Extremalenbogen ein starkes Minimum (bzw. Maximum) von* (1) *gegenüber allen in seiner Nachbarschaft* $\varrho$ *liegenden, die Punkte* $(x_1, y_1)$ *und* $(x_2, y_2)$ *verbindenden Bögen von Vergleichskurven. (Hinreichende Bedingung von Weierstraß.)*

Auch wenn man, was für die Anwendungen bequemer ist, statt der Ungleichung (27) voraussetzt, es sei:

$$(27\text{a}) \qquad E(x, y, y', y') \geqq 0 \qquad (\text{bzw.} \leqq 0)$$

für alle bei hinlänglich kleinem positiven $r$ den Ungleichungen

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \quad |y - y(x)| < r, \quad |y' - y'(x)| < r, \quad y' \neq y'$$

genügenden Wertsysteme $x, y, y', y'$, so liefert der Extremalenbogen ein starkes Minimum (bzw. Maximum). Hingegen braucht, wenn man nur:

$$(27\text{b}) \qquad E(x, y(x), y'(x), y') > 0 \quad (\text{bzw.} < 0)$$

für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ und alle $y' \neq y'(x)$ voraussetzt, ein starkes Extremum nicht stattzufinden (O. Bolza, *Am. Bull.* (2) **9**, 9 (1903)); wohl aber läßt sich dann noch Folgendes behaupten: Zu jedem noch so großen $R$ gehört ein positives $\varrho$, so daß der Extremalenbogen $y = y(x)$ ein Minimum (bzw. Maximum) liefert gegenüber allen in seiner Nachbarschaft $\varrho$ verbleibenden Vergleichskurven $y = y(x)$, für die $|y'(x)| < R$ ist. — Bolza hat auch für den Fall, daß nur (27b), nicht aber (27a) oder (27) erfüllt ist, eine weitere notwendige Bedingung hergeleitet: *Am. Trans.* **7**, 314 (1906); vgl. hierüber auch H. Hahn, *Monatsh.* **20**, 279 (1909); A. Rosenblatt, *Arch. Math. Phys.* (3) **15**, 284 (1909); *Math. Ann.* **68**, 552 (1909). Hierher gehören auch die Untersuchungen von A. Hammerstein, *Math. Ann.* **87**, 229 (1922).

Seien die oben angeführten hinreichenden Bedingungen erfüllt; bezeichnen wir mit $J$ den Wert, den der Extremalenbogen dem Integrale erteilt, mit $J$ den Wert, den ein ganz in der

(hinlänglich kleinen) Umgebung $\varrho$ des Extremalenbogens verbleibender, dieselben Endpunkte verbindender Vergleichskurvenbogen dem Integrale erteilt, so gilt also: $\bar{J} - J > 0$. Dieses Resultat wird verschärft durch den *Satz von Osgood* (*Am. Trans.* **2**, 273 (1901); vgl. auch H. Hahn, *Monatsh.* **17**, 63 (1906)). *Zu jedem positiven $\varrho' < \varrho$ gibt es ein positives $\sigma$, so daß für jeden (dieselben Endpunkte verbindenden) Vergleichskurvenbogen, der ganz in der Nachbarschaft $\varrho$, aber nicht ganz in der Nachbarschaft $\varrho'$ des Extremalenbogens verbleibt, die Ungleichung gilt: $\bar{J} - J > \sigma$.*

Es gilt die Formel:

$$(28)\qquad E(x, y, y', \bar{y}') = \frac{(\bar{y}' - y')^2}{2} f_{y'y'}(x, y, y' + \vartheta(\bar{y}' - y'))\ 0 < \vartheta < 1;$$

die Ungleichungen (26) und (27) (oder (27a)) sind daher sicher erfüllt und die $E$-Funktion verschwindet nur in ordentlicher Weise in allen Punkten $(x, y)$ wo *für alle* $\bar{y}'$:

$$(29)\qquad f_{y'y'}(x, y, \bar{y}') > 0 \ (\text{bzw.} < 0)$$

Aus (28) zusammen mit (24) folgt: *Ein Extremalenbogen, der den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht enthält und auf dem die Legendresche Bedingung in der Form* (15) *erfüllt ist, liefert stets wenigstens ein schwaches Minimum (bzw. Maximum) von* (1) (Dieses Resultat kann auch aus der Theorie der zweiten Variation abgeleitet werden.)

Über Extremalenbögen, die den zum Anfangspunkt konjugierten Punkt zwar nicht im Innern, wohl aber als Endpunkt enthalten und über die die obigen Sätze nichts aussagen (solche Bogen liefern im allgemeinen kein Minimum oder Maximum), vgl A. Kneser, *Math. Ann* **50**, 27 (1898); W. F. Osgood, *Am Trans.* **2**, 166 (1901); J. W. Lindeberg, *Math. Ann.* **59**, 321 (1904); H. Hahn, *Wien Ber* **118**, 99 (1909); L. Lichtenstein, *Gött. Nachr* 1919, 161.

## § 2. Das einfachste Problem in Parameterdarstellung.

In § 1 wurden nur Kurven in Betracht gezogen, die sich in der Form $y = y(x)$ darstellen lassen. Will man auch Kurven in Betracht ziehen, deren Ordinate nicht eindeutige Funktion der Abszisse ist, so betrachtet man die Kurven in Parameterdarstellung: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Wir werden nur von Kurven

sprechen, deren Koordinaten sich als eindeutige, zweimal stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters darstellen lassen, auf denen niemals $x'(t)$ und $y'(t)$ gleichzeitig verschwinden und die keine mehrfachen Punkte besitzen. Bedeutet $(x_1, y_1)$ den Anfangspunkt, $(x_2, y_2)$ den Endpunkt eines solchen Kurvenbogens, so werden wir für $t$ nur solche Parameter zulassen, die fortwährend *wachsen*, wenn der Punkt $(x, y)$ den Kurvenbogen vom Anfangs- zum Endpunkt durchläuft. An Stelle des Integrales (1) tritt ein Integral der Form:

$$\int F(x, y;\; x', y')\, dt, \tag{30}$$

wo:

$$f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) \cdot x' = F(x, y;\; x', y')$$

gesetzt ist.[1] In dieser Form wurde das Problem zuerst von Weierstraß in seinen Vorlesungen behandelt. Wir setzen im folgenden voraus, $F$ sei regulär analytisch für alle Punkte $(x, y)$ eines Bereiches $\mathfrak{R}$, und alle Wertepaare $(x', y')$, außer etwa für $x' = y' = 0$.

Damit der Wert, den ein Kurvenbogen dem Integrale (30) erteilt, unabhängig sei von der Wahl des zur Darstellung dieses Kurvenbogens verwendeten Parameters $t$, ist notwendig und hinreichend, daß die Funktion $F(x, y;\; x', y')$ *positiv-homogen* von 1. Ordnung sei in den Veränderlichen $x', y'$, d. h daß für alle positiven Werte von $k$ die Gleichung besteht:

$$F(x, y;\; kx', ky') = kF(x, y;\; x', y'). \tag{31}$$

Wir setzen im folgenden stets voraus, $F$ genüge dieser Bedingung

Aus (31) folgen (für $k > 0$) die Identitäten:

$$\begin{aligned} F_{x'}(x, y;\; kx', ky') &= F_{x'}(x, y;\; x', y') \\ F_{y'}(x, y, kx', ky') &= F_{y'}(x, y;\; x', y'), \end{aligned} \tag{32}$$

$$x'F_{x'}(x, y;\; x', y') + y'F_{y'}(x, y;\; x', y') = F(x, y, x', y'), \tag{33}$$

$$\begin{aligned} F_{x'x'}(x, y;\; x', y') : F_{x'y'}(x, y;\; x', y') : F_{y'y'}(x, y;\; x', y') \\ = y'^2 : -x'y' : x'^2. \end{aligned} \tag{34}$$

1) Man beachte, daß hier $y'$ eine andere Bedeutung hat, als in § 1, wo $y' = \frac{dy}{dx}$ war, während hier $y' = \frac{dy}{dt}$ gesetzt ist.

Aus (34) folgt die Existenz einer (außer etwa für $x' = y' = 0$) regulären Funktion $F_1(x, y; x', y')$, die den Gleichungen genügt:

$$F_{x'x'} = y'^2 F_1, \quad F_{x'y'} = -x'y'F_1, \quad F_{y'y'} = x'^2 F_1. \tag{35}$$

Die Definition der Begriffe Minimum (Maximum) ist ganz analog der in § 1 gegebenen; nur daß hier alle in der Form $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ darstellbaren Kurven zum Vergleiche herangezogen werden. Bei der Definition des schwachen Extremums ist dabei zu beachten, daß die *positiv gerichteten* (d. h. im Sinne wachsenden Parameters $t$ gezogenen) Tangenten in Betracht zu ziehen sind.

Auf der Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ entspreche dem Anfangspunkt $(x_1, y_1)$ der Parameterwert $t_1$, dem Endpunkt $(x_2, y_2)$ der Parameterwert $t_2$. Benützt man statt der Schar (2), die Schar

$$x = x(t) + \varepsilon\xi(t), \quad y = y(t) + \varepsilon\eta(t), \tag{36}$$

wo

$$\xi(t_1) = \xi(t_2) = \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0,$$

und definiert $\delta J$, $\delta^2 J$ usw. wieder durch (3), so erhält man ebenso wie in § 1: für das Eintreten eines Minimums (bzw. Maximums) ist notwendig:

$$\delta J = 0, \quad \delta^2 J \geqq 0 \quad (\text{bzw} \leqq 0),$$

wobei:

$$\begin{aligned}\delta J = \int_{t_1}^{t_2} [&F_x(x, y; x', y')\xi + F_y(x, y; x', y')\xi' \\ &+ F_{x'}(x, y; x', y')\xi' + F_{y'}(x, y; x', y')\eta']\,dt.\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\delta^2 J = \int_{t_1}^{t_2} [&F_{xx}\xi^2 + 2F_{xy}\xi\eta + F_{yy}\eta^2 \\ &+ 2F_{xx'}\xi\xi' + 2F_{yy'}\eta\eta' + 2F_{xy'}\xi\eta' + 2F_{yx'}\xi'\eta \\ &+ F_{x'x'}\xi'^2 + 2F_{x'y'}\xi'\eta' + F_{y'y'}\eta'^2]\,dt.\end{aligned} \tag{38}$$

Aus $\delta J = 0$ leitet man ab: *Damit die Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ ein (starkes oder schwaches) Minimum (Maximum) von (30) liefere, ist notwendig, daß sie den beiden Gleichungen genügt:*

$$\begin{cases} F_x(x(t), y(t); x'(t), y'(t)) - \dfrac{d}{dt} F_{x'}(x(t), y(t); x'(t), y'(t)) = 0 \\ F_y(x(t), y(t); x'(t), y'(t)) - \dfrac{d}{dt} F_{y'}(x(t), y(t); x'(t), y'(t)) = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Eine diesen beiden Gleichungen genügende Kurve wird wieder als *Extremale* bezeichnet. Diese beiden Gleichungen sind nicht voneinander unabhängig: es besteht die Relation:

$$(40)\qquad x'\left(F_x - \frac{d}{dt}F_{x'}\right) + y'\left(F_y - \frac{d}{dt}F_{y'}\right) = 0 .$$

Setzt man:

$$(41)\qquad T(x, y;\, x', y';\, x'', y'') = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y'),$$

so ist:

$$(42)\qquad F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = y'T;\quad F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = -x'T .$$

Sei $x = x(t)$, $y = y(t)$ eine Extremale; in den folgenden Formeln ist durchweg für $x, x', x''; y, y', y''$ eingesetzt zu denken: $x(t), x'(t), x''(t); y(t), y'(t), y''(t)$. Wir setzen:

$$(43)\qquad \begin{cases} L = F_{xx'} - y'y''F_1;\quad N = F_{yy'} - x'x''F_1, \\ M = F_{xy'} + x'y''F_1 = F_{yx'} + y'x''F_1 . \end{cases}$$

$$(44)\qquad \begin{gathered} L_1 = F_{xx} - y''^2 F_1 - \frac{dL}{dt};\quad M_1 = F_{xy} + x''y''F_1 - \frac{dM}{dt}; \\ N_1 = F_{yy} - x''^2 F_1 - \frac{dN}{dt} . \end{gathered}$$

Dann ist:

$$(45)\qquad L_1 : M_1 : N_1 = y'^2 : -x'y' : x'^2$$

und man kann setzen:

$$(46)\qquad L_1 = y'^2 F_2,\ M_1 = -x'y'F_2,\ N_1 = x'^2 F_2,$$

wo $F_2$ eine in jedem Punkte unseres Extremalenbogens reguläre Funktion von $t$ bedeutet.

Setzt man weiter:

$$w = y'\xi - x'\eta,$$

so tritt an Stelle von (10):

$$(47)\qquad \delta^2 J = \int_{t_1}^{t_2}\left(F_2 w - \frac{dF_1}{dt}w' - F_1 w''\right) w\, dt$$

und an Stelle der Jacobischen Gleichung:

$$F_2 u - \frac{d F_1}{d t} u' - F_1 u'' = 0 . \tag{48}$$

Die angegebene Transformation der zweiten Variation stammt von Weierstraß. Vgl. auch A. Dresden, *Ann. of Math.* (2) **15**, 78 (1913).

Ist das Intervall $(\tau_1, \tau_2)$ $(t_1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq t_2)$ so klein gewählt, daß es eine Lösung $u(t)$ von (48) gibt, die darin nirgends verschwindet, sind ferner $\xi$, $\eta$ so gewählt, daß $w = 0$ außerhalb $(\tau_1, \tau_2)$, so ist:

$$\delta^2 J = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_1 \left(\frac{u w' - u' w}{u}\right)^2 dt . \tag{49}$$

Als Analogon der Legendreschen Bedingung erhält man daraus: *Damit der Bogen* $(t_1, t_2)$ *der Extremale* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *ein (starkes oder schwaches) Minimum (bzw. Maximum) von* (30) *liefere, ist notwendig, daß für* $t_1 \leqq t \leqq t_2$ *die Ungleichung besteht:*

$$F_1(x(t), y(t); x'(t), y'(t)) \geqq 0 \quad (\text{bzw.} \leqq 0) . \tag{50}$$

Wir setzen diese Bedingung als in der schärferen Form erfüllt voraus:

$$F_1(x(t), y(t); x'(t), y'(t)) > 0 \quad (\text{bzw} < 0). \tag{51}$$

Ein Extremalenbogen, auf dem (51) gilt, heißt *regulär*. Wir sprechen im folgenden nur von regulären Extremalenbögen. Für sie gilt die *Jacobische Bedingung*:

*Damit der Bogen* $(t_1, t_2)$ *der Extremale* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *ein (starkes oder schwaches) Minimum (Maximum) von* (30) *liefere, ist notwendig, daß die in* $t_1$ *verschwindenden Lösungen von* (48) *(abgesehen von der identisch verschwindenden) im Innern des Intervalles* $(t_1, t_2)$ *keine zweite Nullstelle besitzen.* Die Definition der konjugierten Punkte lautet analog wie in § 1.

Ist $x = x(t, \alpha, \beta)$, $y = y(t, \alpha, \beta)$ die zweiparametrige Extremalenschar unseres Problemes, aus der die Extremale $x = x(t)$, $y = y(t)$ für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ erhalten werde, so sind die beiden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t) &= \begin{vmatrix} x_t(t, \alpha_0, \beta_0) & y_t(t, \alpha_0, \beta_0) \\ x_\alpha(t, \alpha_0, \beta_0) & y_\alpha(t, \alpha_0, \beta_0) \end{vmatrix}, \\ \vartheta_2(t) &= \begin{vmatrix} x_t(t, \alpha_0, \beta_0) & y_t(t, \alpha_0, \beta_0) \\ x_\beta(t, \alpha_0, \beta_0) & y_\beta(t, \alpha_0, \beta_0) \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{52}$$

zwei bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten $\alpha$, $\beta$ linear unabhängige Lösungen von (48). Die obige Bedingung kann daher, wenn noch:

$$\vartheta_2(t_1)\vartheta_1(t) - \vartheta_1(t_1)\vartheta_2(t) = \Theta(t, t_1) \tag{53}$$

gesetzt wird, in der Form ausgesprochen werden:

*Damit der Bogen $(t_1, t_2)$ unserer Extremale ein Minimum (Maximum) von* (30) *liefere, ist notwendig, daß für $t_1 < t < t_2$ die Ungleichung besteht:*

$$\Theta(t, t_1) \neq 0. \tag{54}$$

Wir setzen im folgenden diese Ungleichung auch noch für $t = t_2$ als erfüllt voraus.

Die Definition eines *Feldes von Extremalen* bleibt die gleiche wie in § 1, nur daß an Stelle der einen Gefällsfunktion zwei Richtungsfunktionen treten: $p(x, y)$, $q(x, y)$, deren erste den Kosinus, deren zweite den Sinus des Winkels bedeutet, den die durch den Punkt $(x, y)$ des Feldes gehende Extremale (positiv gerechnet im Sinne wachsender Werte des Parameters $t$) mit der positiven $x$-Achse einschließt. Auch hier läßt sich jeder Extremalenbogen, der den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht enthält, mit einem Felde umgeben.

Ist $x = x(t, a)$, $y = y(t, a)$ eine einparametrige Extremalenschar, die für $a = a_0$ die Extremale $x = x(t)$, $y = y(t)$ enthält, und besteht die Ungleichung

$$y_t(t, a_0)x_a(t, a_0) - x_t(t, a_0)y_a(t, a_0) \neq 0, \tag{55}$$

im ganzen Intervalle $(t_1, t_2)$, so bilden die der Ungleichung $|a - a_0| \leq A$ genügenden Extremalen der Schar in der Nachbarschaft $\varrho$ des Bogens $(t_1, t_2)$ unserer Extremale ein Feld, wenn $A$ und $\varrho$ genügend klein sind.

Der Unabhängigkeitssatz lautet hier: *Sind $p(x, y)$, $q(x, y)$ die Richtungsfunktionen eines Feldes, so ist innerhalb dieses Feldes das Integral:*

$$\begin{aligned}\int [&F_{x'}(x, y; p(x, y), q(x, y))x' \\ &+ F_{y'}(x, y; p(x, y), q(x, y))y']dt\end{aligned} \tag{56}$$

*vom Wege unabhängig.* Die Differentialgleichung der *Transversalen des Feldes* lautet:

$$(57)\qquad \begin{aligned} &F_{x'}(x,\, y;\, p(x,\, y),\; q(x,\, y))\,dx \\ &+ F_{y'}(x,\, y;\, p(x,\, y),\; q(x,\, y))\,dy = 0\,. \end{aligned}$$

Die Bedingung des transversalen Schneidens einer Extremale und einer Kurve $C$ im Punkte $(x, y)$ lautet hier:

$$(58)\qquad F_{x'}(x,\, y;\; x',\, y')\,dx + F_{y'}(x,\, y;\; x',\, y')\,dy = 0\,,$$

wo $y' : x'$, die Fortschreitungsrichtung auf der Extremalen, $dy : dx$ die auf $C$ bedeutet.

Sei $J$ der Wert, den der die beiden Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ verbindende Extremalenbogen des Feldes dem Integrale (30) erteilt; $x = \bar{x}(\tau)$, $y = \bar{y}(\tau)$ sei eine Vergleichskurve, deren Bogen $(\tau_1, \tau_2)$ dieselben beiden Punkte verbindet und gleichfalls ganz innerhalb des Feldes verbleibt; dieser Bogen erteile dem Integrale (30) den *Wert* $\bar{J}$. Dann ist:

$$\bar{J} - J =$$

$$(59)\quad \int_{\tau_1}^{\tau_2} E\big(\bar{x}(\tau),\; \bar{y}(\tau);\; p(\bar{x}(\tau),\, \bar{y}(\tau)),\; q(\bar{x}(\tau),\, \bar{y}(\tau));\;\; \bar{x}'(\tau),\, \bar{y}'(\tau)\big)\, d\tau\,,$$

wo:

$$(60)\qquad \begin{aligned} &E(x, y;\, x', y';\, \bar{x}', \bar{y}') = \\ &F(x, y;\, \bar{x}', \bar{y}') - F_{x'}(x, y;\, x', y')\,\bar{x}' - F_{y'}(x, y;\, x', y')\,\bar{y}' \\ &= \bar{x}'\,(F_{x'}(x,\, y;\; \bar{x}',\, \bar{y}') - F_{x'}(x,\, y;\; x',\, y')) \\ &+ \bar{y}'\,(F_{y'}(x,\, y;\; \bar{x}',\, \bar{y}') - F_{y'}(x,\, y;\; x',\, y'))\,. \end{aligned}$$

Ist $k > 0$, $\bar{k} > 0$, so ist:

$$(61)\qquad E(x,\, y;\; kx',\, ky';\; \bar{k}\bar{x}',\, \bar{k}\bar{y}') = \bar{k}E(x,\, y;\; x',\, y';\; \bar{x}',\, \bar{y}')$$

Die $E$-Funktion verschwindet wegen (33) für $\bar{x}' = kx'$, $\bar{y}' = ky'$ $(k > 0)$. Verschwindet sie für keine anderen Wertepaare $(\bar{x}', \bar{y}')$ (abgesehen etwa vom Wertepaare $(0, 0)$), so sagt man, sie verschwindet nur *in ordentlicher Weise*

*Damit der Bogen* $(t_1, t_2)$ *der Extremale* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *ein starkes Minimum (bzw. Maximum) von* (33) *liefere, ist notwendig, daß im Intervalle* $(t_1, t_2)$ *für alle Wertepaare* $(\bar{x}', \bar{y}')$ *(abgesehen etwa vom Wertepaare* $(0, 0)$*) die Ungleichung besteht:*

$$(62)\qquad E(x(t),\, y(t);\; x'(t),\, y'(t);\; \bar{x}',\, \bar{y}') \geqq 0 \;\; (\text{bzw.} \leqq 0).$$

**Daraus folgt: Ist $F(x, y; x', y')$ eine rationale Funktion von $x'$ und $y'$, so tritt niemals ein Minimum (Maximum) ein.**

*Verschwindet die $E$-Funktion (62) nur in ordentlicher Weise und enthält der genannte Extremalenbogen den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht, so liefert er ein starkes Minimum (bzw. Maximum).*

Auch hier gilt der Satz von Osgood; vgl. außer der in § 1 genannten Literatur: H. Hahn, *Monatsh.* **24**, 27 (1913).

Es gilt, wenn $\vartheta$ und $\tilde{\vartheta}$ so gewählt sind, daß

$$-\pi < \tilde{\vartheta} - \vartheta \leqq \pi$$

ist, die Formel:

$$(63)\quad \begin{aligned} &E(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta; \cos\tilde{\vartheta}, \sin\tilde{\vartheta}) \\ &= (1 - \cos(\tilde{\vartheta} - \vartheta))F_1(x, y; \cos\vartheta^*, \sin\vartheta^*), \end{aligned}$$

wo $\vartheta^*$ zwischen $\vartheta$ und $\tilde{\vartheta}$ liegt. Aus (61) und (63) folgt, daß wenn für alle $(x', y')$ (abgesehen etwa vom Wertepaare (0, 0)) der Ausdruck:

$$(64)\qquad F_1(x, y; x', y')$$

von Null verschieden ist, die $E$-Funktion das Zeichen von (64) hat und nur in ordentlicher Weise verschwindet. Man vgl. die geometrische Deutung dieses Satzes an der von G. Hamel, (*Gött. Diss.* 1901, 52) eingeführten *Indikatrix* C. Carathéodory, *Math. Ann.* **62**, 456 (1906). Über die Indikatrix s. auch W. Blaschke, *Arch. Math. Phys.* (3) **20**, 28 (1913).

*Enthält der Bogen $(t_1, t_2)$ der Extremale $x = x(t)$, $y = y(t)$ den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht und gilt im Intervalle $(t_1, t_2)$ die Ungleichung (51), so liefert dieser Bogen wenigstens ein schwaches Minimum (bzw. Maximum) von (30).*

## § 3. Variable Endpunkte. Geschlossene Kurven. Diskontinuierliche Lösungen.

Wir kehren zurück zu dem in § 1 betrachteten Integrale: $\int f(x, y, y')\,dx$. Wie dort bilden wir die Schar der Kurven (2), doch verlangen wir nicht mehr, daß sie alle durch die Punkte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ hindurchgehen. Auf jeder Kurve dieser Schar denken wir uns einen Bogen gegeben, dessen Anfangs- und Endpunkt

die Abszisse $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ haben mögen. Die Ordinaten dieser beiden Punkte sind dann gegeben durch:

$$y_1(\varepsilon) = y(x_1(\varepsilon)) + \varepsilon\eta(x_1(\varepsilon)); \quad y_2(\varepsilon) = y(x_2(\varepsilon)) + \varepsilon\eta(x_2(\varepsilon)).$$

Durch

$$x = x_1(\varepsilon),\ y = y_1(\varepsilon); \quad x = x_2(\varepsilon),\ y = y_2(\varepsilon)$$

sind dann zwei Kurven gegeben: die Kurve der Anfangspunkte und die Kurve der Endpunkte. Wir setzen noch:

$$x_1'(0) = \delta x_1,\ y_1'(0) = \delta y_1; \quad x_2'(0) = \delta x_2,\ y_2'(0) = \delta y_2.$$

Bezeichnen wir auch hier mit $J(\varepsilon)$ den Wert, den der Bogen $x_1(\varepsilon) \leqq x \leqq x_2(\varepsilon)$ der Kurve $y = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ dem Integrale (1) erteilt und definieren die erste Variation wieder durch (3), so erhalten wir an Stelle von (6) (wenn mit $x_1, y_1, y_1'$ und $x_2, y_2, y_2'$ kurz die Linienelemente im Anfangs- und Endpunkte des betrachteten Bogens von $y = y(x)$ bezeichnet werden):

$$\begin{aligned}\delta J = {} & (f(x_2, y_2, y_2') - y_2' f_{y'}(x_2, y_2, y_2'))\delta x_2 + f_{y'}(x_2, y_2, y_2')\delta y_2 \\ & - (f(x_1, y_1, y_1') - y_1' f_{y'}(x_1, y_1, y_1'))\delta x_1 - f_{y'}(x_1, y_1, y_1')\delta y_1 \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \Big(f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x))\Big)\eta(x)\,dx.\end{aligned} \tag{65}$$

Handelt es sich um ein Integral in Parameterdarstellung (§ 2), so findet man an Stelle von (37) bei analoger Bezeichnungsweise:

$$\begin{aligned}\delta J = {} & F_{x'}(x_2, y_2; x_2', y_2')\delta x_2 + F_{y'}(x_2, y_2; x_2', y_2')\delta y_2 \\ & - F_{x'}(x_1, y_1; x_1', y_1')\delta x_1 - F_{y'}(x_1, y_1; x_1', y_1')\delta y_1 \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \Big[\Big(F_x - \frac{d}{dt} F_{x'}\Big)\xi + \Big(F_y - \frac{d}{dt} F_{y'}\Big)\eta\Big]\,dt.\end{aligned} \tag{66}$$

Wir behandeln nun das Problem: Unter allen eine gegebene Kurve $C_1$ mit einem gegebenen Punkte $(x_2, y_2)$ verbindenden Kurvenbögen diejenigen aufzufinden, welche ein Integral der Form (1) oder (30) zu einem Minimum (Maximum) machen.[1])

---

1) Ein ganz analog zu behandelndes Problem entsteht, wenn der Anfangspunkt $(x_1, y_1)$ fest gegeben und der Endpunkt auf einer Kurve $C_2$ variabel ist.

Aus der auch hier notwendigen Bedingung $\delta J = 0$ ergibt sich: *Ein dieses Problem lösender Kurvenbogen muß ein Extremalenbogen sein, der in seinem Anfangspunkte von der Kurve $C_1$ transversal geschnitten wird* (vgl. Gleichung (23) und (58)).

Die notwendigen Bedingungen von Legendre und Weierstraß gelten hier ebenso wie in §§ 1, 2. Hingegen tritt[1]) in der notwendigen Bedingung von Jacobi an Stelle des zum Anfangspunkt konjugierten Punktes der (rechtsseitige) *Brennpunkt* der Kurve $C_1$, d. i. der erste auf der betrachteten Extremale dem Anfangspunkte folgende Punkt, in dem die Einhüllende der von $C_1$ transversal geschnittenen Extremalenschar unsere Extremale berührt. Dieser Brennpunkt liegt zwischen dem Anfangspunkt und dem zu ihm konjugierten Punkte unseres Extremalenbogens (wenn ein solcher vorhanden ist), und wandert stetig vom Anfangspunkt bis zum konjugierten Punkt (oder umgekehrt), wenn die Krümmung von $C_1$ im Anfangspunkte unseres Extremalenbogens stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert. Näheres hierüber G. A. Bliss, *Am. Trans.* **3**, 132 (1902); A. Dresden, *Am. Trans.* **9**, 474 (1908).

Ein von $C_1$ transversal geschnittener Extremalenbogen, der den Brennpunkt von $C_1$ nicht enthält, kann mit einem Felde umgeben werden, dessen Extremalen sämtlich von $C_1$ transversal geschnitten werden. Daraus folgt, *daß ein solcher Extremalenbogen, wenn die hinreichende Bedingung von Weierstraß* (§§ 1, 2) *erfüllt ist, ein starkes, wenn die Legendresche Bedingung in der schärferen Form* (29) *bzw.* (51) *erfüllt ist, wenigstens ein schwaches Minimum (Maximum) unseres Variationsproblemes liefert.*

Nunmehr behandeln wir das Problem: Unter allen eine gegebene Kurve $C_1$ mit einer gegebenen Kurve $C_2$ verbindenden Kurvenbögen diejenigen aufzufinden, welche ein Integral der Form (1) oder (30) zu einem Minimum (Maximum) machen.

*Ein dieses Problem lösender Kurvenbogen muß ein Extremalenbogen sein, der in seinem Anfangspunkte von der Kurve $C_1$, in seinem Endpunkte von der Kurve $C_2$ transversal geschnitten wird.*

Die notwendige Bedingung von Jacobi verlangt hier, daß der betrachtete Extremalenbogen weder den rechtsseitigen Brennpunkt von $C_1$, noch den linksseitigen[2]) von $C_2$ im Innern ent-

1) Im folgenden ist von gewissen Ausnahmefällen, insbesondere dem Falle, daß die Transversalität in Berührung ausartet, abzusehen.

2) D. i. der erste auf der Extremale dem Endpunkte vorhergehende Punkt, in dem die Einhüllende der von $C_2$ transversal geschnittenen Extremalenschar unsere Extremale berührt.

halten darf. Dazu kommt hier noch die notwendige Bedingung von Bliss (*Math. Ann.* **58**, 70 (1904)): *Der rechtsseitige Brennpunkt von $C_1$ darf nicht zwischen dem Endpunkte unseres Extremalenbogens und dem rechtsseitigen Brennpunkte von $C_2$ liegen.* (Vgl. hierzu auch A. Dresden, *Am. Trans.* **9**, 477 (1908); W. Weinreich, *Math. Ann.* **76**, 376 (1915)).

Für Integrale in Parameterdarstellung kann auch folgendes Problem gestellt werden: *Unter allen geschlossenen Kurven* diejenigen zu finden, die das Integral (30) zu einem Minimum (Maximum) machen. Eine solche Kurve muß eine geschlossene Extremale sein, auf der die notwendigen Bedingungen von Legendre und Weierstraß erfüllt sind. Eine solche geschlossene Extremale ist in der Form darstellbar $x = x(t)$, $y = y(t)$, wo $x(t)$, $y(t)$ fur alle $t$ definierte, *periodische* Funktionen bedeuten. Die notwendige Bedingung von Jacobi verlangt hier, daß es, wenn $t_0$ einen beliebigen Punkt der geschlossenen Extremale bedeutet, *überhaupt keinen zu $t_0$ konjugierten Punkt gebe* (H Poincaré, *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* **3**, 283). Verschwindet obendrein die $E$-Funktion nur in ordentlicher Weise, so liefert die geschlossene Extremale wirklich ein Minimum (Maximum). Näheres hierüber bei Hadamard, *Leç. s. l. cal. d var.* **1**, 432. (Vgl. auch J. Radon, *Hamb. Abh.* **1**, 195 (1922)).

Es war in § 1 nur von solchen Lösungen des dort behandelten Variationsproblems die Rede, die die Form $y = y(x)$ haben, wo $y(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist Bei manchen Problemen treten als Lösungen aber auch Kurvenbögen auf, die sich aus einer endlichen Anzahl von Bögen der genannten Art so zusammensetzen, daß in den Punkten, wo zwei solche Bögen zusammenstoßen, zwar die Ordinate $y$ stetig bleibt, ihre erste Ableitung $y'$ aber Sprünge erleidet. Geometrisch gesprochen sind dies Kurven mit einer endlichen Anzahl von Ecken (Knickpunkten); sie werden als *diskontinuierliche Lösungen* bezeichnet

Es ist klar, daß jedes Stück einer solchen diskontinuierlichen Lösung, das keinen Knickpunkt enthält, ein Extremalenbogen sein muß. Das Verhalten in den Knickpunkten ist gegeben durch folgenden Satz (Erdmannsche Eckenbedingung, *J f. Math.* **82**, 21 (1877)):

*Damit die gebrochene Kurve $y = y(x)$ eine diskontinuierliche Lösung unseres Variationsproblemes sei, ist notwendig, daß für ihre beiden im Knickpunkte $(x_0, y_0)$ zusammenstoßenden Linienelemente $(x_0, y_0, \overset{-}{y}_0')$ und $(x_0, y_0, \overset{+}{y}_0')$ die Gleichungen bestehen:*

$$
(67)\qquad
\begin{aligned}
&f(x_0, y_0, \overset{-}{y}_0{}') - \overset{-}{y}_0{}' f_{y'}(x_0, y_0, \overset{-}{y}_0{}') \\
&= f(x_0, y_0, \overset{+}{y}_0{}') - \overset{+}{y}_0{}' f_{y'}(x_0, y_0, \overset{+}{y}_0{}') \\
&f_{y'}(x_0, y_0, \overset{-}{y}_0{}') = f_{y'}(x_0, y_0, \overset{+}{y}_0{}') .
\end{aligned}
$$

Dies läßt sich auch kurz so aussprechen: es müssen entlang der Kurve $y = y(x)$ die Ausdrücke $f(x, y, y') - y' f_{y'}(x, y, y')$ und $f_{y'}(x, y, y')$ stetig bleiben.

Bei dem in § 2 behandelten Problem in Parameterdarstellung treten an Stelle von (67) die Eckenbedingungen:

$$
(68)\qquad
\begin{aligned}
F_{x'}(x_0, y_0, \overset{-}{x}_0{}', \overset{-}{y}_0{}') &= F_{x'}(x_0, y_0, \overset{+}{x}_0{}', \overset{+}{y}_0{}') \\
F_{y'}(x_0, y_0, \overset{-}{x}_0{}', \overset{-}{y}_0{}') &= F_{y'}(x_0, y_0, \overset{+}{x}_0{}', \overset{+}{y}_0{}') .
\end{aligned}
$$

Diskontinuierliche Lösungen wurden zuerst behandelt von J. Todhunter, *Researches in the calculus of variations*, London 1871. Eine eingehende Theorie gab C. Carathéodory, *Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung*, Gött. *Diss.* 1904; *Math. Ann.* **62**, 449 (1906); *Ann. di mat.* (3) **21**, 1 (1913). Im übrigen sei auf die Lehrbücher verwiesen.

## § 4. Existenzsätze.

Durch $y = y(x)$ $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ ist ein Kurvenbogen definiert; die Funktion $y(x)$ möge stetig sein und eine stetige Ableitung $y'(x)$ besitzen. Jeder solche Kurvenbogen $C$ erteilt dem Integrale $\int f(x, y, y')\,dx$ einen bestimmten Wert $I(C)$; dieser Wert ist eine *Funktion des Kurvenbogens* $C$.

In analogem Sinne ist auch ein Integral in Parameterdarstellung $\int F(x, y, x', y')\,dt$ Funktion eines Kurvenbogens $C$; hier ziehen wir für $C$ alle Kurvenbogen in Betracht, die darstellbar sind in der Form $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, wo $x(t)$, $y(t)$ stetige, mit stetigen, nicht gleichzeitig verschwindenden ersten Ableitungen $x'(t)$, $y'(t)$ versehene Funktionen bedeuten.

Wir nennen die Funktion $I(C)$ des Kurvenbogens $C$ *unterhalb stetig*[1]) *auf dem Kurvenbogen* $C_0$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ gibt, so daß für jeden in der Umgebung $\varrho$ von $C_0$ verbleibenden Kurvenbogen $C$, dessen Anfangs- und Endpunkt

1) Bei Definition des Begriffes „oberhalb stetig" ist Ungleichung (69) zu ersetzen durch: $I(C) < I(C_0) + \varepsilon$.

in der Umgebung $\varrho$ des Anfangs- bzw. Endpunktes von $C_0$ liegen, die Ungleichung besteht

$$I(C) > I(C_0) - \varepsilon. \tag{69}$$

Ist die Funktion $I(C)$ unterhalb stetig auf allen Kurvenbögen eines Gebietes, so heißt sie *unterhalb stetig in diesem Gebiete.*

Das Integral $\int f(x, y, y')\,dx$ heißt *positiv-regulär*[1]) *im Punkte* $(x_0, y_0)$, wenn für alle $y'$:

$$f_{y'y'}(x_0, y_0, y') > 0$$

ist; es heißt *positiv-quasiregulär* in $(x_0, y_0)$, wenn für alle $y'$:

$$f_{y'y'}(x_0, y_0, y') \geqq 0$$

ist. Das Integral $\int F(x, y, x', y')\,dt$ heißt positiv-regulär im Punkte $(x_0, y_0)$, wenn für alle $\vartheta$ (s. Formel (35)):

$$F_1(x_0, y_0, \cos\vartheta, \sin\vartheta) > 0,$$

und analog ist die Definition des Begriffes „positiv-quasiregulär".

Ein Integral, das positiv-regulär (quasiregulär) in allen Punkten eines Gebietes ist, heißt positiv-regulär (quasiregulär) in diesem Gebiete.

Das Integral $\int f(x, y, y')\,dt$ heißt *positiv-definit*, wenn für alle Linienelemente: $f(x, y, y') > 0$, es heißt *positiv-semidefinit*, wenn für alle Linienelemente: $f(x, y, y') \geqq 0$. Analog sind die Definitionen dieser Begriffe für ein Integral $\int F(x, y, x', y')\,dt$

*Damit ein Integral $\int f(x, y, y')\,dx$ in einem Gebiete eine unterhalb-stetige (oberhalb-stetige) Funktion des Kurvenbogens $C$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in diesem Gebiete positiv-(negativ-)quasiregulär sei*

*Damit ein Integral $\int F(x, y, x', y')\,dt$ in einem Gebiete eine unterhalb-stetige (oberhalb-stetige) Funktion des Kurvenbogens $C$ sei, ist notwendig, daß es in diesem Gebiete positiv-(negativ-)quasiregulär sei; diese Bedingung ist hinreichend, wenn das Integral positiv-(negativ-)semidefinit ist, oder auch wenn in keinem Punkte $F_1(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta)$ für alle $\vartheta$ verschwindet.*

---

1) Bei Definition der Begriffe negativ-regulär, negativ-quasiregulär tritt in den folgenden Ungleichungen an Stelle des Zeichens $>$ das Zeichen $<$.

*Damit das Integral* $\int f(x, y, y')dx$ *unterhalb-stetig sei auf dem Bogen* $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *der Kurve* $y = y(x)$ *ist notwendig, daß für* $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *und alle* $y'$ (s. Formel (25)):

$$E(x, y(x), y'(x), y') \geqq 0;$$

*und ist hinreichend, daß bei hinlänglich kleinem positiven* $r$ *für alle Linienelemente,* $x, y, y'$, *die zu einem Linienelemente* $x_0, y_0, y_0'$ *des Bogens* $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *der Kurve* $y = y(x)$ *in der Beziehung stehen* $|x - x_0| < r$, $|y - y_0| < r$, $|y' - y_0'| < r$, *und für alle* $\bar{y}' \neq y'$ *die Ungleichung gelte:*

$$E(x, y, y', \bar{y}') > 0.$$

*Damit das Integral* $\int F(x, y, x', y')dt$ *unterhalb-stetig sei auf dem Bogen* $t_1 \leqq t \leqq t_2$ *der Kurve* $x = x(t), y = y(t)$, *ist notwendig, daß für* $t_1 \leqq t \leqq t_2$ *und alle* $\vartheta$ (s. Formel (60)):

$$E(x(t), y(t); x'(t), y'(t); \cos\vartheta, \sin\vartheta) \geqq 0;$$

*diese Bedingung ist auch hinreichend, wenn in ihr die E-Funktion nur in ordentlicher Weise verschwindet.*

Die angeführten Sätze stammen von L. Tonelli; sie finden sich nebst weitergehenden Resultaten ausführlich dargestellt in seinem in § 1 angeführten Lehrbuche. Die für das Eintreten eines Minimums (Maximums) notwendigen Bedingungen von Legendre und Weierstraß folgen unmittelbar aus diesen Sätzen

Betrachtet man etwa bei dem in § 1 behandelten einfachsten Probleme der Variationsrechnung[1]) die Werte $I(C)$, die alle möglichen, die beiden Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ verbindenden (einem gegebenen Bereiche angehörenden) Kurven dem Integrale $\int f(x, y, y')dx$ erteilen, so besitzt die Gesamtheit aller dieser Werte eine untere Grenze $g$. Hat $g$ den Wert $-\infty$, so gibt es unter den Werten $I(C)$ keinen kleinsten; aber auch wenn $g$ endlich ist, können wir nicht sicher sein, ob es unter den Werten $I(C)$ einen kleinsten gibt, d. h. ob eine Kurve $C$ existiert, für die $I(C) = g$ ist. Es ist von großem Interesse, Bedingungen aufzustellen, unter denen dies der Fall ist. Gibt es eine Kurve $C_0$, für die $I(C_0) = g$, so ist für alle übrigen (in Betracht ge-

1) Analoges gilt für andere Probleme der Variationsrechnung.

zogenen) Kurven: $I(C) \geqq I(C_0)$. Wir sagen von einer solchen Kurve: sie macht das Integral $\int f(x, y, y')\,dx$ zu einem *absoluten Minimum* unter allen in Betracht gezogenen Kurven. (Im Gegensatze hierzu kann das bisher betrachtete Minimum, wo nur verlangt war, daß $C_0$ dem Integral einen kleineren Wert erteile als alle *hinlänglich benachbarten* Kurven $C$, als *relatives* Minimum bezeichnet werden.)

Bei hinlänglich weiter Fassung des Kurven- und Integralbegriffes gelten folgende Sätze:

*Ist in einem abgeschlossenen und beschränkten Bereiche das Integral $\int f(x, y, y')\,dx$ positiv-quasiregulär und ist für hinlänglich große $|y'|$:*

$$f(x, y, y') > |y'|^{1+\alpha} \qquad (\alpha > 0),$$

*so gibt es unter allen, zwei gegebene Punkte dieses Bereiches verbindenden Kurven mindestens eine, die das Integral zu einem absoluten Minimum macht.*

*Ist in einem abgeschlossenen und beschränkten Bereiche das Integral $\int F(x, y, x', y')\,dt$ positiv-definit und positiv-quasiregulär, so gibt es unter allen zwei gegebene Punkte dieses Bereiches verbindenden Kurven mindestens eine, die das Integral zu einem absoluten Minimum macht.*

Liegen die zwei gegebenen Punkte hinlänglich nahe und zieht man nur solche Kurven in Betracht, die in hinlänglicher Nähe dieser beiden Punkte verbleiben, so kann in diesem Satze die Voraussetzung, das Integral sei positiv-definit, weggelassen werden, wenn nur $F_1(x, y, \cos\vartheta, \sin\vartheta)$ nicht für alle $\vartheta$ verschwindet (Existenz des absoluten Minimums *im Kleinen*) Auch die Voraussetzung, das Problem sei quasiregular, kann dabei noch, wie C Carathéodory gefunden hat (*Math. Ann.* **62**, 449 (1906); *Ann di Mat.* (3) **21**, 153 (1913)), durch viel weniger weitgehende Voraussetzungen ersetzt werden, wobei dann diskontinuierliche Lösungen (§ 3) eine wesentliche Rolle spielen.

Die ersten systematischen Überlegungen über Existenz eines absoluten Minimums stammen von D. Hilbert (*Jahresber. Math.-Ver.* 8, 184 (1900)). Die oben angeführten Existenzsätze (und eine große Anzahl anderer) wurden bewiesen von L. Tonelli, auf dessen Lehrbuch verwiesen sei Vgl. auch H. Hahn, *Wien Ber.* **134**, 437 (1925).

Eine (die erforderlichen Differenzierbarkeitseigenschaften besitzende) Kurve, die in einem gegebenen Bereiche ein absolutes

Extremum liefert, muß überall dort, wo sie im Inneren des Bereiches verläuft, eine Extremale sein;[1]) dort, wo sie mit dem Rande zusammenfällt, gilt dies nicht; sie ist dort nicht frei variierbar, sondern nur einseitig variierbar. Über Variationsprobleme, bei denen nicht frei variierbare Kurven auftreten (Probleme mit Gebietsbeschränkungen), sei auf die Lehrbücher verwiesen.

Mit der Frage, unter welchen Umständen ein Extremalenbogen, der die hinreichenden Bedingungen von §§ 1, 2 erfüllt, nicht nur ein relatives, sondern auch ein absolutes Extremum liefert, hat sich G. Darboux befaßt: *Théorie des surfaces* **3**, 89. Vgl. hierzu die Lehrbücher; ferner E. J. Miles, *Am. Trans.* **13**, 35 (1912).

## § 5. Höhere Ableitungen im Integranden. Die isoperimetrischen Probleme.

Ein allgemeineres Problem als das in § 1, 2 behandelte ist das folgende: Eine in der Form $y = y(x)$ darstellbare Kurve zu finden, die zwei gegebene Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ verbindet, und einem Integrale der Form:

$$(70) \qquad \int f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

einen kleineren (größeren) Wert erteilt als alle hinlänglich benachbarten, dieselben Punkte verbindenden Kurven $y = y(x)$, die den Bedingungen genügen:

$$y'(x_1) = y'(x_1), \ldots, y^{(n-1)}(x_1) = y^{(n-1)}(x_1);$$
$$y'(x_2) = y'(x_2), \ldots, y^{(n-1)}(x_2) = y^{(n-1)}(x_2).$$

Mit $y', \ldots, y^{(n)}$, $y', \ldots, y^{(n)}$ sind dabei die erste bis $n^{\text{te}}$ Ableitung nach $x$ bezeichnet.

*Damit eine Kurve $y = y(x)$ dieses Problem löse, ist notwendig, daß sie der Differentialgleichung genügt:*

$$(71) \qquad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0.$$

1) Dadurch steht die Fragestellung nach Existenz eines absoluten Extremums in Beziehung zu dem in § 1 genannten „Randwertprobleme": durch Nachweis der Existenz eines absoluten Extremums kann häufig die Existenz einer Lösung des Randwertproblemes nachgewiesen werden. Näheres hierüber im Lehrbuche von Tonelli. Vgl. auch das in § 8 über das „Dirichletsche Prinzip" Gesagte.

(Wegen Herleitung dieser Gleichung unter möglichst geringen Voraussetzungen vgl. T. Kubota, *Toh. Journ.* **9**, 191 (1916), wo auch weitere Literatur angegeben ist.)

Die Gleichung (71) ist i. a. eine Differentialgleichung $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, ihre allgemeinste Lösung wird daher von $2n$ willkürlichen Konstanten abhängen, es wird sich daher i. a. eine Lösung von (71) finden lassen, die samt ihren $n-1$ ersten Ableitungen in $x_1$ und $x_2$ vorgeschriebene Werte annimmt.

In (71) kommt $y^{(2n)}$ nur vor multipliziert mit dem Faktor $(-1)^n f_{y^{(n)}y^{(n)}}$. Die Ordnung dieser Gleichung kann sich also nur erniedrigen, wenn $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$ identisch Null ist, d. h. wenn $f$ linear ist in $y^{(n)}$. Es gilt der Satz: *Wenn die Ordnung von* (71) *sich erniedrigt, so erniedrigt sie sich stets auf eine gerade Zahl.*

*Erniedrigt sich die Ordnung von* (71) *auf die Zahl* $2(n-k)$, *so läßt sich* $f$ *darstellen in der Form:*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} f_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) + f_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}) \,. \tag{72}$$

*Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $f$ *die Form habe.*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} f_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{72a}$$

*ist die, daß die Gleichung* (71) *sich auf eine Identität (in* $x, y, y', \ldots, y^{(2n)}$) *reduziert.* In diesem Falle erteilen sämtliche Kurvenbögen $y = y(x)$ und $y = \bar{y}(x)$ von gleichem Anfangs- und Endpunkte, die in diesen beiden Punkten auch in ihren Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung übereinstimmen, dem Integrale (70) denselben Wert. Dieses Integral ist also dann im angeführten Sinne vom Wege unabhängig (Euler, *Methodus inveniendi*, Kap. I, art 34). Vgl. hierzu und über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz für die in Rede stehenden Probleme K. Boehm, *Heidelb. Ber.* 1912, 11. Abh.; *Gött. Nachr.* 1915.

Näheres über Variationsprobleme der Form (70) (in Parameterdarstellung) bei Kneser, *Lehrbuch*, 6. Abschn.; J. Radon, *Wien. Ber.* **119**, 1257; G. Vivanti, *El. d. calc. d. var.* 110.

Als *einfachstes isoperimetrisches Problem* wird folgende Aufgabe bezeichnet: Einen die beiden Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ verbindenden Kurvenbogen $y = y(x)$ zu finden, der dem Inte-

grale (1): $\int f(x, y, y')\,dx$ einen kleineren (größeren) Wert erteilt, als jeder andere hinlänglich benachbarte, dieselben Punkte verbindende Kurvenbogen $y = \bar{y}(x)$, der dem Integrale:

$$\int g(x, y, y')\,dx\,, \tag{73}$$

(wo $g(x, y, y')$ eine gegebene Funktion von denselben Regularitätseigenschaften wie $f$ bedeutet) denselben Wert erteilt, wie der Bogen $y = y(x)$.

*Damit die Kurve $y = y(x)$ das genannte Problem löse, ist — falls sie nicht Extremale des Integrales (73) im Sinne des in § 1 behandelten unbedingten Extremums ist, d. h. der Gleichung*

$$g_y - \frac{d}{dx} g_{y'} = 0$$

*genügt — notwendig, daß sie für einen geeigneten Wert der Konstanten $\lambda$ der Differentialgleichung genügt:*

$$(f_y + \lambda g_y) - \frac{d}{dx}(f_{y'} + \lambda g_{y'}) = 0. \tag{74}$$

Eine Kurve, die für irgendeinen Wert von $\lambda$ der Gleichung (74) genügt, wird als *Extremale* unseres isoperimetrischen Problemes bezeichnet. Diese Differentialgleichung ist im allgemeinen von 2. Ordnung und enthält den Parameter $\lambda$; ihre allgemeinste Lösung hängt daher ab von drei Konstanten, im allgemeinen läßt sich daher durch zwei vorgeschriebene Punkte eine Extremale unseres Problemes legen, die dem Integrale (73) einen vorgeschriebenen Wert erteilt.

Näheres über isoperimetrische Probleme in den Lehrbüchern. Hinreichende Bedingungen für ein starkes Minimum (Maximum) zum ersten Male bei J. W. Lindeberg, *Math. Ann* **59**, 332 (1904); **67**, 340. Über Lösungen des isoperimetrischen Problems, die zugleich Extremalen von (73) sind, s. A. Rosenblatt, *Math. Ann* **68**, 557 (1910). Über Existenz von Lösungen J. Hadamard, *Ann. Éc. Norm.* (3) **24**, 203 (1907). L. Tonelli, *Fond. d. calc. d. var.* **2**, Cap X, XII. Über die enge Beziehung, die zwischen den Lösungen gewisser isoperimetrischer Probleme und den Eigenlösungen linearer Differentialgleichungen besteht, vgl Ch. M. Mason, *Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Gött. Diss.* 1903; D. Hilbert,

*Gött. Nachr.* 1904, 232; R. König, *Gött. Diss.* 1907; R. G. D. Richardson, *Math. Ann.* 68, 279 (1910).

Allgemeinere isoperimetrische Probleme erhält man, wenn man an Stelle des Integrales (73) ein Integral treten läßt, dessen Integrand auch höhere Ableitungen enthält; oder wenn man nicht nur für *ein* solches Integral, sondern für mehrere Integrale den Wert vorschreibt. Die isoperimetrischen Probleme sind nahe verwandt mit einem speziellen Typus von Lagrangeschen Problemen; vgl. hierüber § 6.

## § 6. Das Mayersche Problem. Das Lagrangesche Problem.

Als *Mayersches Problem* bezeichnet man folgende Aufgabe der Variationsrechnung: Es sind $n+1$ Funktionen von $x: y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ so zu bestimmen, daß sie den gegebenen $m+1$ Differentialgleichungen genügen $(m < n)$:

$$(75)\qquad \varphi^{(\iota)}(x, y_0, y_1, \ldots, y_n; y_0', y_1', \ldots, y_n') = 0, \qquad (\iota = 0, 1, \ldots, m)$$

daß sie für den gegebenen Wert $x_1$ von $x$ die gegebenen Werte $y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}$ annehmen, daß für den gegebenen Wert $x_2$ von $x$ die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ die gegebenen Werte $y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}$ annehmen und daß endlich sich eine positive Konstante $\varrho$ so finden läßt, daß für jedes andere System von Funktionen $\bar{y}_0(x), \bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)$, das ebenfalls den Gleichungen (75) genügt, für $x_1$ und $x_2$ die genannten Randwerte annimmt und im Intervalle $(x_1, x_2)$ den Ungleichungen genügt:

$$|\bar{y}_0(x) - y_0(x)| < \varrho, \ldots, |\bar{y}_n(x) - y_n(x)| < \varrho,$$

die Differenz $\bar{y}_0(x_2) - y_0(x_2)$ positiv (negativ) ausfällt.

*Damit die Funktionen $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ das Mayersche Problem lösen, ist notwendig, daß sie so beschaffen sind, daß die $n+1$ linearhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die $m+1$ Funktionen $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$:*

$$(76)\qquad \sum_{\iota=0}^{m}\Big[\lambda_\iota \varphi^{(\iota)}_{y_k}(x, y_0, y_1, \ldots, y_n; y_0', y_1', \ldots, y_n') - \frac{d}{dx}\lambda_\iota \varphi^{(\iota)}_{y'_k}(x, y_0, y_1, \ldots, y_n; y_0', y_1', \ldots, y_n')\Big] = 0. \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

*Lösungen besitzen, die nicht sämtlich verschwinden.*

Dieses Problem wurde formuliert von A. Mayer, *Leipz. Ber.* 1895, 129, wo auch die Gleichungen (76) abgeleitet werden. Weitere Literatur über diese Gleichungen: D. Hilbert, *Gött. Nachr.* 1905, 1; H. Hahn, *Monatsh.* **14**, 325 (1903), *Math. Ann.* **63**, 266 (1907); *Wien. Ber.* **131**, 531 (1922); O. Bolza, *Math. Ann.* **64**, 370 (1908); **74**, 430 (1913); G. A. Bliss, *Am. Trans.* **19**, 305 (1918). — Näheres über das Mayersche Problem in den Lehrbüchern; vgl. auch J. Hadamard, *Ann. éc. norm.* (3), **24**, 228 (1907); D. Egorow, *Math. Ann.* **62**, 371 (1906); A. Kneser, *J. f. Math.* **146**, 116 (1916); *Arch. d. Math. u. Phys.* (3) **24**, 26 (1916); G. A. Larew, *Am. Trans.* **20**, 1 (1919).

Hat die Gleichung $\varphi^{(0)} = 0$ die Form:

$$y_0' - f(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') = 0,$$

während in den Gleichungen $\varphi^{(1)} = 0, \ldots, \varphi^{(m)} = 0$ weder $y_0$ noch $y_0'$ vorkommen, so erhält man einen Spezialfall des Mayerschen Problemes, der sich nahezu deckt mit dem *Lagrangeschen Problem:*

Ein System von Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ zu finden, die den $m$ Bedingungsgleichungen genügen:

$$\varphi^{(i)}(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') = 0, \tag{77}$$

die für $x = x_1$ und $x = x_2$ vorgeschriebene Werte annehmen und dem Integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')\,dx \tag{78}$$

einen kleineren (größeren) Wert erteilen als alle anderen den Gleichungen (77) genügenden, in $x_1$ und $x_2$ gleichfalls die vorgeschriebene Werte annehmenden und (für geeignetes $\varrho$) im Intervalle $(x_1, x_2)$ den Ungleichungen

$$| y_1(x) - y_1(x) | < \varrho \ \ldots \ | y_n(x) - y_n(x) | < \varrho \tag{79}$$

genügenden Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$

Wir werden uns im folgenden der Sprache der $(n+1)$-dimensionalen Geometrie bedienen; ein Wertsystem $(x, y_1, \ldots, y_n)$ heißt ein Punkt, die Gesamtheit aller durch ein Gleichungssystem $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ gelieferten Punkte ein Kurvenbogen; wir sagen von einem Kurvenbogen $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$, er liege in der Nach-

barschaft $\varrho$ des obigen Kurvenbogens, wenn für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ die Ungleichungen (79) bestehen. Wir sagen von einem den Gleichungen (77) genügenden, von den beiden Punkten $(x_1, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})$ und $(x_2, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)})$ begrenzten Kurvenbogen, er mache das Integral (78) zu einem (starken) Minimum (Maximum) unter den Nebenbedingungen (77), wenn sich eine Nachbarschaft $\varrho$ dieses Bogens finden läßt, so daß jeder andere den Gleichungen (77) genugende, dieselben Punkte verbindende, ganz in dieser Nachbarschaft liegende Kurvenbogen dem Integral (78) einen größeren (kleineren) Wert erteilt. Wir sagen von einem Kurvenbogen, er mache das Integral (78) zu einem schwachen Minimum (Maximum) unter den Nebenbedingungen (77), wenn er dem Integrale (78) einen kleineren (größeren) Wert erteilt als jeder andere neben den eben genannten auch noch für geeignetes $\varrho'$ den Ungleichungen:

$$|\bar{y}_1'(x) - y_1'(x)| < \varrho', \ldots, |\bar{y}_n'(x) - y_n'(x)| < \varrho'$$

genügende Kurvenbogen.

Die für das Mayersche Problem ausgesprochene notwendige Bedingung lautet hier (zum ersten Male streng bewiesen von A. Mayer, *Math. Ann.* **26**, 74 (1886)): *Damit die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ ein (starkes oder schwaches) Minimum (Maximum) von (78) unter den Nebenbedingungen (77) liefern, ist notwendig, daß sie zusammen mit m Funktionen $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ den Gleichungen genügen:*

$$(80) \qquad f_{y_k} - \frac{d}{dx} f_{y'_k} + \sum_{i=1}^{m} \left( \lambda_i \varphi_{y_k}^{(i)} - \frac{d}{dx} \lambda_i \varphi_{y'_k}^{(i)} \right) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

*Dabei ist vorausgesetzt, daß die n Gleichungen fur $\mu_1, \ldots, \mu_m$:*

$$(81) \qquad \sum_{i=1}^{m} \left( \mu_i \varphi_{y_k}^{(i)} - \frac{d}{dx} \mu_i \varphi_{y'_k}^{(i)} \right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

*keine von Null verschiedenen Losungen besitzen, d. h. daß die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ nicht die oben* (Gleichung (76)) *angeführte notwendige Bedingung bezüglich des durch die Gleichungen $\varphi^{(1)} = 0, \ldots, \varphi^{(m)} = 0$ gegebenen Mayerschen Problemes erfüllen.* Je nachdem diese Voraussetzung erfullt ist oder nicht, sagt man, es liege der *Hauptfall* oder der *Ausnahmefall* vor; wir setzen im folgenden stets voraus, es liege der Hauptfall vor.

Jede den Gleichungen (80) und (77) genügende Kurve wird als *Extremale* unseres Variationsproblems bezeichnet. Jeder solchen Kurve sind zufolge (80) in eindeutiger Weise $m$ Funktionen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ zugeordnet (die *Lagrangeschen Multiplikatoren*). Wir setzen:

$$
\begin{aligned}
&F(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n'; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \\
(82)\qquad &= f(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi^{(i)}(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')
\end{aligned}
$$

und bezeichnen mit $F_k$ die Ableitung $F_{y_k}$, mit $F_{n+k}$ die Ableitung $F_{y'_k}$, mit $F_{2n+\varrho}$ die Ableitung $F_{\lambda_\varrho}$; es ist also:

$$(82\text{ a})\qquad F_{2n+\varrho} = \varphi^{(\varrho)}(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m),$$

analog werden die zweiten Ableitungen von $F$ bezeichnet. Hie und da deuten wir der Kürze halber die Argumente von $F$ nur an in der Form $F(x, y, y', \lambda)$.

Fügt man zu (80) noch die nach $x$ differenzierten Bedingungsgleichungen:

$$\frac{d}{dx}\varphi^{(i)}(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n') = 0$$

hinzu, so erhält man, vorausgesetzt, daß die Determinante:

$$(83)\qquad |F_{i,k}|_{(i, k = n+1, n+2, \ldots, 2n+m)}$$

nicht identisch Null ist, ein System von $n + m$ Differentialgleichungen, das in den $y$ von 2., in den $\lambda$ von 1. Ordnung ist, dessen allgemeinste Lösung daher von $2n + m$ willkürlichen Konstanten abhängt. Da aber diese Lösungen statt den Gleichungen (77), nur den Gleichungen:

$$\varphi^{(1)} = c_1, \ldots, \varphi^{(m)} = c_m$$

genügen (wo die $c$ Konstante bedeuten), sind $m$ Konstante zur Erfüllung der Bedingungsgleichungen zu verwenden, so daß die Schar der Extremalen unseres Problems von $2n$ Konstanten abhängt. Es kann daher im allgemeinen durch zwei vorgeschriebene Punkte eine Extremale gelegt werden.

Sei $y_k = y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ eine Extremale, $\lambda_\varrho(x)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, m)$ die zugehörigen Multiplikatoren; wir setzen im folgenden stets

voraus, daß die Determinante (83) nach Einsetzen der Funktionen $y_\lambda(x)$ und $\lambda_\varrho(x)$ im Intervalle $(x_1, x_2)$ nirgends verschwindet; der Bogen $(x_1, x_2)$ der betrachteten Extremale heißt dann *regulär*. Wir bilden (vgl. (82)):

$$(84) \qquad J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n;\ y_1', \ldots, y_n';\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, dx;$$

dieses Integral hat für jede unseren Bedingungsgleichungen genügende Kurve denselben Wert, wie (78).

Es gibt (im Hauptfalle) Kurvenscharen:

$$y_k = y_k(x) + \eta_k(x, \varepsilon) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

deren sämtliche Kurven durch die Endpunkte $(x_1, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})$, $(x_2, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)})$ hindurchgehen und den Gleichungen (77) genugen (im Ausnahmefalle gilt dies nicht allgemein). Ist $J(\varepsilon)$ der Wert, den eine Kurve dieser Schar dem Integrale (84) erteilt, so definieren wir erste und zweite Variation wie in § 1; also:

$$\delta J = J'(0), \quad \delta^2 J = J''(0).$$

Man erkennt, daß für jede Extremale unseres Problemes $\delta J = 0$ ist. Für die zweite Variation erhält man:

$$(85) \qquad \delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i,k=1}^{n} (F_{i,k}\eta_i\eta_k + 2F_{i+n,k}\eta_i'\eta_k + F_{i+n,k+n}\eta_i'\eta_k')\, dx.$$

*Damit unsere Extremale ein (starkes oder schwaches) Minimum (bzw. Maximum) von* (78) *unter den Nebenbedingungen* (77) *liefere, ist notwendig, daß* $\delta^2 J \geqq 0$ (bzw. $\leqq 0$) *ist fur alle den Bedingungen:*

$$(86) \qquad \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{y_k}^{(i)} \eta_k + \varphi_{y'_k}^{(i)} \eta_k') = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

*genugenden (in $x_1$ und $x_2$ verschwindenden) Funktionen $\eta$* (Vgl. H. Hahn, *Math. Ann.* **58**, 158 (1904).)

Die zweite Variation läßt sich auf die Form bringen:

$$(87) \qquad \delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{n} \psi_k(\eta, \varrho)\, \eta_k\, dx,$$

wo:

$$\psi_k(z, r) =$$

$$(88)\quad \sum_{i=1}^{n}\left\{F_{ik}z_i + F_{n+i,k}z_i' - \frac{d}{dx}(F_{i,n+k}z_i + F_{n+i,n+k}z_i')\right\}$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\left\{F_{2n+i,k}r_i - \frac{d}{dx}(F_{2n+i,n+k}r_i)\right\},$$

und $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ willkürliche (stetig differenzierbare) Funktionen bedeuten.

An Stelle der *Jacobischen Differentialgleichung* tritt hier das System linearer Differentialgleichungen:

$$(89)\quad \begin{aligned} &\psi_k(z, r) = 0 & (k = 1, 2, \ldots, n) \\ &\omega_k(z) \equiv \sum_{i=1}^{n}(F_{i,2n+k}z_i + F_{n+i,2n+k}z_i') = 0. & (k = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

Der *Greensche Satz* fur das System (89) hat die Form:

$$(90)\quad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}\psi_k(z^{(1)}, r^{(1)})z^{(2)} + \sum_{k=1}^{m}\omega_k(z^{(1)})r^{(2)} - \\ &-\sum_{k=1}^{n}\psi_k(z^{(2)}, r^{(2)})z^{(1)} - \sum_{k=1}^{m}\omega_k(z^{(2)})r^{(1)} \\ &= \frac{d}{dx}\psi(z^{(1)}, r^{(1)}; z^{(2)}, r^{(2)}), \end{aligned}$$

wo:

$$(91)\quad \begin{aligned} \psi(z^{(1)}, r^{(1)}; z^{(2)}, r^{(2)}) = \sum_{i,k=1}^{n}[&F_{n+i,k}(z_i^{(1)}z_k^{(2)} - z_i^{(2)}z_k^{(1)}) \\ &+ F_{n+i,n+k}(z_i^{(1)}z_k^{(2)\prime} - z_i^{(2)}z_k^{(1)\prime}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}F_{n+i,2n+k}(z_i^{(1)}r_k^{(2)} - z_i^{(2)}r_k^{(1)}). \end{aligned}$$

Sind speziell $z^{(1)}$, $r^{(1)}$ und $z^{(2)}$, $r^{(2)}$ Lösungssysteme von (89), so wird $\psi(z^{(1)}, r^{(1)}; z^{(2)}, r^{(2)})$ eine Konstante. Zwei linear unabhängige Lösungssysteme, für die diese Konstante den Wert Null hat, heißen *zueinander konjugiert.* Ein System von $n$ linear unabhängigen Lösungen von (89), die zu je zweien konjugiert sind, heißt ein *konjugiertes System*

*Es läßt sich stets ein konjugiertes System* $(z^{(1)}, r^{(1)}), (z^{(2)}, r^{(2)}), \ldots, (z^{(n)}, r^{(n)})$ *so finden, daß die Determinante:*

$$\Delta(z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}) = | z_k^{(i)} |_{(i, k = 1, 2, \ldots, n)} \tag{92}$$

*an einer vorgeschriebenen Stelle des Integrationsintervalles ungleich Null ist.*

*Ist das Intervall* $(\xi_1, \xi_2)$ $(x_1 \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq x_2)$ *so klein gewählt, daß es ein konjugiertes System* $(z^{(1)}, r^{(1)}), \ldots, (z^{(n)}, r^{(n)})$ *gibt, dessen Determinante darin nicht verschwindet, sind ferner die Funktionen* $\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)$ *überall Null außer in* $(\xi_1, \xi_2)$, *so kann* $\delta^2 J$ *auf die Form gebracht werden:*

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i,k=1}^{n} F_{n+i, n+k} \zeta_i \zeta_k \, dx, \tag{93}$$

*wo:*

$$\zeta_i = \frac{1}{\Delta(z^{(1)}, \ldots, z^{(n)})} \begin{vmatrix} \eta_i'; & \eta_1, & \ldots, & \eta_n \\ z_i^{(1)\prime}; & z_1^{(1)}, & \ldots, & z_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_i^{(n)\prime}; & z_1^{(n)}, & \ldots, & z_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{94}$$

*gesetzt ist, und zwischen den* $\zeta_i$ *die Relationen bestehen:*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2n+k, n+i} \zeta_i = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{95}$$

Die Form (93) der zweiten Variation wurde zuerst von A. Clebsch angegeben (*J. f. Math.* **55**, 254 (1858)).

Als Analogon von Legendres Bedingung ergibt sich: *Damit unser Extremalenbogen ein (starkes oder schwaches) Minimum (bzw. Maximum) liefere, ist notwendig, daß in allen seinen Punkten die quadratische Form:*

$$\sum_{i,k=1}^{n} F_{n+i, n+k} u_i u_k \tag{96}$$

*positiv (bzw. negativ) definit sei unter den Nebenbedingungen:*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2n+k, n+i} u_i = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{97}$$

Für das folgende wird diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt.

Ein System von $n$ linear unabhängigen Lösungen $(z^{(1)}, r^{(1)}), \ldots, (z^{(n)}, r^{(n)})$ von (89) heißt *zur Stelle $x_0$ konjugiert*, wenn alle $z_k^{(i)}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ an der Stelle $x_0$ verschwinden. Es gibt immer Lösungssysteme, die einer gegebenen Stelle konjugiert sind. Ein der Stelle $x_0$ konjugiertes System ist auch stets im oben angeführten Sinne konjugiert.

Die Determinante $\Delta(z^{(1)}, \ldots, z^{(n)})$ (Gleichung (92)) eines der Stelle $x_0$ konjugierten Systemes ist niemals identisch Null, sie hat also den Punkt $x_0$ zur isolierten Nullstelle. Die Determinanten (92) irgend zweier derselben Stelle konjugierten Systeme unterscheiden sich nur durch einen konstanten nicht verschwindenden Faktor Sei $x_1'$ die erste auf $x_1$ folgende Nullstelle dieser Determinanten; der Punkt unserer Extremale, dessen Abszisse $x_1'$ ist, heißt der (auf dieser Extremale) *zu $x_1$ konjugierte Punkt.*

*Damit der Bogen $(x_1, x_2)$ unserer Extremale ein (starkes oder schwaches) Minimum (Maximum) liefere, ist notwendig, daß der zu $x_1$ konjugierte Punkt nicht ins Innere des Intergrations-intervalles falle (Jacobis Kriterium).*

Bedeutet:

$$y_k = y^{(k)}(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \quad \lambda_k = \lambda^{(k)}(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n})$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

die Gesamtheit der Extremalen unseres Problems (und der zugehörigen Multiplikatoren), aus der unsere spezielle Extremale erhalten werde für $\alpha_i = \alpha_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$, so bilden (bei geeigneter Wahl der Konstanten $\alpha$)

$$z_k^{(i)} = y_{\alpha_i}^{(k)}(x, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_{2n}^0) \quad r_k^{(i)} = \lambda_{\alpha_i}^{(k)}(x, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_{2n}^0),$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

$2n$ linear unabhängige Losungen von (89), aus denen sich alle übrigen linear mit konstanten Koeffizienten zusammensetzen lassen Jacobis Kriterium läßt sich nun leicht auf die Form bringen:

*Damit der Bogen $(x_1, x_2)$ unserer Extremale ein Minimum (Maximum) liefere, ist notwendig, daß die Determinante*

$$D(x, x_1) = \begin{vmatrix} y_{\alpha_i}^{(k)}(x, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_{2n}^0) \\ y_{\alpha_i}^{(k)}(x_1, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_{2n}^0) \end{vmatrix}_{(k = 1, 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, 2n)}$$

*(die bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten $\alpha$ nicht identisch verschwindet) für $x_1 < x < x_2$ keine Nullstelle besitze*

Die im vorstehenden angeführte Theorie der zweiten Variation und der aus ihr folgenden notwendigen Bedingungen findet sich ausführlich bei G. v. Escherich, *Wien. Ber.* **107**, 1191, 1267, 1383 (1898); **108**, 1269 (1899); **110**, 1355 (1901). (In der letztgenannten Arbeit ist das Lagrangesche Problem in *Parameterdarstellung* behandelt). Für den Fall, daß unter den Bedingungsgleichungen (77) auch solche vorkommen, die die Ableitungen $y_k'$ nicht enthalten (in diesem Falle verschwindet die Determinante (83) identisch), vgl. H. Hahn, *Monatsh.* **14**, 1 (1903). Eine besonders einfache Methode zur Herleitung der notwendigen Bedingung von Jacobi hat G. A. Bliss angegeben: *Am. Trans.* **17**, 195 (1916); vgl. auch D M Smith, *Am Trans* **17**, 459 (1916). Das Verhalten von Extremalenbögen, die den zum Anfangspunkt konjugierten Punkt als Endpunkt oder im Innern enthalten würde, eingehend untersucht von H. Hahn, *Math. Ann* **70**, 110 (1910); J. Rosenberg, *Monatsh.* **24**, 65 (1913).

Sei $y_k = y^{(k)}(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ eine $n$-parametrige Schar von Extremalen und seien $\lambda^{(k)}(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ die zugehörigen Multiplikatoren. Durch jeden Punkt eines abgeschlossenen Gebietes $\mathfrak{S}$ des $(n+1)$ dimensionalen Raumes gehe eine und nur eine Extremale unserer Schar hindurch. Die Ableitungen $y_x^{(\lambda)}(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (Richtungskoeffizienten unserer Extremale) haben in jedem Punkt $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ von $\mathfrak{S}$ einen bestimmten Wert, der mit $p^{(k)}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ bezeichnet werde; der Wert, den der Multiplikator $\lambda_k$, welcher zu der durch diesen Punkt gehenden Extremale der Schar gehört, in diesem Punkte hat, werde bezeichnet mit $l^{(k)}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$; die Funktionen $p^{(\lambda)}$ und $l^{(\lambda)}$ werden i. a. in $\mathfrak{S}$ regulär analytisch ausfallen; wir sagen dann, *unsere Extremalenschar bildet im Gebiete $\mathfrak{S}$ ein Feld*, die Funktionen $p^{(\lambda)}$ heißen die *Gefällsfunktionen*, die Funktionen $l^{(\lambda)}$ die *Multiplikatorfunktionen* dieses Feldes

*Enthält die Extremalenschar $y_k = y^{(k)}(x, a_1, \ldots, a_n)$ für $a_i = a_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die spezielle Extremale $y_k = y_k(x)$ und ist die Funktionaldeterminante*

$$\frac{\partial(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)})}{\partial(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$$

*ungleich Null für $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $a_i = a_i^0$, so gibt es zwei positive Zahlen $\varrho$ und $A$, so daß die den Ungleichungen $|a_i - a_i^0| \leqq A$ genügenden Extremalen unserer Schar in der Nachbarschaft $\varrho$ des Bogens $(x_1, x_2)$ der Extremale $y_k = y_k(x)$ ein Feld bilden.*

*Enthält der Bogen* $(x_1, x_2)$ *der Extremale* $y_k = y_k(x)$ *den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht, ist* $x_0 < x_1$ *und* $x_1 - x_0$ *genügend klein, bedeutet ferner* $y^{(k)}(x_1, a_1, \ldots, a_n)$ *die n-parametrige Schar von Extremalen, die durch den Punkt* $x_0$ *unserer Extremale hindurchgehen (unsere Extremale werde daraus erhalten für* $a_i = a_i^0$*), so läßt sich* $A$ *so bestimmen, daß die den Ungleichungen* $|a_i - a_i^0| \leqq A$ *genügenden Extremalen unserer Schar in einer geeigneten Nachbarschaft* $\varrho$ *des Bogens* $(x_1, x_2)$ *unserer Extremale ein Feld bilden.*

*Damit die* $n + m$ *regulär analytischen Funktionen* $p_1, \ldots, p_n, l_1, \ldots, l_m$ *von* $(x_1, y_1, \ldots, y_n)$ *die Gefälls- und Multiplikatorfunktionen eines Extremalenfeldes seien, ist notwendig und hinreichend, daß sie den* $n + m$ *Gleichungen genugen:*

$$
(98)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} F_{n+k}(x,y,p,l) - \frac{\partial}{\partial y_k'}\Big[F(x,y,p,l) - \sum_{i=1}^{n} p_i F_{n+i}(x,y,p,l)\Big] \\
&+ \sum_{i=1}^{n} p_i \Big[\frac{\partial}{\partial y_i} F_{n+k}(x,y,p,l) - \frac{\partial}{\partial y_k} F_{n+i}(x,y,p,l)\Big] = 0 \\
&\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \\
&\varphi_k(x, y, p) = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen spielen hier dieselbe Rolle, wie die Gleichung (18) oder (18a) beim einfachsten Probleme (O. Bolza, *Palermo Rend.* **31**, 260 (1911)).

Daraus entnimmt man leicht den *Unabhängigkeitssatz: Fur alle diejenigen und nur fur diejenigen Extremalenfelder, für welche*

$$
\frac{\partial}{\partial y_i} F_{n+k}(x, y, p, l) = \frac{\partial}{\partial y_k} F_{n+i}(x, y, p, l)
$$

*ist, wird der Ausdruck*

$$
\Big[F(x, y, p, l) - \sum_{i=1}^{n} p_i F_{n+i}(x, y, p, l)\Big]\, dx + \sum_{i=1}^{n} F_{n+i}(x, y, p, l)\, dy_i
$$

*ein vollständiges Differential, und mithin das Integral:*

$$
(99)\qquad \int \Big[F(x, y, p, l) + \sum_{i=1}^{n} (y_i' - p_i) F_{n+i}(x, y, p, l)\Big]\, dx
$$

*vom Wege unabhängig.*

Diejenigen Extremalenfelder, in welchen das Integral (99) vom Wege unabhängig ist, werden als Mayersche *Felder* bezeichnet.

Bezeichnen wir auch hier das Integral (99) als *Feldintegral*, das Integral (78) als *Grundintegral*, so wird auch hier das Feldintegral, erstreckt über eine Extremale des Feldes, gleich dem Grundintegral. In einem Mayerschen Felde liefert das Feldintegral, erstreckt von einem festen Punkte $(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ des Feldes über eine beliebige Kurve bis zum variablen Punkte $(x, y_1, \ldots, y_n)$ des Feldes, eine im ganzen Felde definierte Funktion $U(x, y_1, \ldots, y_n)$. Setzen wir

$$U(x, y_1, \ldots, y_n) = \text{const.}, \tag{99a}$$

so erhalten wir eine Schar von Flächen, die als die *Transversalflächen* des Mayerschen Feldes bezeichnet werden.

Es schneide die Extremale $y_k = y_k(x)$ im Punkte $(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ die Fläche $G(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$; die Richtungskoeffizienten der Extremale in diesem Punkte seien: $y_1', \ldots, y_n'$, die Werte der Multiplikatoren im Punkte $\bar{x}$ seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$; wir setzen (vgl. (82))

$$\overline{F}(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n; \bar{y}_1', \ldots, \bar{y}_n'; \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m) = \overline{F},$$
$$G(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) = \overline{G}$$

und bezeichnen analog die partiellen Ableitungen von $F$ und $G$. Wir sagen dann allgemein: *die Fläche schneidet die Extremale transversal*, wenn

$$\overline{F} - \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k' \overline{F}_{n+k} : \overline{F}_{n+1} : \cdots : \overline{F}_{2n} = \overline{G}_x : \overline{G}_{y_1} : \cdots : \overline{G}_{y_n}$$

Wie man sieht, schneiden die Transversalflächen eines Mayerschen Feldes in jedem ihrer Punkte die durch diesen Punkt hindurchgehende Extremale des Feldes transversal.

*Damit es eine Fläche $G(x, y_1, \ldots, y_1) = 0$ gebe, die alle Extremalen eines Feldes (soweit sie sie trifft) transversal schneidet, ist notwendig und hinreichend, daß das Feld ein Mayersches sei.*

Sei $y_k = y^{(\lambda)}(x, a_1, \ldots, a_n)$ eine ein Feld bildende Extremalenschar und $\lambda^{(k)}(x, a_1, \ldots, a_n)$ seien die zugehörigen Multiplikatoren. Dann bilden, wie schon erwähnt, die Ausdrücke:

$$z_k^{(i)} = y_{a_i}^{(\lambda)}(x, a_1, \ldots, a_n); \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad \eta_k^{(i)} = \lambda_{a_i}^{(k)}(x, a_1, \ldots, a_n) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m) \tag{100}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ ein System von $n$ Lösungen der zur Extremale $y_k = y^{(k)}(x, a_1, \ldots, a_n)$ gehörigen Jacobischen Differentialgleichungen (89), die bei geeigneter Wahl der Parameter $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig sind. *Damit das Feld ein Mayersches sei, ist notwendig und hinreichend, daß die $n$ Lösungen* (100) *ein konjugiertes System bilden*

Ein Feld, dessen sämtliche Extremalen durch einen (dem Felde natürlich nicht angehörigen) Punkt hindurchgehen, ist ein Mayersches Feld. — Enthält ein Extremalenbogen den zu seinem Anfangspunkte konjugierten Punkt nicht, so gibt es eine diesen Extremalenbogen enthaltende $n$-parametrige Extremalenschar, die in einer Umgebung dieses Extremalenbogens ein Mayersches Feld bietet.

Näheres über den Unabhängigkeitssatz und die Theorie der Mayerschen Felder: A. Mayer, *Math. Ann* **58**, 325 (1904); D. Hilbert, *Math. Ann.* **62**, 351 (1906); O. Bolza, *Am. Trans.* **7**, 459 (1906) und *Palermo Rend.* **31**, 257 (1911) (die letztgenannte Arbeit enthält eine vergleichende Zusammenfassung der anderen zitierten Arbeiten); H. Hahn, *Palermo Rend.* **29**, 49 (1911) (hier wird vorwiegend der Zusammenhang dieser Theorien mit der oben wiedergegebenen Theorie der zweiten Variation besprochen); J. Radon, *Wien. Ber* **120**, 1337 (1911) (hier wird gezeigt, daß auch bei Beschränkung auf Wege, die den Bedingungsgleichungen (77) genugen, die Mayerschen Felder die einzigen sind, in denen das Integral (99) vom Wege unabhängig wird).

Wir setzen:

$$\begin{aligned}(101)\quad & E(x; y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n'; \bar{y}_1', \ldots, \bar{y}_n'; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \\ & = F(x, y, \bar{y}', \lambda) - F(x, y, y', \lambda) - \sum_{k=1}^{n} (\bar{y}_k' - y_k') F_{n+k}(x, y, y', \lambda),\end{aligned}$$

und sprechen wie in § 1 von einem ordentlichen Verschwinden der $E$-Funktion für $\bar{y}_k' = y_k'$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, sonst von einem außerordentlichen Verschwinden Wir schreiben abgekürzt $E(x, y, y', \bar{y}', \lambda)$ Es gelten die Sätze:

*Damit der Bogen $(x_1, x_2)$ der Extremale $y_k = y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (mit den zugehörigen Multiplikatoren $\lambda_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$) ein starkes Minimum (bzw. Maximum) unseres Problemes liefere, ist notwendig, daß für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ und alle den Gleichungen*

$$\varphi_k(x; y_1(x), \ldots, y_n(x); \bar{y}_1', \ldots, \bar{y}_n') = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

*genügenden Werte der $\bar{y}_i'$ die Ungleichung bestehe*

$$(102)\qquad E(x, y(x), y'(x), \bar{y}', \lambda(x)) \geqq 0 \quad (\text{bzw.} \leqq 0)$$

Es enthalte der Bogen $(x_1, x_2)$ der genannten Extremale den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht; *gilt dann bei hinlänglich kleinem* $\varrho$ *für alle den Ungleichungen*

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \quad |y_i - y_i(x)| < \varrho, \quad |y_i' - y_i'(x)| < \varrho; \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$|\lambda_i - \lambda_i(x)| < \varrho \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

*genugenden Wertsysteme* $x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *und alle endlichen den Gleichungen*

$$\varphi_\lambda(x, y_1, \ldots, y_n; \bar{y}_1', \ldots, \bar{y}_n') = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

*genügenden Werte der* $\bar{y}_i'$ *die Ungleichung:*

$$E(x, y, y', \bar{y}' \lambda) \geqq 0 \ (\text{bzw.} \leqq 0), \tag{103}$$

*und verschwindet die E-Funktion nur in ordentlicher Weise, so liefert unser Extremalenbogen ein starkes Minimum (bzw. Maximum) gegenüber allen anderen seine Endpunkte verbindenden, ganz in seiner Nachbarschaft* $\varrho$ *verbleibenden und den Bedingungsgleichungen* (77) *genügenden Kurvenbogen*

Es gilt die Formel:

$$E(x; y; y'; \bar{y}'; \lambda) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}(\bar{y}_i' - y_i')(\bar{y}_k' - y_k')\,F_{n+i,\,n+k}(x, y, y' + \vartheta(\bar{y}' - y'), \lambda) \tag{104}$$

$$(0 < \vartheta < 1)$$

Man entnimmt daraus: *Ein Extremalenbogen, der den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht enthält und für den die quadratische Form* (96) *positiv (negativ) definit ist bei den Nebenbedingungen* (97), *liefert stets wenigstens ein schwaches Minimum (Maximum) unseres Problems* Dieses Resultat kann auch aus der Theorie der zweiten Variation gewonnen werden G. v. Escherich, *Math Ann.* **55**, 108 (1902).

Über den Osgoodschen *Satz* (vgl S 702) für das Lagrangesche Problem s H Hahn, *Festschr. f. H. Weber* (1912), 95. Über das Lagrangesche Problem bei variablen Endpunkten: H Hahn, *Monatsh* **22**, 127 (1911); A Dresden, *Am Trans.* **17**, 425 (1916); **18**, 373 (1917).

Wir schließen hieran noch eine Bemerkung über das in § 5 behandelte isoperimetrische Problem. Definieren wir eine Variable $z$ durch:

$$z' - g(x, y, y') = 0, \tag{105}$$

so löst jede Lösung des isoperimetrischen Problems auch das Lagrangesche Problem, das Integral (1) zu einem Minimum zu machen unter der Nebenbedingung (105). Alle in diesem Paragraphen angeführten notwendigen Bedingungen können daher ohne weiteres auf das isoperimetrische Problem angewendet werden (nicht aber die hinreichenden, da der Begriff der Nachbarschaft in beiden Problemen ein verschiedener ist). Insbesondere reduzieren sich die Gleichungen (80) auf (74).

## § 7. Die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung.

Es handle sich zunächst um das in § 1 behandelte *einfachste Problem* der Variationsrechnung. Wir betrachten den Integranden $f(x, y, y')$ bei festgehaltenem Punkte $(x, y)$ als Funktion von $y'$, und schreiben der Übersichtlichkeit halber $p$ für $y'$ und $f(p)$ für $f(x, y, y')$, so daß $f'(p) = f_{y'}(x, y, y')$. Nun betrachten wir in einer $pv$-Ebene die Kurve

$$v = f(p). \tag{106}$$

Sie heißt die *Indikatrix* unseres Variationsproblemes im Punkte $(x, y)$ (vgl. S. 644). Statt $p$, $v$ führen wir als neue Veränderliche ein:

$$q = f'(p), \quad w = -(v - pf'(p)). \tag{107}$$

Dies ist die sogenannte *Legendresche Transformation* Sie transformiert die Kurve (106) in eine Kurve:

$$w = H(q). \tag{108}$$

Die Funktion $H(q)$ wird gefunden, indem man aus der ersten Gleichung (107) $p$ als Funktion von $q$ rechnet und in $-(f(p) - pf'(p))$ einsetzt. Dann entsteht umgekehrt die Kurve (106) aus der Kurve (108) durch die Transformation:

$$p = H'(q), \quad v = -(w - qH'(q)). \tag{109}$$

Bringen wir wieder die Abhängigkeit von $(x, y)$ zum Ausdruck, so wird $H$ eine Funktion von $x, y, q$ und es bestehen die Beziehungen:

$$q = f_{y'}(x, y, p), \quad p = H_q(x, y, q), \quad H_y(x, y, q) = -f_y(x, y, p).$$

*Die Eulersche Gleichung kann nun ersetzt werden durch das System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$(110) \qquad \frac{dy}{dx} = H_q(x, y, q): \quad \frac{dq}{dx} = -H_y(x, y, q);$$

*es ist dies ein kanonisches System.*

Sei ein Feld von Extremalen gegeben und sei $U(x, y) = \text{const}$ die durch (21) (S. 634) gegebene Schar seiner Transversalen. Gleichung (19) ergibt, wenn mit $p$ abgekürzt seine Gefällsfunktion $p(x, y)$ bezeichnet wird:

$$U_x(x, y) = f(x, y, p) - p f_{y'}(x, y, p), \quad U_y(x, y) = f_{y'}(x, y, p).$$

Nach der Art wie oben die Funktion $H$ gebildet wurde sehen wir: es ist:

$$U_x = -H(x, y, U_y),$$

und wir haben den Satz:

*Ist* $U(x, y) = \text{const.}$ *die durch* (21) (S. 634) *gegebene Schar der Transversalen eines Extremalenfeldes, so genügt die Funktion* $U(x, y)$ *der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$(111) \qquad z_x + H(x, y, z_y) = 0.$$

Sie heißt die *Hamilton-Jacobische Gleichung* unseres Variationsproblemes und ist insofern eine spezielle partielle Differentialgleichung erster Ordnung, als in ihr die Unbekannte $z$ nicht explizit auftritt (sondern nur ihre Ableitungen $z_x$, $z_y$).

Es gilt auch umgekehrt: *Ist* $U(x, y)$ *eine Lösung von* (111), *so ist* $U(x, y) = \text{const}$ *die Schar der Transversalen eines Extremalenfeldes.* Die Extremalen des Feldes werden gefunden durch Auflösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung (vgl (23) auf S. 634):

$$(f(x, y, y') - y' f_{y'}(x, y, y'))\, U_y(x, y) - f_{y'}(x, y, y')\, U_x(x, y) = 0.$$

Ist $U(x, y, c)$ eine Lösung von (111), die eine willkürliche Konstante $c$ enthält, so ist $U_c(x, y, c) = \text{const.}$ (falls sich nicht die linke Seite auf eine Konstante reduziert) die zweiparametrige Schar der Extremalen unseres Variationsproblemes.

Handelt es sich um das *Lagrangesche Problem,* so ist die Indikatrix gegeben durch (wenn wir auch hier den festgehaltenen Punkt $x, y, \ldots, y_n$ nicht anschreiben und $p_i$ statt $y_i'$ schreiben):

$$u = f(p_1, \ldots, p_n); \quad \varphi^{(\varrho)}(p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Legendresche Transformation lautet hier (wenn wir von der auf S. 658 eingeführten Bezeichnungsweise Gebrauch machen):

$$q_i = F_{n+i}(x, y, p, \lambda), \quad w = -\left(v - \sum_{i=1}^{n} p_i F_{n+i}(x, y, p, \lambda)\right).$$

Sie führt die Indikatrix über in:

$$w = H(x, y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n),$$

wobei die Funktion $H$ gefunden wird, indem man aus den $n$ Gleichungen $q_i = F_{n+i}$ und den $m$ Bedingungsgleichungen $F_{2n+\varrho} = 0$ (vgl. (82a) auf S. 658) $p_1, \ldots, p_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ als Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n$ ausrechnet (es ist dabei vorausgesetzt, daß die Determinante (83) nicht verschwindet) und in $-\left(F - \sum_{i=1}^{n} p_i F_{n+i}\right)$ einsetzt. Die Differentialgleichungen (80) und (77) der Extremalen gehen dann über in das kanonische System:

$$(112) \qquad \frac{dy_i}{dx} = H_{q_i}(x, y, q); \quad \frac{dq_i}{dx} = -H_{q_i}(x, y, q). \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung lautet hier:

$$(113) \qquad z_x + H(x, y_1, \ldots, y_n, z_{y_1}, \ldots, z_{y_n}) = 0.$$

*Ist* $U(x, y_1, \ldots, y_n) =$ const. *die durch* (99a) (S. 665) *gegebene Schar der Transversalflachen eines Mayerschen Feldes, so genügt* $U$ *der Gleichung* (113); *umgekehrt: ist* $U$ *eine Lösung von* (113), *so ist* $U =$ const. *die Schar der Transversalflächen eines Mayerschen Feldes.*

Nunmehr handle es sich um das zu Beginn von § 6 definierte *Mayersche Problem.* Wir deuten es geometrisch im $(n+2)$-dimensionalen Raume $x, y_0, y_1, \ldots, y_n$. Jede den Gleichungen (75) und (76) genügende Kurve

$$y_0 = y_0(x), \ldots, y_n = y_n(x)$$

heiße auch hier eine Extremale. Es gehören zu ihr Multiplikatoren $\lambda_0(x) \ldots, \lambda_m(x)$ (die nur bis auf einen konstanten Pro-

portionalitätsfaktor festgelegt sind). Wir sagen von einer $n$-parametrigen Schar von Extremalen: sie bildet ein *Feld*, wenn sie eine $(n+1)$-dimensionale Fläche $y_0 = g(x, y_1, \ldots, y_n)$ unseres Raumes einfach überdeckt; diese Fläche heiße dann die *Feldfläche*. Wie auf S. 663 können wir in allen Punkten der Feldfläche die Gefällsfunktionen $p_i(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ und die Multiplikatorfunktionen $l_\varrho(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)$ $(\varrho = 0, 1, \ldots, m)$ des Feldes bilden. Wir setzen nun:

$$F(x, y, y', \lambda) = \sum_{\varrho=0}^{m} \lambda_\varrho \varphi^{(\varrho)}(x, y, y').$$

Wir wollen ein Extremalenfeld ein *Mayersches Feld* nennen (seine Feldfläche eine *Mayersche Feldfläche*), wenn in jedem Punkte seiner Feldfläche für alle auf ihr gelegenen Fortschreitungsrichtungen $(dx, dy_0, \ldots, dy_n)$ die Gleichung gilt:

$$(114) \qquad \sum_{i=0}^{n} F_{y'_i}(x, y, p, l)\, dy_i - \sum_{i=0}^{n} p_i F_{y'_i}(x, y, p, l)\, dx = 0,$$

wo unter $p$ und $l$ die Gefälls- und Multiplikatorfunktionen des Feldes zu verstehen sind. Die von einem Punkte des Raumes ausgehende $n$-parametrige Extremalenschar bildet (in einem gewissen Bereiche) ein solches Mayersches Feld.

Ist $V(x, y_0, \ldots, y_n) = 0$ eine Mayersche Feldfläche, so muß wegen (114) gelten:

$$(115) \qquad V_x : V_{y_0} : \cdots : V_{y_n} = -\sum_{i=0}^{n} p_i F_{y'_i} : F_{y'_0} : \cdots : F_{y'_n}.$$

Indem man, ähnlich wie beim Lagrangeschen Probleme, aus (115) und den Gleichungen (75) die $p_i$ und $l_\varrho$ eliminiert, erkennt man: Ist $V = 0$ eine Mayersche Feldfläche, so genügt die Funktion $V$ einer partiellen Differentialgleichung:

$$(116) \qquad V_x + H(x, y_0, \ldots, y_n, V_{y_0}, \ldots, V_{y_n}) = 0,$$

deren linke Seite in den partiellen Ableitungen von $V$ homogen von erster Ordnung ist. Daraus folgert man weiter: Stellt man eine Mayersche Feldfläche in der Form dar:

$$(117) \qquad y_0 = U(x, y_1, \ldots, y_n),$$

so genügt die Funktion $U$ einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$h(x, y_1, \ldots, y_n, z, z_x, z_{y_1}, \ldots, z_{y_n}) = 0; \tag{118}$$

umgekehrt: ist $U$ eine Lösung dieser Gleichung, so stellt (117) eine Mayersche Feldfläche dar.

Die partielle Differentialgleichung (118) heißt die *Hamilton-Jacobische Gleichung* unseres Mayerschen Variationsproblems; sie ist nicht mehr spezialisiert, insofern in ihr die unbekannte Funktion $z$ explizit auftreten kann.

Jede partielle Differentialgleichung der Gestalt (118) ist (sofern sie nicht linear-homogenen Gleichungen äquivalent ist) Hamilton-Jacobische Gleichung eines Mayerschen Variationsproblemes. Vgl. hierzu A. Kneser, *Jahresber. Math.-Ver.* **24**, 123, (1915).

## § 8. Doppelintegrale.

Unter den Problemen der Variationsrechnung, die sich mit mehrfachen Integralen beschäftigen, ist das einfachste das folgende:

Eine Funktion $z(x, y)$ zu bestimmen, die entlang einer regulären, geschlossenen, doppelpunktlosen Kurve $C$ der $xy$-Ebene vorgeschriebene Werte annimmt, und dem über das von $C$ begrenzte Gebiet erstreckten Doppelintegrale:

$$\iint f(x, y, z, z_x, z_y)\, dx\, dy, \tag{119}$$

(wo $z_x$, $z_y$ die Ableitungen von $z$ nach $x$ und $y$ bedeuten) einen kleineren (größeren) Wert erteilt, als jede andere der Ungleichung $|\bar{z} - z| < \varrho$ genügende ($\varrho$ eine geeignete, hinlänglich kleine Konstante), entlang $C$ dieselben Werte annehmende Funktion $\bar{z}(x, y)$.

Betrachtet man die Schar $z(x, y) + \varepsilon\, \zeta(x, y)$, wo $\zeta(x, y)$ entlang $C$ den Wert Null habe, und bezeichnet mit $J(\varepsilon)$ den Wert, den eine dieser Funktionen dem Integrale erteilt, so kann man $\delta J$, $\delta^2 J$ definieren wie in § 1 Man erhält:

$$\delta J = \iint (f_z \zeta + f_{z_x} \zeta_x + f_{z_y} \zeta_y)\, dx\, dy, \tag{120}$$

oder durch partielle Integration:

$$(121)\qquad \delta J = \int\int \left(f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{z_y}\right) \zeta \, dx\, dy,$$

woraus man entnimmt:

*Damit die Funktion $z(x, y)$ das Integral (119) zu einem Minimum (Maximum) mache, ist notwendig, daß sie der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung genügt:*

$$(122)\qquad f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{z_y} = 0,$$

die, wenn die angedeuteten Differentiationen ausgeführt werden, lautet:

$$(123)\qquad \begin{aligned} &f_z - f_{x z_x} - f_{y z_y} - f_{z z_x} z_x - f_{z z_y} z_y \\ &\quad - f_{z_x z_x} z_{xx} - 2 f_{z_x z_y} z_{xy} - f_{z_y z_y} z_{yy} = 0. \end{aligned}$$

Diese notwendige Bedingung wurde zuerst von Lagrange hergeleitet (1760; *Œuvres* **1**, 356); es ist dabei vorausgesetzt, daß die gesuchte Losung $z$ zweimal stetig differenzierbar ist; es kann aber auch noch andere Lösungen geben, die nicht zweimal stetig differenzierbar sind und nicht der Gleichung (123) genügen: J. Hadamard, *C. R.* **144**, 1092 (1907); L. Lichtenstein, *Math. Ann.* **69**, 514 (1910) (vgl. auch *Bull. Crac.* 1912, 915). Vgl hierzu A. Haar, *J. f. Math.* **149**, 1 (1919) Genügt $z(x, y)$ der Gleichung (123), so heißt die Fläche $z = z(x, y)$ eine *Extremale* unseres Variationsproblems

Mit der ersten Variation für den Fall, daß die Vergleichsflächen nicht dieselbe Randkurve haben (so daß $\zeta$ nicht entlang $C$ verschwindet) beschäftigten sich zuerst Gauss (1833; Werke **5**, 60) und Poisson (*Mém. Acad. Sc Paris* (2) **12** (1833), 294)

Mit der zweiten Variation von Doppelintegralen beschäftigte sich zuerst V. Brunacci, *Mém. ist naz ital* **2** (1810), 121. Von späteren Arbeiten seien genannt: A Clebsch, *J. f Math.* **55**, 270 (1858); **56**, 122 (1859); J. Hadamard, *Bull soc. math.* **30**, 253 (1902); **33**, 73 (1905).

Die notwendige Bedingung von Legendre verlangt hier, daß auf der Extremale $z = z(x, y)$ die Ungleichung gelte:

$$(124)\qquad f_{z_x z_x} f_{z_y z_y} - (f_{z_x z_y})^2 \geqq 0$$

Sie werde in der schärferen Form:

$$f_{z_x z_x} f_{z_y z_y} - (f_{z_x z_y})^2 > 0$$

als erfüllt vorausgesetzt.

Die zur Extremale $z = z(x, y)$ gehörige *Jacobische Gleichung* lautet:

$$(125) \quad \frac{\partial}{\partial x}(f_{z_x z_x} \cdot u_x + f_{z_x z_y} u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(f_{z_y z_x} u_x + f_{z_y z_y} u_y) + u\left(\frac{\partial}{\partial x} f_{z z_x} + \frac{\partial}{\partial y} f_{z z_y} - f_{z z}\right) = 0 .$$

Die notwendige Bedingung von Jacobi lautet: Damit eine Extremale ein (starkes oder schwaches) Minimum (Maximum) liefere, ist notwendig, daß die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für $u$, die aus (125) entsteht, indem der Koeffizient von $u$ mit dem Parameter $\lambda$ multipliziert wird, für $0 < \lambda \leqq 1$ keine auf der Kurve $C$ verschwindende Lösung besitze (außer der trivialen Lösung $u = 0$). Näheres hierüber: L. Lichtenstein, *Ber. Berl. math. Ges.* **14**, 119 (1915); *Monatsh. Math. u. Phys.* **28**, 3 (1917); *Math. Zeitschr.* **5**, 26 (1919). Über die Jacobische Bedingung vgl. auch A. Sommerfeld, *Jahresber. Math.-Ver.* **8**, 188 (1900).

Die $E$-Funktion lautet hier:

$$(126) \quad \begin{aligned} E(x, y, z, z_x, z_y, \bar{p}, \bar{q}) &= f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) - f(x, y, z, z_x, z_y) \\ &- (\bar{p} - z_x) f_{z_x}(x, y, z, z_x, z_y) - (\bar{q} - z_y) f_{z_y}(x, y, z, z_x, z_y) . \end{aligned}$$

Das Analogon der notwendigen Bedingung von Weierstraß wurde bewiesen von E. E. Levi (*Rom Rend. Linc.* **24**$_2$, 353 (1905)) Mit der Aufsuchung hinreichender Bedingungen nach der Methode von Weierstraß oder mit der Übertragung des Unabhängigkeitssatzes beschäftigen sich: G. Kobb, *Acta math.* **16**, 65 (1892); D. Hilbert, *Gött. Nachr.* 1900, 295; *Math. Ann.* **62**, 361 (1906); J. Radon, *Monatsh* **22**, 53 (1911); K. Boehm, *Math. Ann.* **83**, 149 (1921). Wegen Existenz eines Feldes vgl. L Lichtenstein, *Monatsh.* **28**, 18 (1917)

In der genannten Arbeit von Radon, sowie bei G. Vivanti, *Rend. Palermo* **33**, 268 (1910) (s. auch *Ann. di mat.* (3) **20**, 49 (1913)) wird gezeigt, daß der Wert des $n$-fachen Integrales in Parameterdarstellung:

$$\int \cdots \int \Phi\left(x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right) du_1 \ldots du_n \qquad (i = 0, 1, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots, n)$$

dann und nur dann von der Wahl der Parameter unabhängig ist, wenn $\Phi$ die Form hat:

$$\Phi\left(x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right) = F(x_0, \ldots, x_n; p_0, \ldots, p_n),$$

wo unter $p_i$ die Determinante verstanden ist:

$$p_i = (-1)^i \left| \frac{\partial x_0}{\partial u_k}, \ldots, \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_k}, \frac{\partial x_{i+1}}{\partial u_k}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u_k} \right| \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

und $F$ positiv-homogen (S. 638) in den Variablen $p_0, p_1, \ldots, p_n$ ist.

Ein dem *Osgoodschen Satze* (S. 637) analoger Satz gilt für mehrfache Integrale nicht; vgl. hierüber G. Fubini, *Rom. Rend. Linc.* (5), **19**$_1$, 443 (1910).

Hat das Integral (106) speziell die Form:

$$\iint [(z_x)^2 + (z_y)^2]\, dx\, dy\,, \tag{127}$$

so reduziert sich die Gleichung (109) auf die Laplacesche Gleichung:

$$\Delta z \equiv z_{xx} + z_{yy} = 0\,. \tag{128}$$

Aus der Tatsache, daß das Integral (127) wesentlich positiv ist, glaubte man schließen zu können, es müsse unter allen Funktionen $z(x, y)$, die auf $C$ vorgeschriebene Werte annehmen, eine das Integral zu einem Minimum machen. Da sie dann notwendig der Gleichung (128) genügen müßte, wäre hiermit die Existenz einer Losung von (128) erwiesen, die auf $C$ vorgeschriebene Werte annimmt. (Vgl uber dieses Problem Kap. XV, § 13) Diese Schlußweise wird als *Dirichletsches Prinzip* bezeichnet; sie findet sich aber schon bei Gauß (1840; *Werke* **5**, 232 = Ostwalds Klassiker Nr. 2, 41); ferner bei W. Thomson (1847; *Papers on Electr. and Magn.* 143); wichtige Anwendungen auf die Funktionentheorie (s Kap XV, § 13, S. 742) macht davon B Riemann (*Diss* (1851)), Art. 16 = *Werke*, 30; *J. f. Math.* **54**, 111 (1857) = *Werke*, 90). Auf die Unzulänglichkeit dieser Schlußweise hat Weierstraß hingewiesen (*Werke* **2**, 49). Jedenfalls aber haben alle Werte, deren das Integral (127) überhaupt fahig ist, wenn darin fur $z$ eine auf $C$ die vorgeschriebenen Werte annehmende Funktion eingesetzt wird, eine untere Grenze $J_0$. Es gibt also eine Folge von Funktionen:

$$z_1(x, y),\ z_2(x, y), \ldots, z_n(x, y), \ \ldots$$

die auf $C$ die vorgeschriebenen Werte annehmen und so beschaffen sind, daß, wenn mit $J_n$ der Wert bezeichnet wird, den die Funktion $z_n$ dem Integrale (127) erteilt, $\lim_{n \to \infty} J_n = J_0$ wird. Eine solche Funktionenfolge heißt eine *Minimalfolge*. Im allgemeinen wird eine solche Minimalfolge keineswegs konvergent sein, noch auch wird sich aus ihr eine konvergente Teilfolge herausgreifen lassen. Wohl aber läßt sich eine Minimalfolge in verschiedener Weise in eine Folge von Funktionen $\bar{z}_n(x, y)$ transformieren, die gleichfalls auf $C$ die vorgeschriebenen Werte annehmen, die gleichfalls dem Integral (127) gegen $J_0$ konvergierende Werte erteilen und gleichmäßig gegen eine zweimal stetig differenzierbare Grenzfunktion $z(x, y)$ konvergieren, die nun notwendig dem Integral (127) den Wert $J_0$ erteilt, somit die gesuchte Minimalfunktion ist und tatsächlich eine Lösung der Gleichung (128) darstellt, die auf $C$ die vorgeschriebenen Randwerte hat

Zum erstenmale wurde durch Betrachtungen solcher Art die Existenz der Minimalfunktion nachgewiesen von D. Hilbert, *Über das Dirichletsche Princip*, Berlin 1901 = *Math. Ann.* **59**, 161 (1904); sodann B. Levi, *Rend. Pal.* **22**, 293 (1906); G. Fubini, *Rend. Pal.* **23**, 58 (1907); H. Lebesgue, *Rend. Pal.* **24**, 1 (1907); R. Courant, *Math. Ann.* **72**, 517 (1912); *J. f. Math.* **144**, 190 (1914). Ein kurzes Referat: G. Fubini, *Ann. di mat.* (3) **15**, 121 (1908). Ein besonders einfaches Verfahren, um von einer Minimalfolge zur gesuchten Minimalfunktion $z(x, y)$ zu gelangen, hat St. Zaremba angegeben (*Bull. Cracov.* 1909, 197; s. auch G. Fubini, *Rom. Rend. Linc.* (5), **19**$_1$, 796 (1910)): Man lege um jeden innerhalb der Kurve $C$ gelegenen Punkt $(x, y)$ einen innerhalb von $C$ liegenden Kreis, und bezeichne mit $\bar{z}_n(x, y)$ den Mittelwert von $z_n$ auf der Peripherie dieses Kreises, dann ist

$$\lim_{n=\infty} \bar{z}_n(x, y) = z(x, y).$$

Nach anderen Methoden behandelt ähnliche Minimumsaufgaben: W. Ritz, *J. f. Math.* **135**, 1 (1909) Vgl hierzu R. Courant, *Math. Ann* **85**, 320 (1922).

Mit der *Legendreschen Transformation* und der *Hamilton-Jacobischen Theorie* für Doppelintegrale befassen sich: V Volterra, *Rend. Linc* (4) **6**$_1$, 43 (1897); G Prange, *Gött. Diss.* 1915; C. Carathéodory, *Math Ann* **85**, 78; **85**, 272 (1923).

## § 9. Spezielle Probleme.

*Das Newtonsche Problem.* Zwei gegebene Punkte der $xy$-Ebene (die beide in der Halbebene $y > 0$ liegen) so durch einen Kurvenbogen zu verbinden, daß die Mantelfläche des durch Rotation dieses Bogens um die $x$-Achse entstehenden Korpers, in Richtung der negativen $x$ Achse in einem widerstehenden Mittel mit gegebener Geschwindigkeit bewegt, einen moglichst geringen Widerstand erleidet.

Das zu einem Minimum zu machende Integral (der Widerstand) wird angesetzt in der Form:

$$\int \frac{y\left(\frac{dy}{dt}\right)^3}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int \frac{y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int \frac{y}{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$$

Diejenigen seiner Extremalen, auf welchen $\frac{dy}{dx} > 0$ ist, sind (in Parameterdarstellung, wobei der Parameter $q$ den Reziprokwert des Richtungskoeffizienten $\frac{dy}{dx}$ bedeutet, $c$ und $c'$ willkürliche Konstante sind):

$$x = c\left(q^2+\tfrac{3}{4}q^4-\log q\right)+c'$$
$$y = c\,\frac{(1+q^2)^2}{q}.$$

Sie haben für $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$ Rückkehrpunkte; ein den Rückkehrpunkt nicht enthaltender Extremalenbogen liefert ein schwaches Minimum oder Maximum, je nachdem $q^2 > \frac{1}{3}$ oder $q^2 < \frac{1}{3}$; hingegen liefert kein Extremalenbogen ein starkes Minimum oder Maximum (zuerst bemerkt von Legendre, *Mém. acad Sc. Paris* 1786; § 6; *Ostwalds Klassiker* Nr. 47, 70). Wohl aber liefert jeder Extremalenbogen auf dem $q > 1$ ist, ein Minimum gegenüber allen Vergleichskurven, auf denen Abszisse und Ordinate niemals abnehmen. Ein Minimum im eben genannten Sinne wird auch geliefert durch ein Stuck einer zur $y$-Achse parallelen Geraden und einen unter einem Winkel von $45^0$ sich anschließenden Extremalenbogen (mit $q \geqq 1$). Ein Punkt der $x$-Achse kann mit einem rechts von ihm liegenden Punkte der Halbebene $y > 0$ auf eine und nur eine Weise durch einen

solchen Kurvenzug verbunden werden; dieser Kurvenzug liefert ein Minimum gegenüber allen ganz in der Halbebene $y > 0$ verlaufenden Vergleichskurven gleichen Anfangs- und Endpunktes, auf denen Abszisse und Ordinate niemals abnehmen.

Dieses Problem wurde von Newton behandelt im Jahre 1686 (*Princ. phil. nat.* Buch II, Sect. VII, Prop. 34; vgl. auch O. Bolza, *Bibl math.* (3) **13**, 146 (1912)) und ist das älteste Problem der Variationsrechnung. Ausführliche Darstellung in Bolzas *Vorl.* 407. Eine Bibliographie dieses Problemes: M. Lecat, *Interméd.* **23**, 81 (1906); **26**, 82 (1909). Durchführung des Problems mit anderen Ansätzen für den Widerstand: E. J. Miles, *Am. Bull.* (2) **19**, 1 (1913).

*Das Problem der Brachistochrone.* Die Kurve zu finden, längs deren fallend ein nur der Schwerkraft unterworfener materieller Punkt von gegebener Anfangsgeschwindigkeit $v$ am raschesten vom Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ zum Punkte $(x_2, y_2, z_2)$ gelangt.

Das zu einem Minimum zu machende Integral ist (in Parameterdarstellung, wenn $g$ die Beschleunigung der Schwere bedeutet und die $z$-Achse vertikal nach abwärts gerichtet ist):

$$\int \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{v^2 + 2g(z - z_1)}}\, dt;$$

seine Extremalen sind in vertikalen Ebenen verlaufende Zykloiden von horizontaler Basis. Die Extremalenbögen liefern, sofern sie keinen Rückkehrpunkt enthalten, starke Minima. Extremalenbögen, die einen Rückkehrpunkt enthalten, liefern kein Extremum; siehe H Hancock, *Lectures* 99 (nach Vorlesungen von H. A. Schwarz).

Ist der Endpunkt der gesuchten Kurve nicht vorgeschrieben, sondern nur der Bedingung unterworfen, auf einer gegebenen Kurve $C$ der vertikalen Ebene zu liegen, so muß, wenn die Extremale ein Minimum liefern soll, die Tangente an die Kurve $C$ im Endpunkte der Extremale senkrecht stehen auf der Tangente an die Extremale in ihrem Anfangspunkte (Dies wurde von J Ch. de Borda gefunden (1767), nachdem Lagrange eine falsche Bedingung angegeben hatte)

Über die Möglichkeit, durch zwei gegebene Punkte eine Extremale zu legen vgl O. Bolza, *Am. Bull.* (2) **10**, 185 (1904) und E. H. Moore, *Am Bull.* (2) **10**, 337 (1904)

An das Problem der Brachistochrone knüpfte die Entwicklung der Variationsrechnung an Es wurde von Johann Bernoulli in den *Acta Erud.* Juni 1696 gestellt; er selbst (*Acta*

*Erud.* Mai 1697), sowie sein Bruder Jacob Bernoulli (ebenda) gaben bald darauf Lösungen. (In deutscher Übersetzung von Paul Stäckel in *Ostwalds Klass.* Nr. 46.) Über die von Joh. Bernoulli verwendete Methode vgl. C. Carathéodory, *Gött. Diss.* (1904), 63, *Gött. Nachr.* 1905, 83, sowie *Rend. Pal.* **25**, 36 (1908), wo diese Methode allgemein auf das einfachste Problem der Variationsrechnung angewendet und gezeigt wird, daß sie in manchen Fällen vor der in § 1 auseinandergesetzten Methode gewisse Vorteile hat.

Über Brachistochronen auf einer vorgegebenen Fläche (oder in einer beliebigen mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit) vgl. G. Pick, *Wien. Ber.* **120**, 257 (1911); Ph. Frank, *Wien. Ber.* **123**, 665 (1912); J. Lipke, *Am. Trans.* **13**, 77 (1912)

Wird angenommen, der Punkt erleide bei seinem Falle einen Widerstand, der eine gegebene Funktion der Geschwindigkeit ist, so wird man auf ein Problem mit Nebenbedingung (wie sie in § 6 behandelt wurden) geführt: Lagrange, *Œuvres* **10**, 440; Euler, *Meth. inven.* Kap. III, art. 46; Kap. V, art. 66 *J. N. Haton de la Goupillière Mém. Sav. Étr.* **27**, Nr 4. G. Vivanti, *El. d calc. d. var.* 148, 267.

Es sei hier noch folgendes Problem von Maxwell (*Scientific Papers* **2**, 310) erwähnt, das auch C Carathéodory behandelt (*Rend. Pal.* **25**, 47 (1908) Auf eine horizontale Ebene sei eine Halbkugel aufgestellt, auf der sich ein Punkt bewegt; seine Geschwindigkeit sei proportional der dritten Potenz des Kosinus des Neigungswinkels seiner Bahn gegen die Horizontale; auf welchem Wege kommt er am raschesten von der Basis der Halbkugel zum höchsten Punkt?

*Kleinste Rotationsfläche*: Zwei Punkte der $xy$-Ebene durch einen ganz auf einer Seite der $x$-Achse liegenden Kurvenbogen zu verbinden, derart, daß die durch Rotation dieses Kurvenbogens um die $x$-Achse entstehende Fläche möglichst kleinen Inhalt hat.

Das zu einem Minimum zu machende Integral ist

$$\int y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

Die Extremalen sind Kettenlinien, deren Symmetrieachse zur $y$-Achse parallel ist. Ist auf einer solchen Kettenlinie der Punkt $(x_2, y_2)$ zum Punkt $(x_1, y_1)$ konjugiert, so schneiden sich die Tangenten in diesen Punkten auf der $x$-Achse (L Lindelöf, *Math. Ann.* **2**, 160 (1870). Verallgemeinerungen: L. Bianchi, *Rom*

*Rend. Linc.* (5) **19**$_1$, 705 (1910); O. Bolza, *Am. Bull.* (2) **18**, 107 (1912)). Ein Extremalenbogen, der den zum Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht enthält, liefert ein starkes Minimum. Über die Möglichkeit, durch zwei gegebene Punkte eine Extremale zu legen, s. Hancock, *Lectures*, Chap. III.

Auch die aus den drei Geradenstücken $x = x_1 (y_1 \geqq y \geqq 0)$; $y = 0\ (x_1 \leqq x \leqq x_2)$; $x = x_2 (0 \leqq y \leqq y_2)$ bestehende Kurve liefert eine Lösung des Problems: sie erteilt dem Integrale einen kleineren Wert als alle anderen hinlänglich benachbarten Kurven, die ganz in der Halbebene $y \geqq 0$ verbleiben und die Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ verbinden (zuerst bemerkt von C. W. B. Goldschmidt, *Determinatio superficiei etc.*, Göttingen 1831). Vgl. hierüber, sowie über die Frage nach dem *absoluten* Minimum H. F. Mac Neish, *Ann. of math.* (2) **7**, 65 (1905) und M. E. Sinclair, *Ann. of math.* (2) **9**, 151 (1907).

Die Probleme der Brachistochrone und der kleinsten Rotationsfläche sind (bei Darstellung durch $x$ als unabhängige Veränderliche) Spezialfälle der schon von Euler (*Meth. inv.* Cap. II, art. 35) behandelten Aufgabe, das Integral $\int y^n \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ zu einem Minimum zu machen, mit der sich neuerdings A. Wiman, *Arch. Math. Phys.* (3) **13**, 41 (1908) und L. Bianchi, *Rom. Rend. Linc.* (5) **19**$_1$, 705 (1910) beschäftigt haben.

*Das isoperimetrische Problem im engeren Sinne.* Durch zwei Punkte eine Kurve von gegebener Länge zu legen, so daß die von dieser Kurve und der geraden Verbindungsstrecke der beiden Punkte eingeschlossene Fläche größer wird, als für jede andere dieselben Punkte verbindende Kurve gleicher Länge. Die gesuchte Kurve ist ein Kreisbogen. — Ebenso umschließt unter allen geschlossenen Kurven gleicher Länge der Kreis den größten Flächeninhalt.

Diese Maximaleigenschaft des Kreises ist seit dem Altertum bekannt und wurde auch oft nach anderen Methoden, als denen der Variationsrechnung behandelt; wir nennen z. B. C. Carathéodory und E. Study, *Math. Ann.* **68**, 137 (1910). W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916.

Von dieser speziellen Aufgabe haben die in § 5 behandelten allgemeineren Aufgaben den Namen *isoperimetrische Probleme* erhalten. — Sind in obiger Aufgabe die Endpunkte nicht gegeben, sondern sollen sie nur auf gegebenen Kurven liegen, (Problem der Dido), so muß, damit ein Minimum stattfindet, der Kreis auf beiden Kurven senkrecht stehen. Vgl. A. Kneser, *Math. Ann.* **56**, 169 (1903); A. St. Merrill, *Am. Journ.* **41**, 60 (1919).

*Gleichgewichtslage eines schweren hängenden Fadens.* In einer vertikalen Ebene unter allen (mit Masse konstanter Dichte belegten) zwei gegebene Punkte verbindenden Kurven gleicher Länge diejenige zu finden, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt. Die Lösung ist, wie schon den Brüdern Bernoulli, Huyghens und Leibniz bekannt war, die in der vertikalen Ebene dieser beiden Punkte verlaufende Kettenlinie. Vgl A. Kneser, *J f. Math* **125**, 189 (1903); J. Radon, *Wien. Ber.* **125**, 221 (1916). Auf diese Aufgabe läßt sich (P. Stäckel in *Ostwalds Klass.* Nr. 46, 142) vermöge der Guldinschen Regel auch die folgende Aufgabe (Euler, *Meth. inv.* Cap. V, art. 47) zurückführen: Unter allen, zwei gegebene Punkte einer Ebene verbindenden Kurven gleicher Länge diejenige zu finden, die bei Rotation um eine Achse die kleinste (größte) Rotationsfläche erzeugt.

*Rotationskorper größter Anziehung.* Unter allen homogenen Rotationskorpern gegebener Masse denjenigen zu finden, der auf einen im Durchstoßpunkte seiner Achse mit seiner Oberfläche befindlichen Massenpunkt (nach dem Newtonschen Gesetz) die größte Anziehung ausübt Es ergibt sich als Gleichung der Meridiankurve in Polarkoordinaten (mit dem Massenpunkt als Pol und der Rotationsachse als Achse): $r = a \cdot \sqrt{\cos\vartheta}$. Die Lösung war Gauß bekannt (vgl. *Werke* **5**, 31); ausführliche Behandlung: N. R. Wilson, *Trans. Soc. Canada* (3) **1**, 49 (1907).

Beispiele, bei denen höhere Ableitungen im Integranden vorkommen (§ 5), sind die beiden folgenden:

Den Kurvenbogen von vorgeschriebenen Endpunkten und Endtangenten zu finden, welcher mit den Normalen seiner Endpunkte und seiner Evolute eine moglichst kleine Fläche umschließt. Man erhält als Lösung Zykloidenbögen. (Zuerst von Euler behandelt: *Meth. inv.* Cap. II, art. 51.) Vgl. über diese Aufgabe, und eine, gleichfalls schon bei Euler (a. a O. art. 52) vorkommende Verallgemeinerung derselben: J. Radon, *Wien. Ber.* **119**, 1317 (1912); s. auch E. J. Miles, *Ann. of math.* (2) **14**, 14 (1912).

*Gleichgewichtslage einer elastischen Feder* (Euler, *Meth. inv, Additamentum I*). Unter allen Kurvenbogen gegebener Länge von gegebenen Endpunkten und Endtangenten diejenige zu finden, für welche das über die Kurve erstreckte Integral des reziproken Quadrates des Krümmungsradius: $\int \frac{ds}{\varrho^2}$ (potentielle

Energie) ein Minimum wird. Man findet die sog. *elastische Kurve.*

Es seien noch zwei (isoperimetrische) Probleme erwähnt, die gleichfalls auf die elastische Kurve als Extremalen führen: Unter allen zwei gegebene Punkte einer Ebene verbindenden Kurvenbögen von gegebener Länge denjenigen zu finden, der bei Rotation um eine gegebene Achse den Rotationskörper größten Volumens erzeugt (Euler, *Meth. inv.* Cap. V, art. 46; L. Koschmieder, *Diss. Breslau* 1913, 73). — Unter allen zwei gegebene Punkte einer Ebene verbindenden Kurvenbögen von gegebener Länge, die mit der $x$-Achse und den Ordinaten in den Endpunkten eine Fläche von gegebenem Inhalt einschließen, denjenigen zu finden, der bei Rotation um die $x$-Achse einen Rotationskörper von möglichst kleinem (großem) Volumen erzeugt. (Euler, *Meth. inv.* Cap. VI, art. 22; es ist dies ein Problem mit zwei isoperimetrischen Bedingungen).

Es sei noch bemerkt, daß nach J. Radon die Extremalen jedes räumlichen Variationsproblemes der Gestalt $\int \varphi(k)\,ds$, wo $s$ die Bogenlänge, $k$ die Krümmung bedeutet, durch Quadraturen gefunden werden können. Vgl. W. Blaschke, *Vorl. über Differentialgeometrie* I, §§ 23, 24

Ein isoperimetrisches Problem singulären Charakters ist das *Problem von Vieille:* Zwei parallele Ebenen durch eine Kurve gegebener Länge zu verbinden, deren Projektion in diese Ebenen größtmögliche Länge hat (vgl. Hadamard, *Leçons* 272). Ein ähnliches Problem hat C. Carathéodory behandelt (*Diss. Göttingen* 50 (1904)): Zwei Punkte einer Ebene durch eine Kurve gegebener Länge so zu verbinden, daß die Projektion dieser Kurve auf eine gegebene, die Ebene berührende Kugel größt- oder kleinst-mögliche Länge hat Vgl. G. Vivanti, *El. d. calc. d. var.* 93, 235.

Ein Lagrangesches Problem (§ 6) ist, wie schon erwähnt, das Problem der Brachistochrone im widerstehenden Mittel. Ein anderes ist das folgende (Problem von Delaunay, *J. éc polyt* **17**, cah. 29, 97 (1912)): Unter allen zwei gegebene Raumpunkte verbindenden Kurven von konstanter Krümmung die kürzeste zu finden; es sei verwiesen auf O. Venske, *Gött. Diss.* 1891 Hierzu vgl. auch W. Blaschke, *Vorl. über Differentialgeometrie* I, §§ 28—31, § 55. G. Vivanti, *El. d. calc. d. var.* 144.

Auf ein Mayersches Problem führt eine Aufgabe: in einem widerstehenden Mittel zwei Punkte $P_1$ und $P_2$ so durch eine

Kurve zu verbinden, daß ein entlang dieser Kurve fallender Punkt, der von $P_1$ mit gegebener Geschwindigkeit ausgeht, in $P_2$ mit größtmöglicher Geschwindigkeit ankommt. Vgl. Hadamard, *Leçons* 256.

Ein wichtiges Beispiel eines isoperimetrischen Problemes für Doppelintegrale ist das folgende: Unter allen geschlossenen Flächen, die ein gegebenes Volumen einschließen, diejenige von kleinster Oberfläche zu finden. Als Lösung ergibt sich die Kugel. Siehe H. A. Schwarz, *Ges. Abh.* **2**, 237; J. O. Müller, *Diss. Gött.* 1903; L. Tonelli, *Rend. Pal.* **39**, 109 (1915); W. Gross, *Monatsh. f. Math. u. Phys* **28**, 77 (1917); W. Blaschke, *Kreis und Kugel.* Vgl. auch H Minkowski (*Math. Ann* **57**, 447 = *Ges. Abh.* **2**, 230).

Von besonderem Interesse ist das folgende isoperimetrische Problem für Doppelintegrale: das Integral (127) zu einem Minimum zu machen unter der Nebenbedingung

$$\int z^2 dx\, dy = 1 .$$

Für die Extremalen ergibt sich die partielle Differentialgleichung der schwingenden Membran:

$$\Delta z + \lambda z = 0. \tag{129}$$

Über den Zusammenhang dieses Variationsproblems mit der Theorie der Eigenwerte und Eigenlösungen der Gleichung (129) und über verwandte allgemeinere Probleme vgl. R Courant, *Math. Zeitschr.* **7**, 1 (1920); *Math Ann.* **85**, 280 (1922).

Allgemeine Behandlung von isoperimetrischen Problemen fur Doppelintegrale: G. Kobb, *Acta math.* **17**, 321 (1893); W. Groß, *Monatsh. f. Math u. Phys* **28**, 77 (1917).

Über die Probleme der geodätischen Linien und der Minimalflächen siehe Rep. $II_2$ (S. 1084, 1109). Wegen der Variationsprinzipe der Mechanik sei verwiesen auf die Lehrbücher der analytischen Mechanik

Viele Beispiele findet man behandelt bei Euler, *Methodus inveniendi* (Lausanne, 1744; in deutscher Übersetzung von P. Stackel in *Ostwalds Klass.* Nr. 46); ferner bei Moigno-Lindelöf, *Calcul diff et integr* 4; *Calcul des variations*, Paris 1861; ferner ein Verzeichnis von Beispielen und einschlägiger Literatur bei Pascal, *Calc. dell. var.* §§ 30—34.

Es sei auch noch auf die Umkehrung des Problemes der Variationsrechnung verwiesen: zu einer vorgegebenen Differentialgleichung ein Variationsproblem zu suchen, dessen Euler-

Lagrangesche Gleichung sie ist. Vgl. hierüber: Darboux, *Surfaces* **3**, Nr. 604—606; A. Hirsch, *Math. Ann.* **49**, 49 (1897), **50**, 429 (1898); J. Kürschák, *Math. Ann.* **60**, 157 (1905); **62**, 148 (1906); G. A. Bliss, *Ann. of math.* (2), **9**, 127 (1907).

Die Aufgabe, alle Integrale zu finden, deren Extremalen die Geraden einer Ebene sind, wurde ausführlich behandelt von G. Hamel, *Gött. Diss.* 1901; *Math. Ann.* **57**, 231 (1903) (daselbst auch Literaturangaben). Die analoge Aufgabe für Kreise hat E. E. Stromquist behandelt (*Am. Trans.* **7**, 175 (1906)), für die Geraden des Raumes G. Koenigs, *C. R.* **121**, 1122 (1895).

Über die Aufgabe, zu einer vorgegebenen Transversalitätsbedingung alle zugehörigen Variationsprobleme zu finden: C. E. Stromquist, *Ann. of math.* (2), **9**, 57 (1907), wo speziell auch die Aufgabe durchgerechnet ist, alle Variationsprobleme der Form $\int f(x, y, y')\,dx$ zu finden, für welche die Transversalität sich auf Orthogonalität reduziert.

Beim räumlichen Variationsprobleme in Parameterdarstellung: das Integral $\int F(x, y, z, x', y', z')\,dt$ zu einem Minimum zu machen, lautet die Bedingung dafür, daß die Richtung $dx : dy : dz$ die Richtung $x', y', z'$ transversal schneide:

$$F_{x'}(x, y, z, x', y', z')\,dx + F_{y'}(x, y, z, x', y', z')\,dy + F_{z'}(x, y, z, x', y', z')\,dz = 0;$$

sie ist im allgemeinen nicht symmetrisch in den beiden Richtungen. W. Blaschke hat gezeigt (*Leipz. Ber.* **68**, 50 (1916); *Math. Zeitschr.* **8**, 119 (1920)), daß (bei einem regulären Variationsprobleme) die Transversalitätsbedingung dann und nur dann symmetrisch ist, wenn $F$ die Quadratwurzel aus einer quadratischen Form in $x', y', z'$ ist

## Kapitel XV.

# Funktionentheorie.

Von *Gustav Doetsch* in Stuttgart.

---

## I. Abschnitt.

## Grundbegriffe.

### § 1. Die komplexe Zahl.

Wegen der Definition der komplexen Zahlen und der elementaren Rechenoperationen mit ihnen wird auf Rep. $\mathbf{I}_1$, S. 11—14, verwiesen.

Eine komplexe Zahl $z = x + yi$ läßt sich in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem als Punkt mit den Koordinaten $x, y$ deuten, oder auch als Vektor mit den Komponenten $x, y$, der vom Nullpunkt zu jenem Punkt hinführt. Ist $y = 0$, so sei vereinbart, daß statt $z = x + 0i$ auch einfach $z = x$ geschrieben und diese Zahl als gleichbedeutend mit der reellen Zahl $x$ angesehen werden darf. Ist $x = 0$, so kann einfach $z = yi$ geschrieben werden, und eine solche Zahl heißt (rein) imaginär. Im Anschluß daran nennt man $x$ den *reellen*, $y$ den *imaginären Bestandteil* von $z = x + yi$, geschrieben:

$$x = \Re z, \quad y = \Im z.$$

Es ist stets möglich, eine positive Zahl $r$ und eine reelle Zahl $\varphi$ so zu bestimmen, daß:

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi$$

wird. $r$ erweist sich als eindeutig:

$$r = \left| \sqrt{x^2 + y^2} \right|$$

und heißt der *Modul* (nach Cauchy) oder der *absolute Betrag* von $z$, geschrieben: $r = |z|$ (nach Weierstraß), und bedeutet

geometrisch den Abstand des Punktes $z$ vom Nullpunkt. $\varphi$ dagegen ist für $z = 0$ völlig unbestimmt, im anderen Fall nur bis auf ganzzahlige Multipla von $2\pi$ bestimmt durch die Gleichungen:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

und stellt sich geometrisch dar durch den mit derselben Vieldeutigkeit behafteten Winkel zwischen der positiven Richtung der $x$-Achse und dem Strahl vom Nullpunkt zum Punkte $z$. $\varphi$ heißt das *Argument* von $z$, geschrieben $\varphi = \arg z$ oder der *Arcus* von $z$, geschrieben $\varphi = \operatorname{arc} z$. Es ist $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. $r$ und $\varphi$ sind nichts anderes als die Polarkoordinaten des Punktes $z$.

Für funktionentheoretische Zwecke ist es häufig günstig, die komplexen Zahlen nicht in einer Ebene, sondern nach Riemann auf einer Kugel geometrisch zu repräsentieren (bekannt geworden ist diese Art der Darstellung zuerst durch C. Neumann, *Vorles. über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale,* Leipzig 1865 (4. Vorles.), 2. Aufl. 1884 (3. Kap.), daher auch *„Neumannsche Kugel"*). Man braucht dazu nur die komplexe Ebene durch stereographische Projektion auf eine Kugel, die sie im Nullpunkt berührt, abzubilden, indem man jedem Punkte $P$ der Ebene den Punkt $P'$ der Kugel zuordnet, in dem der Strahl vom Gegenpol $N$ des Berührungspunktes zu $P$ hin die Kugel schneidet. So gehört zu jedem $P$ ein $P'$; auch das Umgekehrte ist der Fall, bis auf eine Ausnahme: Der Punkt $P' = N$ hat kein Bild in der $z$-Ebene. Nun entspricht einer Schar von Kreisen, die sich auf $N$ zusammenziehen, in der Ebene eine Schar von Kreisen, die immer größer werden. Man legt daher der Ebene noch einen sogenannten *„unendlich fernen" Punkt* bei, dem man das Zahlensymbol $\infty$ gibt und den man dem Punkte $N$ entsprechen läßt; er ist demnach als außerhalb jedes noch so großen Kreises der $z$-Ebene liegend zu denken. (In der komplexen Ebene hat man es kraft dieser Festsetzung also nur mit *einem* unendlich fernen Punkt zu tun, während man bei der Veranschaulichung der reellen Zahlen auf einer Geraden gewöhnlich zwei, $+\infty$ und $-\infty$, annimmt, eine Unterscheidung, die im Komplexen auf der Achse des Reellen wegfällt. Die komplexe Zahlenebene ist somit auch eine andere als die Ebene der projektiven Geometrie, die aus der gewöhnlichen Ebene durch Hinzunahme von unendlich vielen „uneigentlichen" oder „unendlich fernen" Punkten hervorgeht, die auf einer Geraden lokalisiert gedacht werden.)

## § 2. Mengenlehre.

Unter einer *Punktmenge* verstehen wir eine Gesamtheit von Punkten in der komplexen Ebene, die durch irgendeine Eigenschaft so charakterisiert ist, daß man von jedem Punkt entscheiden kann, ob er dazu gehört oder nicht. — Eine allen Ansprüchen genügende Definition des Mengenbegriffs, d. h. eine Zurückführung auf noch primitivere Begriffe, die die Menge als etwas erscheinen läßt, worunter die in der Mathematik auftretenden „Mengen" fallen, stößt auf große Schwierigkeiten; vgl. außer der in Rep. $I_1$, S. 17 und 26 angeführten Literatur Weyl, *Das Kontinuum*, Leipzig 1918; *Math. Zeitschr.* **10** (1921) S. 39 [S. 66]; Brouwer, *Verhandel. Akad. Amsterdam* 1918, 1919; *Math-Ver* **28** (1920) S. 203; *Math. Ann.* **93** (1925) S. 244; **95** (1925) S. 453; Schoenflies, *Math. Ann.* **83** (1921) S. 173; Russell, *Einf. i. d. math. Philosophie*, München 1923, S. 182; Fraenkel, *Math. Zeitschr.* **22** (1924) S. 250; J. v. Neumann, *J. f. Math.* **154** (1925) S. 219

Unter dem *Durchschnitt* von endlich oder unendlich vielen Mengen versteht man die Gesamtheit der ihnen gemeinsamen Punkte.

Eine Menge, die in ein Quadrat von endlicher Seitenlänge eingeschlossen werden kann, heißt *beschränkt*.

Unter einer *Umgebung* eines Punktes verstehen wir eine Menge, die die Punkte eines Kreises um diesen Punkt als Teilmenge enthält [1])

Ein Punkt heißt *innerer* Punkt einer Menge, wenn eine gewisse Umgebung des Punktes existiert, die ganz zur Menge gehört

Ein Punkt heißt *Häufungspunkt* einer Menge, wenn jede Umgebung des Punktes mindestens einen Punkt der Menge enthält, der von jenem verschieden ist. — Jede unendliche Menge hat mindestens einen Häufungspunkt (Satz von Weierstraß). Dieser braucht nicht zur Menge zu gehören. — Die Menge der Häufungspunkte heißt die *Ableitung* der ursprünglichen Menge.

Eine Menge, die ihre Häufungspunkte enthält, heißt *abgeschlossen*.

---

1) Für den Punkt $\infty$ ist diese Definition folgendermaßen zu modifizieren: Unter einer Umgebung des Punktes $\infty$ versteht man eine Menge, die das Äußere eines hinreichend großen Kreises enthält.

Eine Menge, die einen und nur einen Häufungspunkt besitzt, heißt *konvergent*. Der Häufungspunkt selbst heißt der *Grenzwert* der Zahlen, die durch die Menge repräsentiert werden. Eine konvergente Menge ist stets *abzählbar*, d. h. ihre Elemente lassen sich eineindeutig den positiven ganzen Zahlen zuordnen und daher numerieren: $z_1, z_2, \cdots$. Ist $z$ der Grenzwert, so schreibt man: $\lim\limits_{n=\infty} z_n = z$ oder $z_n \to z$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine „Folge" $z_1, z_2, \cdots$ den Grenzwert $z$ hat, lautet: Jedem positiven (noch so kleinen) $\delta$ läßt sich eine ganze Zahl $N$ gegenüberstellen derart, daß für $n \geqq N$ und $m > 0$:

$$|z_{n+m} - z_n| < \delta$$

ist (allgemeines Konvergenzkriterium).

Unter einem *Gebiet* versteht man eine offene, d. h. nur aus inneren Punkten bestehende Menge, die zusammenhängend ist, d. h. die sich nicht in zwei Mengen mit nur inneren Punkten zerlegen läßt. Mit dieser letzten Bedingung ist folgende äquivalent: Je zwei Punkte der Menge müssen sich durch einen Polygonzug von endlich vielen Seiten verbinden lassen, dessen Punkte sämtlich zur Menge gehören; oder auch: Zwischen je zwei Punkte der Menge muß man endlich viele Kreise, die nur Punkte der Menge enthalten, so einschalten können, daß je zwei konsekutive sich teilweise überdecken, während der erste und der letzte jene beiden Punkte zu Mittelpunkten haben.

Diejenigen Häufungspunkte eines Gebietes, die nicht dazu gehören, bilden seine *Begrenzung* oder seinen *Rand*. — Durch Hinzurechnung der Begrenzung zu dem Gebiet entsteht eine abgeschlossene Menge, die man einen *Bereich* nennt.

In der Literatur werden die Ausdrücke Gebiet und Bereich häufig als gleichbedeutend gebraucht, und zwar sowohl für die offene als auch für die abgeschlossene Menge, wodurch leicht Mißverständnisse entstehen. Um diese zu vermeiden, spricht man, solange die obige, von Schoenflies (*Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen,* 1 Hälfte, Leipzig und Berlin 1913, S. 24 Anm 1; vgl. auch *Enzykl.* II$_3$ Heft 7, S 899) vorgeschlagene Unterscheidung sich nicht durchgesetzt hat, am besten von „offenem Gebiet" und „abgeschlossenem Bereich"

Der *Abstand* zweier Gebiete ist die untere Grenze der Abstände der Punkte des einen Gebietes von denen des anderen.

Unter einem *Kontinuum* versteht man eine abgeschlossene Menge, die nicht in zwei abgeschlossene Mengen zerlegt werden kann.

Ein Gebiet heißt *n-fach zusammenhängend*, wenn seine Begrenzung aus $n$ Kontinuen besteht. $n$ kann gleich 0 sein (dann

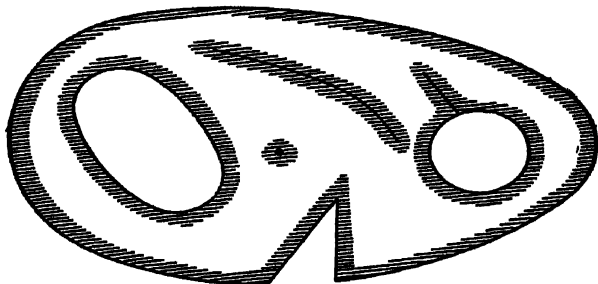



Fig 1. Beispiel eines fünffach zusammenhängenden Gebietes.

ist das Gebiet die ganze Ebene inkl. $\infty$) oder gleich 1, 2, usw. oder auch unendlich.

Unter den geometrischen Gebilden, die man anschaulich „*Kurven*" nennt, sind für die Funktionentheorie die rektifizierbaren und die sogenannten Jordankurven besonders wichtig.

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sei die Gleichung einer Kurve in Parameterform, wo $t$ von $t_0$ bis $T$ variieren soll; $\varphi$ und $\psi$ seien stetige Funktionen. Man schalte zwischen $t_0$ und $T$ die Werte $t_1, \ldots, t_{n-1}$ ein, setze $T = t_n$ und $\varphi(t_\nu) = x_\nu$, $\psi(t_\nu) = y_\nu$. Dann ist:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2} \right|$$

die Länge eines der Kurve einbeschriebenen Polygons. Strebt dieser Ausdruck, wenn die Differenzen $t_\nu - t_{\nu-1}$ gegen 0 abnehmen und ihre Anzahl demgemäß wächst, gegen einen bestimmten Wert, unabhängig von der Art des Grenzübergangs, so heißt die Kurve *rektifizierbar* (Jordan, *Cours d'analyse* 1, 3ᵉ éd., Paris 1909, S. 99) Der Grenzwert heißt die *Länge* der Kurve.

Sind $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ stetige Funktionen und haben bei bestimmten $x, y$ die Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ höchstens eine gemeinsame Lösung in dem Intervall $t_0 \leqq t \leqq T$, so stellt das Gleichungspaar $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ eine *offene Jordankurve* dar. Entspricht jedoch den Werten $t_0$ und $T$ und nur diesen derselbe

Punkt $x, y$, so handelt es sich um eine *geschlossene Jordankurve*. Eine Jordankurve ist also eine offene oder geschlossene stetige, doppelpunktlose Kurve (Jordan, *Cours d'analyse* **1**, 3ᵉ éd., 1909, S. 90—99). Man kann sie auffassen als eineindeutiges, stetiges Abbild einer Strecke bzw. einer Kreisperipherie (Hurwitz, *Verhandl. d. ersten internat. Math. Kongr. in Zürich 1897*, Leipzig 1898, S. 91 [S. 102]).

Der *Fundamentalsatz*, der die Verwendbarkeit dieser allgemeinen Kurvenklasse gewährleistet, lautet: Eine geschlossene Jordankurve teilt die Ebene in zwei Gebiete, von denen das eine (das „Innere") im Endlichen liegt, während das andere (das „Äußere") den Punkt $\infty$ enthält. Jedes der beiden Gebiete hat die Jordankurve zur Begrenzung, d. h. das Abbild eines Kreises verhält sich auch mengentheoretisch zu den Punkten der Ebene wie ein Kreis. (Beweis von Jordan, *a. a. O.*, unter Voraussetzung seiner Gültigkeit für Polygone; ein vom Standpunkt der Mengenlehre vollkommen befriedigender Beweis von Brouwer, *Math. Ann.* **69** (1910) S. 169; s. auch Winternitz, *Math. Zeitschr.* **1** (1918) S. 329; Pringsheim, *Münch. Ber.* 1922, S. 187; E. Schmidt, *Berl. Sitzungsber.* 1923, S. 318; Hartogs, *Math. Zeitschr.* **22** (1925) S. 62)

## § 3. Die Funktion.

### Der allgemeine Funktionsbegriff.

Denken wir unter $z$ nicht eine bestimmte komplexe Zahl, sondern bilden wir die Vorstellung, daß $z$ jedes Individuum einer gewissen Menge von komplexen Zahlen, d. h. jeden Punkt einer gewissen ebenen Punktmenge bedeuten darf, so nennen wir $z$ eine *komplexe Variable*.

Haben wir zwei komplexe Variable $z = x + yi$ und $w = u + vi$, die wir uns durch Punkte in einer $z$- oder $xy$- und einer $w$- oder $uv$-Ebene repräsentiert denken wollen, so heißt $w$ eine *Funktion* von $z$:

$$w = f(z),$$

wenn zwischen den $z$ und den $w$ ein Zusammenhang besteht in der Weise, daß jedem Punkte einer bestimmten $z$-Menge ein oder mehrere oder auch unendlich viele Punkte in der $w$-Ebene zugeordnet sind. Demgemäß unterscheidet man *eindeutige*, *mehrdeutige* und *unendlich vieldeutige* Funktionen. Die Funktion heißt

auf der betreffenden $z$-Menge definiert. Man spricht auch von einer *Abbildung* der $z$- auf die $w$-Ebene und von den Bildpunkten eines Punktes $z$ in der $w$-Ebene. Das Verhältnis ist ein wechselseitiges, man kann alsbald auch $z$ als Funktion von $w$ auffassen.

Dieser Funktionsbegriff, der seinem Wesen nach auf Dirichlet (*Repertorium der Physik* hrsg. von Dove und Moser **1** (1837) S 152 = *Werke* **1** S. 135 = Ostwalds Klassiker Nr. 116) zurückgeht, wird nicht allgemein anerkannt, sondern erfährt bei den einzelnen Autoren mehr oder weniger starke Einschränkungen je nach der Art, wie sie die Grundlegung der Mathematik vollziehen. (Vgl. die S. 687 zitierte Literatur.)

In der Funktionentheorie, wie sie in diesem Kapitel verstanden wird, liegt das Schwergewicht nicht auf dieser Frage, so daß sie ohne ernsteren Schaden beiseite gelassen werden kann. Offenbar kommt der Begriff der komplexen Funktion einer komplexen Variabeln darauf hinaus, daß man zwei reelle Funktionen $u$, $v$ zweier reeller Variablen $x$, $y$ betrachtet. Die folgenden Definitionen sollen dazu dienen, diesen sehr allgemeinen Begriff so einzuengen, daß sich inhaltreiche Behauptungen darüber aufstellen lassen

Stetigkeit.

Die Funktion $w = f(z)$ sei in einem Punkt $z_0$ und einer gewissen Umgebung desselben definiert und eindeutig $f$ heißt dann in $z_0$ stetig, wenn sich jeder positiven Zahl $\delta$ eine positive Zahl $\varepsilon$ gegenuberstellen laßt, so daß für jeden zum Definitionsbereich der Funktion gehörigen Punkt $z$ der Kreisfläche $|z - z_0| < \varepsilon$ die Ungleichung besteht:

$$|f(z) - f(z_0)| < \delta,$$

d. h. wenn man jedem (noch so kleinen) Kreis um den Punkt $w_0 = f(z_0)$ einen Kreis um $z_0$ zuordnen kann, derart, daß das Bild des letzteren Kreises ganz in jenem ersteren liegt.

Wenn eine Funktion in jedem Punkte eines Gebietes definiert und stetig ist, so heißt sie in dem Gebiet stetig.

Bisweilen wird der Begriff der Stetigkeit auch auf die Randpunkte eines Gebietes ausgedehnt. Hier ist die Funktion nicht in einer vollen Umgebung des Punktes gegeben, die Definition der Stetigkeit bleibt im übrigen dieselbe.

Ist $f(z)$ stetig, so gilt dasselbe auch für $|f(z)|$.

Ist eine Funktion $f(z)$ in einer Umgebung eines Punktes $z_0$ mit eventueller Ausnahme von $z_0$ definiert und kann man ihr

in $z_0$ einen Wert $f_0$ so beilegen, daß sie in $z_0$ stetig wird, so heißt $f_0$ der Grenzwert oder limes, dem sich die Funktion nähert, wenn $z$ gegen $z_0$ strebt. Kurz ausgedrückt:

$$f(z) \to f_0 \quad \text{für} \quad z \to z_0 .$$

Differenzierbarkeit.

Ist eine Funktion $f(z)$ in einem Punkte $z_0$ und einer gewissen Umgebung eindeutig definiert, so heißt sie in $z_0$ differenzierbar, wenn der Differenzenquotient:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

der eine in jener Umgebung außer für $z = z_0$ definierte Funktion von $z$ ist, für $z \to z_0$ einen Grenzwert besitzt, den man dann den *Differentialquotienten* oder die *Ableitung* von $f(z)$ nennt und mit $\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0}$ oder $f'(z_0)$ bezeichnet. — Anders ausgedrückt: Es muß eine Zahl $f'(z_0)$ geben und jedem $\delta > 0$ sich ein $\varepsilon > 0$ derart gegenüberstellen lassen, daß für $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ die Ungleichung besteht:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \delta .$$

(Cauchy, *Leçons sur le calcul différentiel*, 1829, S 138 = *Œuvres* (2) **4** S. 431).

Wie im Reellen nennt man die Ableitung auch „erste Ableitung“ und definiert die „zweite Ableitung“ als Differentialquotienten der ersten usw.

Für das Differenzieren gelten wie im Reellen die Regeln: Sind $f(z)$ und $g(z)$ in einem Punkte $z$ und einer gewissen Umgebung eindeutig definiert und ist $\alpha$ eine komplexe Konstante, so gilt:

$$\frac{d(\alpha f)}{dz} = \alpha \frac{df}{dz},$$

$$\frac{d(f \pm g)}{dz} = \frac{df}{dz} \pm \frac{dg}{dz},$$

$$\frac{d(f\,g)}{dz} = g\frac{df}{dz} + f\frac{dg}{dz},$$

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dz} = \frac{g\frac{df}{dz} - f\frac{dg}{dz}}{g^2} \quad \text{für} \quad g(z) \neq 0,$$

vorausgesetzt, daß die Größen auf den rechten Seiten existieren.

Ist eine Funktion in einem Punkte differenzierbar, so ist sie dort notwendig stetig (aber nicht umgekehrt).

Kettenregel: Es sei $w = f(z)$ im Punkte $z_0$ differenzierbar. $z$ sei seinerseits eine Funktion der Variablen $\zeta$: $z = g(\zeta)$, die im Punkte $\zeta_0$ differenzierbar ist, und es sei $g(\zeta_0) = z_0$. Dann ist die Funktion $w = f(g(\zeta)) \equiv F(\zeta)$ in $\zeta_0$ und einer gewissen Umgebung definiert, in $\zeta_0$ differenzierbar, und es gilt:

$$F'(\zeta_0) = f'(z_0) \cdot g'(\zeta_0).$$

Umkehrfunktion: Es sei $w = f(z)$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ eindeutig definiert, in einem Punkte $z_0$ von $\mathfrak{G}$ differenzierbar und $f'(z_0) \neq 0$; $f(z)$ nehme in verschiedenen $z$-Punkten stets auch verschiedene $w$-Werte an, und die hiernach auf diesen $w$-Punkten eindeutig definierte Umkehrfunktion $z = \varphi(w)$ sei im Punkte $w_0 = f(z_0)$ stetig. Dann ist $z = \varphi(w)$ in $w_0$ differenzierbar, und zwar ist $\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$ (vgl. auch S 736).

Die Existenz der Ableitung der komplexen Funktion $w = f(z)$ in einem Punkte zieht für die reellen Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$, die ihren reellen und imaginären Bestandteil bilden, die Existenz der partiellen Ableitungen 1. Ordnung, sowie das Bestehen folgender partieller Differentialgleichungen nach sich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Sie heißen die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*. (Cauchy, *Mémoire sur les intégrales définies* (1814) = *Œuvres* (1) **1** S 319 [S 338] in etwas allgemeinerer Gestalt; *Exercices d'analyse et de physique mathématique* **4** (1847) S. 345; Riemann, *Dissert.* 1851 = *Werke*, 2. Aufl 1892, S 3 [S. 6]. Diese Gleichungen treten häufig in der mathematischen Physik auf und wurden schon lange vor Begründung der Funktionentheorie behandelt, zuerst von d'Alembert, *Essai d'une nouvelle méthode de la résistance des fluides*, Paris 1752; ferner von Euler 1777 (*Nova Acta Petrop.* **7**, **10**, **14**); vgl hierzu Stäckel, *Bibl. Math.* (3) **1** (1900) S 109)

Die Ableitung von $w = f(z)$ läßt sich durch die Ableitungen ihrer Komponenten folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

(oder auf eine der anderen Arten, die hieraus durch Anwendung der Cauchy-Riemannschen Gleichungen folgen).

### Das bestimmte Integral.

$\mathfrak{C}$ sei eine ganz in einem Bereich $\mathfrak{B}$ verlaufende, stetige und rektifizierbare Kurve mit dem Anfangspunkt $z = a$ und dem Endpunkt $z = b$. (Durch die Unterscheidung Anfangspunkt — Endpunkt soll angedeutet werden, daß auf $\mathfrak{C}$ ein Richtungssinn ausgezeichnet ist.) Die Funktion $f(z)$ sei längs $\mathfrak{C}$ eindeutig definiert. Auf $\mathfrak{C}$ werden $n-1$ Teilpunkte $z_1, \ldots, z_{n-1}$ angenommen und $a = z_0$, $b = z_n$ gesetzt, ferner bedeute $\zeta_\nu$ einen beliebigen Punkt auf dem Kurvenbogen $z_{\nu-1} z_\nu$. Hat dann die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1}),$$

wenn man die Unterteilung von $\mathfrak{C}$ fortgesetzt so verfeinert, daß die Länge der Kurvenbogen $z_{\nu-1} z_\nu$ gegen 0 strebt, einen Grenzwert, der unabhängig ist von der Art des Grenzübergangs, so heißt dieser das *bestimmte Integral* von $f(z)$ entlang der Kurve $\mathfrak{C}$, geschrieben

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz.$$

Die Funktion selbst heißt *integrierbar* oder *integrabel*. Das Integral existiert z. B. stets, wenn $f(z)$ entlang des Integrationsweges $\mathfrak{C}$ stetig ist.

Wie im Reellen gelten die Regeln:

$$\int_{\mathfrak{C}} \alpha f(z)\,dz = \alpha \int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz \quad (\alpha = \text{const}),$$

$$\int_{\mathfrak{C}} (f(z) + g(z))\,dz = \int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz + \int_{\mathfrak{C}} g(z)\,dz,$$

falls die rechten Seiten existieren.

Ist $\mathfrak{C}'$ der Kurvenbogen, der dieselbe Lage, aber entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{C}$ hat, so ist

$$\int_{\mathfrak{C}'} f(z)\,dz = -\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz.$$

Besteht $\mathfrak{C}$ aus zwei Teilbogen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, so ist

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{C}_1} f(z)\,dz + \int_{\mathfrak{C}_2} f(z)\,dz.$$

Ist $z = \varphi(u)$ eine in allen Punkten eines Gebietes $\mathfrak{D}$ der $u$-Ebene differenzierbare Funktion und durchläuft, wenn $u$ eine Kurve $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{D}$ durchwandert, $z$ den Weg $\mathfrak{C}$, so ist

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{K}} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du.$$

Ist $|f(z)| < M$ längs des Integrationsweges und hat dieser selbst die Länge $L$, so besteht die *Abschätzung*

$$\left|\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz\right| \leqq ML.$$

Ist $f(z)$ und damit auch $|f(z)|$ stetig und bedeutet $s$ die Bogenlänge von $\mathfrak{C}$, so gilt

$$\left|\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz\right| \leqq \int_0^L |f(z)|\,ds.$$

Das komplexe Integral kann durch *reelle Kurvenintegrale* (vgl. *Rep.* $\mathrm{I}_1$, Kap. VIII, § 6) ausgedrückt werden, falls diese existieren:

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{C}} [u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy]$$
$$+ i\int_{\mathfrak{C}} [v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy].$$

Man erhält die rechte Seite, indem man auf der linken $f = u + vi$ und symbolisch $dz = dx + dy\,i$ setzt:

$$\int_{\mathfrak{C}} (u + vi)\,(dx + dy\,i),$$

und formal ausmultipliziert

Ist die Kurve $\mathfrak{C}$ in Parameterform gegeben:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

und besitzen speziell $x(t)$ und $y(t)$ stetige Ableitungen, so läßt sich das komplexe Integral unter Voraussetzung seiner Existenz sogar durch ein *gewöhnliches Integral* folgendermaßen darstellen:

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} [u(x(t), y(t)) + v(x(t), y(t))\,i]\,[x'(t) + y'(t)\,i]\,dt,$$

wobei $t_0$ und $t_1$ die den Enden der Kurve $\mathfrak{C}$ entsprechenden Parameterwerte sind.

Die an die Spitze gestellte allgemeine Definition, die von dem Integrationsweg nur Rektifizierbarkeit voraussetzt, rührt von Jordan (*Cours d'analyse* **1**, 3e éd., 1909, S. 185) her. Sie ist deshalb dem Wesen der Sache am besten angepaßt, weil eine solche Kurve beliebig genau durch ein Sehnenpolygon approximiert werden kann und gerade diese Eigenschaft bei den späteren Beweisen eine Hauptrolle spielt.

Die erste (weniger umfassende) exakte Definition des bestimmten Integrals im komplexen Gebiet wurde in gewöhnlicher und in Parameterform zuerst von Cauchy gegeben (*Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*, Paris 1825, S. 2—5 = *Ostwalds Klassiker* Nr. 112; vorbereitet durch das S. 693 genannte Mémoire von 1814 und einige Abhandlungen von 1822)

Schon vor Cauchy hatte man Integrale zwischen komplexen Grenzen ausgewertet, aber rein formal, indem man unbesehen die vom reellen Gebiet her bekannten Formeln verwendete. Aus den Bemühungen Cauchys, diesem Verfahren eine sichere Grundlage zu geben, ist seine Funktionentheorie erwachsen.

Man kann den obigen Integralbegriff („eigentliches" Integral) auf solche Fälle verallgemeinern, wo der Integrationsweg sich ins Unendliche erstreckt oder wo auf einem endlichen Wege isolierte Punkte liegen, in denen das Verhalten der Funktion die Integrabilität stört. Ein solches „uneigentliches" Integral definiert man wie im Reellen als Grenzwert (vorausgesetzt, daß er existiert) von eigentlichen Integralen, von deren Integrationswegen jener Weg die Grenze ist. Als Beispiel sei die Hankelsche Formel für die $\Gamma$-Funktion (*Zeitschr. Math Phys.* **9** (1864) S. 1) erwähnt, die im Gegensatz zu der üblichen Definitionsformel (vgl S. 727) für alle $z$ gültig ist:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int t^{-z} e^t dt,$$

erstreckt über den Weg $\mathfrak{C}_1$ (s. Fig 2) oder $\left(t = \frac{1}{u}\right)$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int u^{z-2} e^{\frac{1}{u}} du,$$

erstreckt über den Weg $\mathfrak{C}_2$ (es ist $0 < \varepsilon < 1$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$). Für die Definition von $e^t$ s. S. 715; unter $t^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon \lg t}$ ist der Hauptzweig dieser Funktion (s. S. 731) zu verstehen.

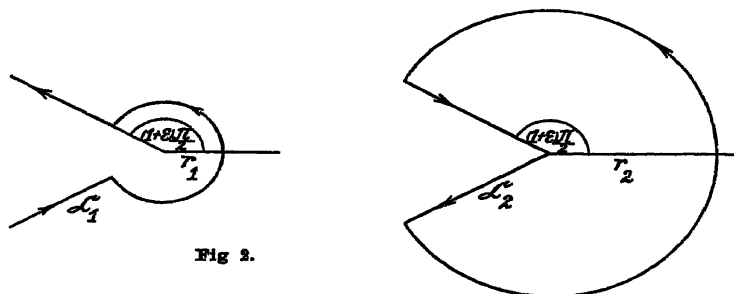



Fig 2.

### Begriff der regulären Funktion.

Ist eine Funktion $f(z)$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ eindeutig definiert und besitzt sie in jedem Punkt von $\mathfrak{G}$ eine Ableitung $f'(z)$, so heißt sie eine in $\mathfrak{G}$ *reguläre Funktion*. Ein zum Regularitätsgebiet gehöriger Punkt wird auch kurz ein *regulärer Punkt* der Funktion genannt. Andere Bezeichnungsweisen, die meist zur Zeit der Begründung der Funktionentheorie von verschiedenen Autoren angewandt worden sind, um gewisse Eigenschaften dieser Funktionsklasse in den Vordergrund zu stellen, sind: *holomorph*, *monogen*, *analytisch*, *synektisch*. (Vgl. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique*. Paris 1901 [Scientia Nr. 12] Chap. I.) — Manchmal vereinfacht es die Ausdrucksweise, wenn man von Funktionen spricht, die in einem abgeschlossenen Bereich regulär sind; damit soll stets gemeint sein, daß die Funktion noch in einem größeren offenen Gebiet, daß jenen Bereich enthalt, regulär ist.

Unter Funktionentheorie schlechtweg versteht man heutzutage die Theorie der regulären Funktionen. Der Anlaß, gerade diese Funktionen eingehend zu erforschen, liegt darin, daß einerseits ihre Definition hinreichend weit erscheint, um die meisten der in anderen Gebieten der Mathematik auftretenden Funktionen unter sich zu begreifen, daß aber andererseits diese Klasse von Funktionen sich als hinreichend eng erweist, um darüber weitgehende Theoreme von hoher Eleganz und Abrundung aussagen zu können.

Die regulären Funktionen können, wie sich später zeigt, auch noch auf andere Arten definiert werden. Die Forderung

der *Differenzierbarkeit* wurde von Cauchy zur Grundlage seiner Theorie gemacht, der ersten Funktionentheorie im modernen Sinne (Augustin Baron de Cauchy, 1789—1857. Siehe die Sätze in *Exerc. d'anal.* **1** (1840) S. 269 = *Œuvres* (2) **11** S. 331, ferner **4** (1847) S. 345). Die wichtigsten Ergebnisse erwuchsen ihm schon früh aus der Beschäftigung mit den bestimmten Integralen. Grundlegend ist vor allem das S. 696 erwähnte Mémoire von 1825. — Wesentliche Einsichten hat, wie aus Briefwechsel und Nachlaß hervorgeht, auch Carl Friedrich Gauß (1777—1855) besessen, ohne etwas darüber zu publizieren.

Bei einer regulären Funktion sind im ganzen Regularitätsgebiet die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* erfüllt, die für Bernhard Riemann (1826—1866) in seiner Inauguraldissertation (1851, *Werke,* 2. Aufl. Leipzig 1892, S. 3) den Ausgangspunkt seiner ganzen Behandlung der Funktionentheorie bildeten. Daß auch das Umgekehrte gilt, d. h. daß für eine stetige Funktion $f(z)$ aus der Existenz der ersten partiellen Ableitungen der Funktionen $u$ und $v$ in einem Gebiet und dem Bestehen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Differenzierbarkeit von $f(z)$ im Gebiet folgt, ist ein modernes, tiefliegendes Ergebnis von Looman (*Gött. Nachr.* 1923, S. 97).

Karl Weierstraß (1815—1897), der dritte große Meister der Funktionentheorie neben Cauchy und Riemann, ging bei der Definition der regulären Funktion aus von ihrer Darstellung durch eine *Potenzreihe* (s. hierüber § 5 und III. Abschnitt). Für die geschichtliche Entwicklung der Funktionentheorie vgl. Brill und Noether, *Math.-Ver.* **3** (1894) S. 107, besonders von S 150 an; Stäckel, *Bibl. Math* (3) **1** (1900) S. 109.

## II. Abschnitt.

## Integralsätze, Darstellung durch Reihen und isolierte singuläre Punkte.

### § 4. Der Cauchysche Integralsatz.

Ist eine Funktion $f(z)$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}$, von dem wir in der Folge zunächst immer annehmen, daß der unendlich ferne Punkt nicht dazu gehört, definiert und stetig (das bedingt in diesem Abschnitt stets, daß sie eindeutig ist), so wird, wenn $a$ und $b$ zwei feste Punkte in $\mathfrak{G}$ sind, für jede sie verbindende, ganz in $\mathfrak{G}$ verlaufende Kurve $\mathfrak{C}$ $\int\limits_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz$ existieren; der Wert

dieses Integrals wird im allgemeinen durch die Angabe der Endpunkte des Wegs nicht eindeutig bestimmt sein, sondern noch von $\mathfrak{C}$ abhängen. Daß jedoch bei regulären Funktionen dies nicht der Fall ist, ist der Inhalt des gleich zu nennenden Fundamentalsatzes, der das wirksamste Hilfsmittel der Funktionentheorie bildet und zugleich zeigt, daß die Klasse der differenzierbaren Funktionen in der Tat eine solche mit besonders einfachen und schönen Eigenschaften sein muß.

### Der Cauchysche Integralsatz.

Ist die Funktion $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär und bedeutet $\mathfrak{C}$ eine geschlossene rektifizierbare Kurve, die dem Inneren des Gebietes angehört, so ist $\int\limits_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = 0$. Damit ist gleichbedeutend: Die Integrale über zwei in $\mathfrak{G}$ verlaufende rektifizierbare Kurven mit denselben Endpunkten haben denselben Wert.

Cauchy hat den Satz, abgesehen davon, daß bei ihm der Integrationsweg nicht den hier angegebenen, sehr allgemeinen Charakter hat, unter der stillschweigenden Voraussetzung bewiesen, daß $f'(z)$ *stetig* ist (Beweis vermittels Variationsrechnung: *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires,* Paris 1825, S. 5; deutsche Übersetzung in Ostwalds Klassikern Nr. 112). Daß diese Voraussetzung überflüssig ist, wurde zuerst von Goursat erkannt (durch leichte Modifikation [*Trans. Am. M. S.* **1** (1900) S. 14] seines Beweises in *Acta Math.* **4** (1884) S 197; vgl. auch Pringsheim, *Bibl. Math.* (3) **1** (1900) S 433 [S. 472]). Eine allen Anforderungen an Strenge genügende Darstellung des Beweises für den Satz in der oben ausgesprochenen Allgemeinheit siehe Pringsheim, *Trans. Am. M. S.* **2** (1901) S. 413, und in dem Lehrbuch der Funktionentheorie von Bieberbach, **1** (1921) S 115 Vgl auch den auf dem Wege über die Potenzreihen geführten Beweis von Pringsheim, *Münch. Ber.* 1920, S. 145. Der Satz bleibt auch noch gültig, wenn die rektifizierbare Kurve $\mathfrak{C}$ den Rand des Gebietes $\mathfrak{G}$ bildet, vorausgesetzt, daß $f(z)$ auf dem *Rande* noch *stetig* ist. (Vgl. G. A. Pfeiffer, *Bull. Am M. S.* **30** (1924) S 213.)

Jede in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion besitzt dort ein sogenanntes *unbestimmtes Integral,* d. h. es gibt eine bis auf eine additive Konstante bestimmte

Funktion $F(z)$, deren Ableitung in dem Gebiet gleich $f(z)$ ist ($F$ ist dann eo ipso regulär); und zwar ist das unbestimmte Integral gegeben durch das bestimmte:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz + C,$$

wo $z_0$ ein beliebiger, fester Punkt in $\mathfrak{G}$ ist. (Der Integrationsweg braucht auf Grund des Cauchyschen Satzes nicht näher angegeben zu werden.) Da sich später ergibt, daß die Ableitung einer analytischen Funktion wieder analytisch ist, so folgt hieraus, daß, wenn $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet analytisch ist,

$$\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz = f(z) - f(z_0)$$

gilt. Bei den analytischen Funktionen sind also *Integration und Differentiation inverse Operationen.*

Ist $f(z, \zeta)$ eine in dem Gebiet $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion von $z$, gleichgültig welchen Punkt einer rektifizierbaren Kurve $\mathfrak{C}$ der Wert $\zeta$ bedeutet und ist $f$ eine stetige Funktion von $(z, \zeta)$ (also nicht bloß stetig in $z$ allein und $\zeta$ allein), wenn $z$ in $\mathfrak{G}$ und $\zeta$ auf $\mathfrak{C}$ variiert, so ist $\int_{\mathfrak{C}} f(z, \zeta)\,d\zeta = F(z)$ eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion, deren Integral und Ableitung durch *Integrieren* bzw. *Differenzieren unter dem Integralzeichen* erhalten werden kann (de la Vallée-Poussin, *Brux. Ann. soc. scient.* **17** (1893) S. 323).

### Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes.

$f(z)$ sei in einem *beliebigen* Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär, $\mathfrak{C}_1$ sei eine in $\mathfrak{G}$ verlaufende, geschlossene rektifizierbare Kurve; ist $\mathfrak{C}_2$ eine zweite derartige Kurve, die jeden Randpunkt von $\mathfrak{G}$ ebensooft umläuft wie $\mathfrak{C}_1$, so ist

$$\int_{\mathfrak{C}_1} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{C}_2} f(z)\,dz.$$

(Vgl. Cauchy, *Exerc. d'anal.* **1** (1840) S. 274 = *Œuvres* (2) **11** S. 337) Vgl. Fig 3.

Dabei gilt folgende Definition: Eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ *umläuft* einen Punkt $A$ $h$mal, wenn der Winkel des Strahles $AP$

mit der positiven $x$-Richtung um $h \cdot 2\pi$ zunimmt, falls $P$ von einer gewissen Anfangslage an einmal die Kurve durchläuft. $h$ kann gleich $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ sein. Insbesondere sagen wir, die Kurve umlaufe $A$ im positiven (negativen) Sinn, wenn $h$

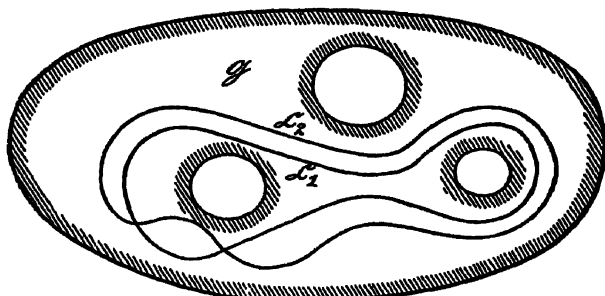



Fig 3.

positiv (negativ) ist. Für $h = 0$ wird $A$ überhaupt nicht umlaufen. (Daß $h$ eine ganze Zahl und von der Anfangslage von $P$ unabhängig ist, ist leicht zu sehen.)

Aus dem Cauchyschen Integralsatze folgt speziell: Das Gebiet $\mathfrak{G}$ sei *n-fach zusammenhängend* und von der äußeren Randkurve $\mathfrak{R}_0$ und den inneren Randkurven $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_{n-1}$ begrenzt. Ist $\mathfrak{C}_0$ eine zu $\mathfrak{G}$ gehörige Kurve, die jede innere Randkurve (d. h. jeden ihrer Punkte) einmal im positiven Sinne umläuft und $\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ eine zu $\mathfrak{G}$ gehörige Kurve, die $\mathfrak{R}_i$ einmal im positiven Sinne, die anderen Randkurven aber nullmal umläuft, so ist

$$\int_{\mathfrak{C}_0} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathfrak{C}_i} f(z)\,dz.$$

Ist $f(z)$ in einem Gebiet mit eventueller Ausnahme eines Punktes $a$ regulär und bedeutet $\mathfrak{C}$ einen Kreis, der samt seinem Inneren dem Gebiet angehört, so nennt man $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz$, erstreckt über $\mathfrak{C}$ im positiven Sinn oder, w. d. i., so daß das Innere von $\mathfrak{C}$ zur Linken liegt, das *Residuum* von $f(z)$ im Punkte $a$. (In einem regulären Punkt ist das Residuum gleich 0. Siehe auch die Bemerkung beim Laurentschen Satz S. 717.) Aus dem letzten Satz folgt der

**Cauchysche Residuensatz:** Ist eine Funktion $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet bis auf endlich viele Punkte regulär, so erhält man die Summe der Residuen von $f(z)$ in diesen Punkten, indem man $\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$ längs einer sie alle einmal im positiven Sinne umlaufenden Kurve bildet.

Das Residuum von $\frac{1}{z-z_0}$ im Punkte $z_0$ ist gleich 1, das von $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ mit $n > 1$ ist gleich 0. Ist $f(z)$ bei $z_0$ regulär, während $g(z)$ dort einen Pol 1. Ordnung (s. S. 721) mit dem Residuum $a$ besitzt, so hat $f(z)\cdot g(z)$ in $z_0$ das Residuum $af(z_0)$. Sind $f(z)$ und $g(z)$ für $z = z_0$ regulär, ist $f(z_0) \neq 0$, während $g(z)$ in $z_0$ eine Nullstelle 1. Ordnung (s. S. 716) besitzt, so hat $\frac{f(z)}{g(z)}$ in $z_0$ das Residuum $\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

Mit Hilfe des „Residuenkalküls", der den Wert eines bestimmten Integrals einer Funktion durch eine Summe ausdrückt, deren Glieder von den Ausnahmepunkten der Funktion abhängen, hat Cauchy viele bedeutende Resultate abgeleitet. Der Kalkül wird ausführlich in zahlreichen Abhandlungen in *Exercices de mathématique* **1** (1826) = *Œuvres* (2) **6** S. 23, 124 usw., **2** (1827) = *Œuvres* (2) **7** S. 291 usw. dargestellt und vor allem in *Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problêmes* (sic) *de physique mathématique,* Paris 1827 (vgl. hierzu Geppert, *Math. Zeitschr.* **20** (1924) S. 29) auf Reihenentwicklungen angewendet, ist jedoch im Grunde schon in den S. 693 u 696 zitierten *Mémoires* von 1814 und 1825 enthalten. Vgl. auch Lindelöf, *Le calcul des résidus,* Paris 1905, historische Notizen in chap. I.

Aus dem Cauchyschen Integralsatz ergibt sich die

**Cauchysche Integralformel:**

Ist $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet regulär und $\mathfrak{C}$ eine in diesem verlaufende rektifizierbare Kurve, die einen bestimmten Punkt $z$ einmal im positiven Sinne umläuft, so ist:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

(Cauchy, *Extrait d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul, appelé calcul des limites,* autographiert, Turin

1831 [S. 6], abgedruckt unter Vorausschickung eines auch schon 1831 autographiert erschienenen Résumé desselben Mémoire in *Exercices d'analyse* **2** (1841) S. 41 [S. 52].)

Es zeigt sich somit, daß bei einer regulären Funktion die Werte im *Innern* einer Kurve durch die Werte *auf ihr* schon vollständig bestimmt sind. Noch mehr: Zum Ausrechnen des Integrals genügen schon die Werte von $f(z)$ auf einer überall dichten (s. *Rep.* $\mathbf{I}_1$, S. 28), abzählbaren Punktmenge. Diese Idee, die übrigens schon bei Cauchy vorkommt (*Exerc. d'anal.* **1** (1840) = *Œuvres* (2) **11** S. 331 [S. 334]), ist von Pringsheim konsequent dazu verwendet worden, um die Integrale überhaupt zu vermeiden und durch sog. „*Mittelwerte*" zu ersetzen (*Münch. Ber.* **25** (1895) S. 75; ausführlich *Math. Ann.* **47** (1896) S. 121).

Ist $\mathfrak{C}$ speziell ein Kreis um $z$, so kann man die Integralformel folgendermaßen umformen:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi,$$

wo $\zeta$ die Randpunkte des Kreises durchläuft und $\varphi$ das Argument von $\zeta - z$ bedeutet. Der Wert im Mittelpunkt eines Kreises, in und auf dem $f(z)$ regulär ist, ist also gleich dem „arithmetischen Mittel" der Randwerte.

Für jedes $z$ außerhalb der Kurve $\mathfrak{C}$ ist die rechte Seite der Cauchyschen Integralformel gleich 0, da dann der Integrand im Innern regulär ist; für die Punkte $z$ auf $\mathfrak{C}$ ist das Integral im allgemeinen sinnlos Das Cauchysche Integral ist daher ein Beispiel für einen analytischen Ausdruck, der in zwei getrennten Gebieten zwei ganz verschiedene Funktionen (hier $f(z)$ und 0) darstellt. (Vgl. Hermite, *Cours de la faculté des sciences de Paris* (autographiert), 4ᵉ éd, Paris 1891, S 79)

### Das Poissonsche Integral

Ist $f(z)$ in und auf dem Kreise $|z| \leqq R$ regulär, so ist für $|z| < R$:

$$f(z) = i\Im f(0) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\substack{0\\ \zeta = Re^{i\vartheta}}}^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,\Re f(\zeta)\,d\vartheta.$$

Durch diese Formel wird die reguläre Funktion im Innern des Kreises allein durch die Werte des reellen Teils am Rande und des imaginären Teils im Mittelpunkte bestimmt.

Trennt man in der Formel Reelles und Imaginäres und führt Polarkoordinaten ein:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad \zeta = R(\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

so ergibt sich für den reellen Teil $u(r, \varphi)$:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \vartheta)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}\,d\vartheta.$$

Für $z = 0$ folgt speziell, daß der Wert im Mittelpunkt gleich dem arithmetischen Mittel der Randwerte ist. (Poisson, *J. éc. polyt.* **11**, 18. cah. (1820) S. 417.)

Das Integral $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ läßt sich auch bilden, wenn $f$ nicht als reguläre Funktion gegeben ist, sondern wenn man die Werte $f(\zeta)$ *auf* $\mathfrak{C}$ *beliebig* so vorschreibt, daß das Integral existiert. Man kann dann leicht zeigen, daß $F(z)$ im Inneren von $\mathfrak{C}$ regulär ist (ebenso auch im Äußeren) Jedoch wäre es falsch, anzunehmen, daß die vorgegebenen Werte $f(\zeta)$ auf $\mathfrak{C}$ die Werte wären, denen $F(z)$ zustrebt, wenn $z$ gegen den Rand $\mathfrak{C}$ wandert. Dies läßt sich durch einfache Beispiele widerlegen (vgl. Osgood, *Lehrb. der Funktionentheorie* **1**, 2. Aufl. 1912, S. 297). Eine notwendige und hinreichende Bedingung, unter der jener Schluß richtig ist, s. bei J. L Walsh, *C. R.* **178** (1924) S. 58.

Anders ist es bei der Poissonschen Formel. Hier gilt der Satz (Schwarz, *Ges. Abh* **2** S. 185): Ist $U(\vartheta)$ eine beschränkte, für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ definierte reelle Funktion mit höchstens endlich vielen Unstetigkeiten, so stellt das Poissonsche Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\vartheta)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}\,d\vartheta$$

eine Funktion $u(r, \varphi)$ dar, die im Innern des Kreises $|z| < R$ als reeller Teil einer regulären Funktion aufgefaßt werden kann und bei *radialer Annäherung* an die Stetigkeitsstellen den Randwerten $U$ zustrebt

Die durch die Cauchysche Integralformel gewonnene analytische Darstellung einer regulären Funktion erlaubt folgende, die in diesem Begriff liegende Einschränkung besonders scharf beleuchtende Tatsache abzuleiten:

Eine reguläre (also als einmal differenzierbar vorausgesetzte) Funktion ist *beliebig oft differenzierbar*, und zwar ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta,$$

wo $\mathfrak{C}$ eine den Punkt $z$ einmal im positiven Sinne umlaufende, ganz dem Regularitätsgebiet angehörende, rektifizierbare Kurve ist. In der Cauchyschen Integralformel kann also unter dem Integralzeichen differenziert werden (Cauchy, *Autogr. Abh.* von 1831 (zitiert S. 702), S. 8 = *Exerc. d'anal.* 2 (1841) S. 53).

Insbesondere ist demnach $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} i$ selbst wieder eine reguläre Funktion, ihre Komponenten sind also differenzierbar und erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, woraus folgt, daß $u$ die *Laplacesche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

oder abgekürzt $\Delta u = 0$ erfüllt.

Ebenso ist $\Delta v = 0.$

Die Komponenten einer regulären Funktion sind also *Potentialfunktionen* oder harmonische Funktionen

Ist eine Potentialfunktion $u$ gegeben, so kann man die zu ihr „konjugierte" $v$, die den Bedingungen $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ genügt (und daher selbst wieder die Gleichung $\Delta v$ erfüllt und eine Potentialfunktion ist), bis auf eine Konstante durch ein Linienintegral

$$\int \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = \int -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

finden, da die Integrabilitatsbedingung wegen $\Delta u = 0$ erfüllt ist (*Rep.* $I_1$, Kap VIII, § 6, S. 505).

Von hier aus versteht man auch, daß die Randwerte einer regulären Funktion nicht beliebig gegeben werden können, da z. B. für den Kreis durch den reellen Teil der Randwerte bereits der reelle Teil im Innern und damit auch der imaginäre

Teil bis auf eine Konstante im Innern bestimmt sind, folglich auch die Randwerte des imaginären Teils.

Der Cauchysche Satz ist in gewissem Sinne umkehrbar, denn es gilt der

Satz von Morera (*Ist. Lomb. Rend.* (2) **19** (1886) S. 304): Ist eine Funktion in einem Bereiche eindeutig und stetig und ist $\int f(z)\,dz$, erstreckt über jede beliebige, geschlossene, ganz zu dem Bereiche gehörige rektifizierbare Kurve, gleich 0, so ist $f(z)$ regulär. (Eine Verallgemeinerung s. Osgood, *Lehrb. der Funktionentheorie* **1**, 2. Aufl. 1912, S. 302.)

### Der absolute Betrag einer regulären Funktion.

Aus der Cauchyschen Formel folgt, daß $|f(z)|$ im Innern eines Regularitätsgebietes kein Maximum haben kann, außer wenn $f(z) = \text{const.}$ ist. Ist $f(z)$ auch noch auf dem Rande des Gebietes regulär oder wenigstens stetig, so wird das in dem abgeschlossenen Bereich notwendigerweise vorhandene Maximum von $|f(z)|$ in mindestens einem Randpunkt angenommen (vgl. auch S. 735).

Ist $f(z)$ in einem (ein- oder mehrfach zusammenhängenden) Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär, so schlagen wir um einen festen Punkt (innerhalb oder außerhalb $\mathfrak{G}$) Kreise, deren Peripherie ganz in $\mathfrak{G}$ liegt (falls es solche gibt). Das Maximum von $|f(z)|$ auf dem Rande des Kreises vom Radius $r$ nennen wir $M(r)$. Gehort das Innere des Kreises zu $\mathfrak{G}$, so ist $M(r)$ zugleich das Maximum für die abgeschlossene Kreisfläche, und bei wachsendem $r$ wächst auch $M(r)$. Genaueres über das Verhalten von $M(r)$, auch im allgemeinen Fall, sagt der

Dreikreisesatz von Hadamard (*Bull. Soc. M.* **24** (1896) S. 186; einfacher Beweis bei Landau, *Darstellung und Begrundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.* Berlin 1916, S. 76, vgl. auch S. 14): Ist $f(z)$ in einem Kreisring regulär und $\not\equiv 0$, so ist $\lg M(r)$ eine konvexe Funktion von $\lg r$, d. h. ist $0 < r_1 < r_2 < r_3$ und $f(z)$ in $r_1 \leqq |z| \leqq r_3$ regulär, so besteht die Ungleichung

$$\begin{vmatrix} \lg r_1 & \lg r_2 & \lg r_3 \\ \lg M(r_1) & \lg M(r_2) & \lg M(r_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

(Geometrisch: Konstruiert man die Punkte $P(r)$ mit den Abszissen $\lg r$ und den Ordinaten $\lg M(r)$, so hat das Dreieck $P(r_1)P(r_2)P(r_3)$

positiven Flächeninhalt, der Umlaufssinn $P(r_1) \longrightarrow P(r_2) \longrightarrow P(r_3)$ ist also der positive oder: $P(r_2)$ liegt *unter*halb der Verbindungsstrecke $P(r_1)P(r_3)$.)

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist der

Dreigeradensatz (Doetsch, *Math. Zeitschr.* 8 (1920) S. 237): Es werde $z = x + yi$ gesetzt, und es sei $x_1 < x_2 < x_3$. Ist $f(z)$ in dem Streifen $x_1 \leqq x \leqq x_3$ mit eventueller Ausnahme von $z = \infty$ regulär, beschrankt und $\not\equiv 0$ und bezeichnet $L(x)$ die hiernach endliche obere Grenze von $|f(z)|$ auf der Geraden $\Re z = x$ $(x_1 \leqq x \leqq x_3)$, so ist $\lg L(x)$ eine konvexe Funktion von $x$, d. h.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \lg L(x_1) & \lg L(x_2) & \lg L(x_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Aus dem Dreigeradensatz folgt, daß der Dreikreisesatz auch noch gilt, wenn die Funktion in dem Kreisring *beliebig* (auch unendlich) *vieldeutig* ist (vgl. S 728).

Wendet man den Dreigeradensatz auf die Funktion $e^{f(z)}$ an, für die $|e^{f(z)}| = e^{\Re f(z)}$ (s. S. 716) ist, so erhält man einen Satz über den Realteil oder w. d. i. über *Potentialfunktionen:* Ist eine Potentialfunktion in einem Streifen beschränkt, so ist ihre obere Grenze auf parallelen Geraden eine konvexe Funktion des Abstandes. — Durch Spezialisierung findet man einen dem Hadamardschen Satz analogen Satz über das Maximum $A(r)$ des Realteils $\Re f(z)$ auf dem Kreis vom Radius $r$ um einen festen Punkt.

$M(r)$ läßt sich durch $A(r)$ abschätzen nach dem

Satz von Carathéodory (s Landau, *Darstellung und Begrundung* usw S 89): Ist $f(z)$ fur $|z| \leqq R$ regular, so gilt für $0 < r < R$:

$$M(r) \leqq \frac{2R}{R-r}\,[A(R) + 2\,|f(0)|].$$

## § 5. Darstellung durch Reihen.

Eine analytische Darstellung der regulären Funktionen wird durch die Cauchysche Integralformel geliefert. Eine weitere ergibt sich, wenn man die hierin vorkommende Funktion $\frac{1}{\zeta - z}$ in eine Potenzreihe entwickelt und gliedweise integriert.

Zunächst werden darum die wichtigsten Sätze über Reihen zusammengestellt

### Allgemeine Reihen.

Die erste strenge Begründung der Reihensätze für komplexe Größen findet sich bei Cauchy, *Cours d'analyse (Analyse algébrique)* 1821 = Œuvres (2) **3** S. 230. Grundlegend ist auch die Behandlung der Binomialreihe von Abel (*J. f. Math.* **1** (1826) S. 311) gewesen. Wegen der Grundbegriffe vgl. *Rep.* $\mathbf{I}_1$, Kap. VI, § 2 u 3.

Statt von einer Reihe $\sum_1^\infty f_n(z)$ kann man auch von einer *Folge*, d. i. eine abzählbare Menge von Funktionen in bestimmter Anordnung $F_1(z)$, $F_2(z)$, ..., sprechen. Die Partialsummen einer Reihe bilden nämlich eine Folge, und aus einer Folge kann man umgekehrt eine Reihe bilden, deren Partialsummen die Glieder der Folge sind. Eine Folge heißt konvergent, wenn die entsprechende Reihe konvergiert; analog bei der folgenden Definition.

Eine Reihe $f_1(z) + f_2(z) + \cdots$ von Funktionen, die sämtlich in einem Bereich definiert sind, heißt in diesem Bereiche *gleichmäßig konvergent*, wenn zu jeder (beliebig kleinen) Zahl $\delta > 0$ eine ganze Zahl $N$ so bestimmbar ist, daß für jedes $z$ in dem Bereich

$$| f_n(z) + f_{n+1}(z) + \cdot \quad \cdot + f_{n+p}(z) | < \delta$$

wird, wenn nur $n \geqq N$ und $p \geqq 0$ ist ($N$ darf also nur von $\delta$, nicht aber von $z$ abhängen). (Weierstraß 1880, *Werke* **2** S. 202 Über verschiedene Arten, die gleichmäßige Konvergenz zu definieren s. ebenda und ferner Hardy, *Proc of the Cambridge Philos. Soc.* **19** (1918) S. 148 )

Das wichtigste Mittel zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz ist die

Weierstraßsche Majorantenmethode (*Werke* **2** S 202): Hat jedes Reihenglied in dem Bereich eine „Majorante" $m_n$, d h. ist dort $f(z) \leqq m_n$ und ist $\sum_1^\infty m_n$ konvergent, so konvergiert $\sum_1^\infty f_n(z)$ in dem Bereich absolut und gleichmäßig.

Die gleichmäßige Konvergenz ist, wie Weierstraß, dem dieser Begriff schon 1841 geläufig war (*Werke* **1** S 67, 81), zuerst

erkannte, von größter Bedeutung für die Analysis, da er wichtige Eigenschaften der Reihenglieder auf die Summe der Reihe zu übertragen gestattet, was bei einfacher Konvergenz nicht der Fall ist. So gelten die Sätze:

Eine in einem Bereiche gleichmäßig konvergente Reihe von *stetigen* Funktionen stellt eine *stetige* Funktion dar.

Streben die Glieder einer in einem Bereiche gleichmäßig konvergenten Reihe von Funktionen sämtlich gegen 0, wenn $z$ sich einem Punkte $z_0$ des Bereiches nähert, so strebt auch der Summenwert gegen 0 für $z \to z_0$.

Eine gleichmäßig konvergente Reihe von *integrierbaren* Funktionen stellt eine *integrierbare* Funktion dar, und das Integral längs einer Kurve in dem betr Bereich kann durch *gliedweise Integration* der Reihe erhalten werden.

Diese Sätze haben sämtlich ihre Analoga im Reellen. Nicht so steht es mit dem deshalb sehr merkwürdigen

Weierstraßschen Doppelreihensatz (*Werke* **2** S. 201): Eine in einem Bereich gleichmäßig konvergierende Reihe von daselbst regulären (d. h differenzierbaren) Funktionen stellt eine dort reguläre Funktion dar. Die Ableitung kann durch gliedweises Differenzieren gewonnen werden und die so entstandene Reihe ist selbst wieder gleichmäßig konvergent, kann also wiederum differenziert werden usw. (Der Name „Doppelreihensatz" rührt daher, daß für Weierstraß jede der als Reihenglieder vorkommenden Funktionen selbst wieder durch eine Potenzreihe dargestellt wird, vgl. S 713 und III. Abschn. Weierstraß hat den fundamentalen Satz bereits 1841 in der damals nicht veröffentlichten Abhandlung *Werke* **1** S. 67 bewiesen. Sehr einfach gestaltet sich der Beweis auf Grund des Moreraschen Satzes (S. 706), so z B. Osgood, *Lehrbuch* **1**, 2. Aufl. S. 304)

Die gleichmäßige Konvergenz ist für die Regularität der dargestellten Funktion hinreichend, aber nicht notwendig; siehe ein Beispiel bei Runge, *Acta Math.* **6** (1885) S. 245. Eine notwendige und hinreichende Bedingung hat Arzelà angegeben (*Rend. ist. Bologna* 1887/88, S. 25)

Wesentliche Verallgemeinerungen des Weierstraßschen Satzes sind der Satz von Stieltjes (*Corresp. d'Hermite et de Stieltjes* **2** (1905) S 368) und der diesen umfassende

Satz von Vitali (*Ist. Lomb. Rend* (2) **36** (1903) S. 772; *Ann di Mat.* (3) **10** (1904) S. 65), der von Porter (*Ann. of*

*Math.* (2) **6** (1904—1905) S. 190) wieder entdeckt wurde, s. auch den besonders einfachen Beweis von E. Lindelöf (*Bull. Soc. Math. de France* **41** (1913) S. 171) sowie von Jentzsch (*Acta Math.* **41** (1918) S. 219): Wenn sämtliche Teilsummen einer Reihe von in einem offenen Gebiet 𝔊 analytischen Funktionen daselbst gleichmäßig beschränkt sind (d. h. wenn sämtliche Teilsummen für alle Punkte von 𝔊 dem Betrage nach unter derselben Zahl liegen) und wenn die Konvergenz der Reihe wenigstens auf einer Punktmenge, die im Inneren von 𝔊 einen Häufungspunkt besitzt, bekannt ist, so folgt daraus schon die gleichmäßige Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teilbereich; die Reihe stellt also in 𝔊 eine reguläre Funktion dar.

Dieser Satz von Vitali ist wiederum ein Spezialfall des

Satzes von Carathéodory und Landau (*Berl. Sitzungsber.* 1911, S. 587): Wenn sämtliche Teilsummen einer Reihe von in 𝔊 regulären Funktionen daselbst zwei verschiedene komplexe Werte auslassen und wenn die Reihe in einer unendlichen Punktmenge mit mindestens einem Häufungspunkt innerhalb 𝔊 konvergiert, so konvergiert sie in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig.

Andere Verallgemeinerungen s. Blaschke, *Leipz. Ber.* **67** (1915) S 194; F. u. R. Nevanlinna, *Acta soc. scient. Fenn.* **50**, Nr. 5 (1922) [S. 28]; Priwaloff, C. R **178** (1924) S. 178; *Math. Ann.* **93** (1925) S. 149

Unter gewissen Voraussetzungen über den Rand des Gebietes kann man sogar von der Konvergenz auf dem Rand auf solche im Innern schließen nach dem

Satz von Ostrowski (*Math-Ver.* **31** (1922) S. 85; *Acta litt. ac scient. Szeged* **1** (1923) S. 80; vgl. auch *Math. Zeitschr.* **24** (1925) S 215 [S. 223]): Sind die Partialsummen einer Reihe von Funktionen, die in einem von einer Jordankurve 𝔍 begrenzten Gebiet regulär und auf einem Bogen 𝔏 von 𝔍 wenigstens noch stetig sind, gleichmäßig beschränkt und konvergiert die Reihe auf 𝔏, so konvergiert sie in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig.

Vgl auch Ostrowski, *Math.-Ver* **32** (1923) S 185; *Hamb Abh.* **1** (1922) S. 327.

Sehr fruchtbar für die in diesen Sätzen behandelten Fragen sowie für die an die Picardschen Sätze (S. 766) sich anschließenden Probleme ist der von Montel geschaffene Begriff der *normalen Funktionenschar*. Eine Menge (abzählbar oder nicht)

von in einem offenen Gebiet regulären Funktionen heißt in diesem Gebiet normal, wenn jede Teilmenge wiederum eine Folge enthält, die in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig konvergiert.

Über diesen Begriff gelten folgende Sätze (Montel, *Ann. éc. norm.* (3) **24** (1907) S. 233 [S. 298]; (3) **29** (1912) S. 487; (3) **33** (1916) S. 223; *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe.* Paris 1910, S. 20flg. Zusammenfassend dargestellt in Julia, *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé.* Paris 1923, chap. III):

Gehört eine Funktionenfolge zu einer in einem Gebiet 𝔊 normalen Schar und konvergiert sie in unendlich vielen Punkten, die im Innern von 𝔊 einen Häufungspunkt besitzen, so konvergiert sie im ganzen Gebiet, und zwar in jedem inneren abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig.

Wenn unendlich viele in einem Gebiet regulare Funktionen daselbst gleichmäßig beschränkt sind, d. h. wenn ihre Absolutbeträge sämtlich unter derselben Schranke liegen, so bilden sie eine in dem Gebiet normale Schar. (Vgl. hierzu auch Koebe, *Gött. Nachr.* 1908, S. 337 [S. 349]) — Hieraus folgt der Satz von Vitali.

Eine in einem Gebiet normale Funktionenschar ist in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig beschränkt.

Wenn unendlich viele Funktionen in einem Gebiet regulär sind und jede von ihnen zwei verschiedene endliche Werte ausläßt, so bilden sie eine normale Schar. — Hieraus folgt der Satz von Carathéodory und Landau.

Über normale Scharen meromorpher (s. S 721) Funktionen s. Ostrowski, *Math. Zeitschr.* **24** (1925) S. 215 [S 224].

## Potenzreihen.

Die für die Funktionentheorie wichtigsten Reihen sind die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Eine solche Reihe konvergiert stets in mindestens einem Punkt, nämlich $z = z_0$ Es kann vorkommen, daß dieser der einzige Konvergenzpunkt ist, z B bei $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(z-z_0)^n$, oder auch, daß die Reihe für jedes $z$ konvergiert, z B. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$. Allgemein gilt der Satz:

Der *Konvergenzbereich* einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ ist stets ein *Kreis* um den Punkt $z_0$, dessen Radius $r$, der „Konvergenzradius", sich folgendermaßen aus den Koeffizienten bestimmt:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

(Cauchy, *Cours d'anal. (Analyse algébrique)* 1821, S. 286 = Œuvres (2) **3** S. 240; ganz exakt erst bei Hadamard, *C. R.* **106** (1888) S. 259.) Dabei kann $r = 0$ oder $\infty$ sein.

Der Satz ist so zu verstehen, daß im Inneren des „Konvergenzkreises", d. h. für $|z - z_0| < r$, sicher Konvergenz, im Äußeren, d. h. für $|z - z_0| > r$, sicher Divergenz statthat. Auf dem Rande $|z - z_0| = r$ können alle Möglichkeiten vorkommen:

durchweg Konvergenz, z. B. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n^2}$;

„ Divergenz, „ „ $\sum_{0}^{\infty} (z - z_0)^n$;

teilweise Konv., teilweise Div., „ „ $\sum_{1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n}$.

(Alle drei Reihen haben den Konvergenzradius 1.)

Eine Potenzreihe konvergiert im Inneren ihres Konvergenzkreises sogar *absolut* und in jedem kleineren Kreise *gleichmäßig*, stellt also im Inneren des Konvergenzkreises eine stetige und nach dem Weierstraßschen Satz sogar *reguläre* Funktion dar. Die Reihe kann *gliedweise integriert* und *differenziert* werden, der Konvergenzradius bleibt dabei erhalten.

Die Stetigkeit dehnt sich sogar in eingeschränktem Sinne auf die Punkte der Konvergenzgrenze aus, wo die Reihe noch konvergiert nach dem

Satz von Abel (*J. f. Math.* **1** (1826) S. 311 = Œuvres **1** S. 219): Konvergiert eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ in einem Punkt $\zeta$ der Konvergenzgrenze, so konvergiert sie auf dem Radius

von $z_0$ nach $\zeta$ gleichmäßig und stellt daher eine dort stetige Funktion dar. Es ist also $f(z) \to s = \sum_0^\infty c_n(\zeta - z_0)^n$, wenn $z$ radial gegen $\zeta$ wandert.

Nach Stolz (*Zeitschr. Math. Phys.* **29** (1884) S. 127, im Anschluß an **20** (1875) S 369) ist sogar $f(z) \to s$, wenn $z$ sich gegen $\zeta$ auf einer Jordankurve bewegt, die zwischen zwei in $\zeta$ endenden Kreissehnen liegt. Dagegen läßt sich durch Gegenbeispiele zeigen, daß der Satz nicht für beliebige, in $\zeta$ endigende Kurven richtig ist, nicht einmal, wenn diese eine sich stetig ändernde Tangente besitzen. (Vgl. zu diesem Fragenkomplex auch § 24.)

Aus der Konvergenz in einem Punkt des Konvergenzkreises kann nicht auf die Regularität der dargestellten Funktion geschlossen werden $\left(\text{Beispiel: } \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2} \text{ für } x = 1\right)$, auch nicht umgekehrt $\left(\text{Beispiel: } \sum_0^\infty x^n \text{ fur } x = -1\right)$.

Vollen Aufschluß über den Zusammenhang von Regularität und Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe gibt der

Cauchysche Reihensatz: Ist eine Funktion $f(z)$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär und ist $z_0$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{G}$, so läßt sich $f(z)$ eindeutig in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $z - z_0$ entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

deren Koeffizienten sich in Taylorscher Art bestimmen:

$$c_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

wo das Integral über eine $z_0$ einmal im positiven Sinn umlaufende, rektifizierbare Kurve $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}$ zu erstrecken ist. Die Reihe konvergiert und stellt die Funktion dar in jedem inneren Punkte des größten Kreises um $z_0$, dessen Inneres ganz zu $\mathfrak{G}$ gehört (Cauchy, *Autogr. Abh* von 1831 (zitiert S. 702), S. 7 = *Exerc. d'anal.* **2** (1841) S. 52; ferner *Exerc. d'anal.* **1** (1840) = *Œuvres*

(2) **11** S. 331 [S. 340]). Die Darstellung ist eindeutig, d. h. stellt eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Funktion in einer Umgebung von $z_0$ dar, so ist $a_n = c_n$. Vgl. Pringsheim, *Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes* (*Bibl. Math.* (3) **1** (1900) S 433, insbesondere von S. 467 an).

Eine in der ganzen $z$-Ebene mit Ausnahme von $z = \infty$ reguläre Funktion wird durch eine beständig, d. h. für alle endlichen $z$ konvergierende Potenzreihe dargestellt. Eine solche Funktion heißt eine *ganze Funktion*.

Bricht man eine Potenzreihe mit dem $n$ten Gliede ab:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + R_n(z),$$

so läßt sich der *Rest* $R_n(z)$ folgendermaßen darstellen:

$$R_n(z) = (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} d\zeta.$$

Abschätzung der Koeffizienten und des Restes: Ist $R$ der Radius des Konvergenzkreises, ferner $0 < r < R$ und $M$ das Maximum von $|f(z)|$ auf dem Kreise $|z - z_0| = r$, so ist

$$|c_n| \leqq \frac{M}{r^n}.$$

(Cauchy, *Autogr. Abh.* von 1831 (zitiert S. 702)), S 8 = *Exerc. d'anal.* **2** (1841) S. 53)

Ist $L$ die Länge von $\mathfrak{C}$ (s. oben), $\mu$ das Maximum von $f(z)$ auf $\mathfrak{C}$, $\varrho$ der Radius eines ganz in $\mathfrak{C}$ liegenden Kreises um $z_0$, $d$ der Abstand dieses Kreises von $\mathfrak{C}$, d h. die kleinste Entfernung eines Punktes der Kreisperipherie von $\mathfrak{C}$, so gilt für alle in dem Kreise liegenden $z$:

$$|R_n(z)| \leqq \frac{\mu L}{2\pi d} \left(\frac{\varrho}{\varrho + d}\right)^n.$$

(Vgl z. B. Osgood, *Lehrb d. Funktionentheorie* **1**, 2. Aufl., S. 317.)

Bedient man sich statt der regulären Funktionen ihrer Darstellung durch Potenzreihen, so gewinnt der *Weierstraßsche Doppelreihensatz* (vgl. S 709) die diesen Namen erklärende Gestalt:

Konvergiert eine Reihe, deren Glieder Potenzreihen in $z - z_0$ sind (d. h eine Doppelreihe) in einem Kreise gleich-

mäßig, so läßt sie sich als einfache Potenzreihe schreiben, deren Glieder durch Addition der gleich hohen Potenzen der ursprünglichen Reihen erhalten werden können und die in demselben Kreise konvergiert.

Aus der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung und der Bestimmtheit der Koeffizienten durch die Ableitungen folgen die Sätze:

Haben zwei reguläre Funktionen in einem inneren Punkt des Regularitätsgebietes die *Werte* und sämtliche *Ableitungen* gemein, so stimmen sie überhaupt überein.

Stimmen zwei in einem Gebiet reguläre Funktionen in einem Teilgebiet überein, so stimmen sie im ganzen Gebiet überein (Identitätssatz).

Stimmen zwei reguläre Funktionen in den *Punkten einer unendlichen Menge* mit einem im Innern des Regularitätsgebiets liegenden Häufungspunkt, also z B. auf einer Kurve, überein, so sind sie identisch.

*Die Exponential- und trigonometrischen Funktionen* definiert man im Komplexen durch ihre aus dem Reellen bekannten Potenzreihen:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots,$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$$

die für alle endlichen $z$ konvergieren. Aus dieser Definition ergibt sich die Eulersche Formel:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

die, auf die reelle Variable $\varphi$ angewandt, gestattet, die komplexe Zahl in Polarkoordinaten $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in der Form $z = r\,e^{i\varphi}$ zu schreiben. Ferner ist

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

also
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Wegen der absoluten Konvergenz können zwei Potenzreihen nach der sog *Cauchyschen Regel multipliziert* werden, d. h. durch

gliedweise Multiplikation und Zusammenfassung der gleichhohen Potenzen von $z$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0) z^k$$

(vgl. Rep $\mathrm{I}_1$, S. 428). Hieraus ergibt sich das Additionstheorem der Exponentialfunktion:

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Da wegen der Eulerschen Formel $e^{2\pi i} = 1$ ist, so folgt für $z_2 = 2\pi i$: $e^{z_1 + 2\pi i} = e^{z_1}$, d. h. die Exponentialfunktion ist im Komplexen periodisch mit der rein imaginären Periode $2\pi i$. — Analog oder auch hieraus direkt folgt, daß $\cos z$ und $\sin z$ die aus dem Reellen bekannten Additionstheoreme und die Periode $2\pi$ besitzen.

$e^z$ verschwindet wie im Reellen so auch im Komplexen für keinen Wert $z = z_0$, weil es sonst wegen $e^z = e^{z - z_0} e^{z_0}$ für jeden Wert $z_0$ verschwinden müßte. Es ist

$$e^z = e^{x + yi} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

also

$$|e^z| = e^{\Re z}, \quad \operatorname{arc} e^z = \Im z.$$

## Nullstellen.

Ist $f(z)$ für $z = a$ regulär und $f(a) = 0$, so verschwindet in der Cauchy-Taylorschen Entwicklung nach Potenzen von $z - a$ das absolute Glied. Es können aber noch mehr Glieder gleich 0 sein. Ist $c_\mu\ (\mu \geqq 1)$ der erste nicht verschwindende Koeffizient:

$$f(z) = \sum_{n=\mu}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (c_\mu \neq 0,\ \mu \geqq 1),$$

d. h. ist

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(\mu-1)}(a) = 0, \quad f^{(\mu)}(a) \neq 0,$$

so heißt $a$ eine *Nullstelle $\mu$ter Ordnung* oder eine $\mu$-fache Nullstelle für $f(z)$.

Nullstellen (allgemeiner: Stellen, wo die reguläre Funktion denselben Wert $c$ annimmt) können nicht im Innern des Regularitätsgebietes eine Häufungsstelle haben, ohne daß die Funktion identisch verschwindet (bzw. konstant ist). Ist also eine Funktion im Innern und auf dem Rande eines Bereiches regulär, so liegen im Innern nur endlich viele Nullstellen.

Satz von Hurwitz (*Math. Ann.* **33** (1889) S. 246): Die Folge $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., wo die $f_\nu(z)$ sämtlich in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär sind, konvergiere in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen eine (mithin reguläre) Grenzfunktion $f(z)$. Die Nullstellen der $f_\nu(z)$ — kommt dieselbe Nullstelle bei mehreren $f_\nu$ vor, so ist sie mehrfach zu zählen — bilden eine Menge $\mathfrak{M}$, die, wenn sie unendlich ist, Häufungspunkte hat. Ist keines der $f_\nu(z) \equiv 0$, so ist jeder im Innern von $\mathfrak{G}$ liegende Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$ eine Nullstelle von $f(z)$ und umgekehrt: Ist $f(z) \not\equiv 0$, so ist jede Nullstelle von $f(z)$ im Innern von $\mathfrak{G}$ ein Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$, und zwar liegen in einer sonst nullstellenfreien Umgebung um eine $r$-fache Nullstelle von $f(z)$ genau $r$ Nullstellen von $f_\nu(z)$ — mehrfache Nullstellen mit ihrer Vielfachheit gezählt —, sobald $\nu$ eine von der Umgebung abhängige Zahl übersteigt.

## Laurentscher Satz.

Ist eine Funktion in einem konzentrischen Kreisring um den Punkt $a$ mit den Radien $r$ und $R$ ($r < R$, es kann speziell $r = 0$ oder $R = \infty$ sein) regulär, so läßt sie sich eindeutig in eine Reihe nach positiven und negativen Potenzen von $z - a$ entwickeln:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n = \sum_0^{\infty} + \sum_{-1}^{-\infty},$$

deren Koeffizienten sich durch die Formel bestimmen:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta,$$

wobei $\mathfrak{C}$ eine im Ringgebiet liegende, den Punkt $a$ einmal im positiven Sinn umlaufende, rektifizierbare Kurve ist (Laurent, *C. R.* **17** (1843) S 938; schon 1841 von Weierstraß bewiesen, aber nicht publiziert, *Werke* **1** S 51, vgl. auch Pringsheim, *Münch. Ber.* **25** (1895) S. 75; *Math. Ann.* **47** (1896) S. 121) Der Koeffizient $a_{-1}$ ist, falls $r = 0$ ist, das Residuum von $f(z)$ im Punkte $a$.

Die Reihe $\sum\limits_0^{\infty}$ konvergiert im ganzen Innern des größeren, $\sum\limits_{-1}^{-\infty}$ im ganzen Äußeren des kleineren der beiden, das Ringgebiet begrenzenden Kreise.

## Dirichletsche Reihen.

Diese Reihen stellen eine Verallgemeinerung der Potenzreihen dar. Man versteht unter einer Dirichletschen Reihe eine Reihe der Form[1])

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo die $a_n$ beliebige komplexe, die $\lambda_n$ reelle, gegen $+\infty$ wachsende Zahlen sind: $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, $\lambda_n \to \infty$ für $n \to \infty$. (Ausführliche Darstellung der Theorie in Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig 1909, **1** S. 103, **2** S. 723; Hardy and Riesz, *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge Tracts Nr. 18.)

Ist $\lambda_n = \lg n$, so liegt eine sog. spezielle Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ vor. Der Fall $\lambda_n = n$ geht durch die Substitution $e^{-s} = z$ in eine gewöhnliche Potenzreihe über. Dieselbe Substitution macht aus der allgemeinen Dirichletschen Reihe eine Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$ mit beliebigen reellen Exponenten. Wegen der Mehrdeutigkeit der Potenzen $z^{\lambda_n}$ muß man für eine solche „irreguläre" Potenzreihe im allgemeinen statt der $z$-Ebene die Riemannsche Fläche des Logarithmus zugrunde legen (s III. Abschnitt, § 8).

Es kann vorkommen, daß eine Dirichletsche Reihe überall konvergiert $\left(\text{wie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-ns}\right)$ oder nirgends konvergiert $\left(\text{wie } \sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-ns}\right)$. Liegt keiner dieser extremen Fälle vor, so konvergiert sie in einer gewissen *Halbebene* $\sigma > \alpha$, während sie in der anderen Halbebene $\sigma < \alpha$ divergiert. (In den Punkten mit $\sigma = \alpha$ kann sie konvergent oder auch divergent sein.) Wenn sie nämlich in einem Punkte $s_0$ konvergiert oder ihre Partialsummen daselbst nur beschränkt sind, so konvergiert sie in jedem Punkte mit $\mathfrak{R}s > \mathfrak{R}s_0$ (Jensen, *Tidsskrift for Math.* (5) **2** (1884)

1) Es ist bei den Dirichletschen Reihen üblich, die Variable mit $s$ zu bezeichnen und $s = \sigma + ti$ zu setzen.

S. 63). Die Begrenzung der Konvergenzhalbebene heißt die *Konvergenzgerade*, ihr Schnittpunkt mit der reellen Achse die *Konvergenzabszisse* $\alpha$ der Reihe. In den beiden extremen Fällen ist $\alpha = -\infty$, bzw. $\alpha = +\infty$.

Entsprechend gibt es eine Halbebene *absoluter* Konvergenz mit einer Abszisse $\beta$. Auch hier kann $\beta = -\infty$ oder $\beta = +\infty$ sein. Natürlich ist $\beta \geqq \alpha$. Das Gebiet $\alpha < \sigma < \beta$ heißt der Streifen bedingter Konvergenz. Er kann verschwinden ($\alpha = \beta$) oder endliche Breite ($-\infty < \alpha < \beta < +\infty$) oder unendliche Breite ($-\infty < \alpha < \beta = +\infty$ oder $-\infty = \alpha < \beta \leqq +\infty$) haben

Eine Dirichletsche Reihe konvergiert in jedem endlichen, abgeschlossenen Bereich, der im Innern der Konvergenzhalbebene liegt, gleichmäßig, stellt also eine in der ganzen Konvergenzhalbebene reguläre Funktion dar. Dagegen gilt nicht etwa in Analogie zu den Potenzreihen ein Satz, daß eine in einer Halbebene reguläre Funktion in eine Dirichletsche Reihe entwickelbar sei. Selbst wenn dies der Fall ist, besteht kein einfacher Zusammenhang zwischen dem Konvergenzgebiet und dem funktionentheoretischen Verhalten der dargestellten Funktion; es braucht z. B. auf der Konvergenzgeraden kein singulärer Punkt zu liegen. Eine Klärung der Frage, welche Eigenschaften die Entwickelbarkeit in eine Dirichletsche Reihe bedingen, ist neuerdings von H. Bohr (*Acta Math.* **45** (1924) S. 29; **46** (1925) S. 101; **47** (1926) S. 237) durch Erweiterung des Begriffs der Dirichletschen Reihe erreicht worden

## § 6. Isolierte Singularitäten.

Ist eine Funktion $f(z)$ in einem Kreis mit Ausnahme seines Mittelpunktes $a$ (d. h. in einem Ringgebiet, dessen innerer Kreis den Radius 0 hat) regulär, in $a$ aber sicher nicht, so heißt $a$ eine *isolierte singuläre Stelle*, und es können bei der zugehörigen Laurentschen Entwicklung (S 717)

$$f(z) = \sum_{0}^{+\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n$$

drei Fälle vorkommen:

1. $\sum\limits_{-1}^{-\infty}$ enthält überhaupt kein Glied, d. h. $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$.

Dann bleibt $f(z)$ in der Umgebung von $a$ beschränkt und hat für $z \to a$ einen Grenzwert, nämlich $a_0$. Man kann nun den Punkt $a$ dadurch *in das Regularitätsgebiet einbeziehen*, daß man $f(z)$ für $z = a$ den Wert $a_0$ beilegt, oder, falls $f(a)$ irgendwie definiert war, diesen Wert in $a_0$ abändert. Durch Aufhebung der Unstetigkeit kann man also sogar Regularität, d. h. Differenzierbarkeit in diesem Punkte herbeiführen.

Merkwürdigerweise gilt sogar der Satz von Riemann (*Dissertation* 1851, § 12 = *Werke* 2. Aufl. S. 3; schon vorher von Weierstraß 1841 gefunden, aber nicht publiziert, *Werke* 1 S. 63), der das vorige Ergebnis enthält:

Ist $f(z)$ in einem Kreis, abgesehen vom Mittelpunkte $a$, regulär und in diesem Gebiet beschränkt, so existiert

$$\lim_{z \to a} f(z) = A.$$

Setzt man $f(a) = A$, so wird $f(z)$ in $a$ nicht nur stetig, sondern sogar differenzierbar, d. h. im ganzen Kreis regulär. (In $a$ lag somit nur eine sog. hebbare Unstetigkeit vor.) Im Reellen gilt ein analoger Satz bekanntlich nicht.

2. $\sum_{-1}^{-\infty}$ enthält nur endlich viele Glieder, das letzte von Null verschiedene sei $a_{-m}(z-a)^{-m}$ $(m \geqq 1)$. Dann kann man zu jeder (beliebig großen) Zahl $g > 0$ einen Radius $\varrho$ so bestimmen, daß

$$|f(z)| > g \quad \text{für} \quad 0 < |z - a| < \varrho$$

ist. (Man sagt: $f(z)$ wird bei Annäherung an $a$ „bestimmt unendlich".) Dagegen nähert sich $(z-a)^m f(z)$ für $z \to a$ dem von 0 verschiedenen Wert $a_{-m}$. Nimmt man umgekehrt an, daß es eine positive ganze Zahl $n$ gibt, derart, daß $(z-a)^n f(z)$ in der Umgebung von $a$ beschränkt bleibt, so folgt aus dem Satz von Riemann, daß $(z-a)^n f(z)$ für $z \to a$ einen Grenzwert hat, der gleich 0 sein kann, während es eine positive ganze Zahl $m \leqq n$ gibt, derart, daß $(z-a)^m f(z)$ für $z \to a$ einen von 0 verschiedenen Grenzwert $a_{-m}$ besitzt $f(z)$ ist dann in der Umgebung von $z = a$ folgendermaßen entwickelbar:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{-1}^{-m} a_n (z-a)^n.$$

Die beiden Fälle sind also identisch. Der Punkt $a$ heißt ein *Pol* $m^{ter}$ *Ordnung* (nach Briot und Bouquet) für $f(z)$ oder (nach Weierstraß) eine *außerwesentlich singuläre Stelle.* $\sum_{-1}^{-m} a_n (z-a)^n$ heißt der zu dem Pol gehörige *Hauptteil* der Funktion. Ist eine Funktion in einem Bereich bis auf Pole regulär, so heißt sie dort *meromorph.*

3. $\sum_{-1}^{-\infty}$ enthält unendlich viele Glieder. Dann heißt $a$ eine *isolierte wesentlich singuläre Stelle* für $f(z)$. Hierfür gilt der

Satz von Weierstraß (1876, *Werke* 2 S. 77 [S. 124]): In jeder Umgebung einer isolierten, wesentlich singulären Stelle $a$ kommt eine Funktion jedem Werte beliebig nahe; d. h. ist $\delta > 0$ und $c$ (komplex) beliebig vorgegeben, so gibt es in jeder beliebig kleinen Umgebung von $a$ ein $z$, so daß

$$|f(z) - c| < \delta \quad \text{ist.}$$

Ist umgekehrt $f(z)$ in der Umgebung von $a$ regulär und kommt $f(z)$ dort jedem Wert beliebig nahe, so können die Fälle 1. und 2. nicht vorliegen, also muß $a$ eine wesentlich singuläre Stelle sein. Und: Kommt $f(z)$ auch nur einem Werte nicht beliebig nahe, so liegt eine hebbare Unstetigkeit oder ein Pol vor.

Das *Residuum* einer Funktion in einem isolierten singulären Punkt ist gleich $a_{-1}$. Die Cauchysche Integralformel kann als eine Anwendung dieses Satzes aufgefaßt werden.

### Der Punkt $\infty$.

Bisher wurde in den Definitionen von Regularität, Ordnung einer Nullstelle und singuläre Stelle, sowie beim Cauchyschen Satz der unendlich ferne Punkt stets ausgeschlossen. Wir definieren nunmehr: Eine Funktion soll im Punkte $z = \infty$ regulär sein, bzw. eine Nullstelle $\mu$ ter Ordnung, bzw. einen Pol $\nu$ ter Ordnung, bzw. eine wesentlich singuläre Stelle haben, wenn dies bei $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ als Funktion von $z'$ für $z' = 0$ zutrifft.

Ist $z = \infty$ ein regulärer Punkt, so gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

Ist $z = \infty$ eine Nullstelle $\mu$ ter Ordnung, so gilt:

$$f(z) = \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad (\mu \geqq 1).$$

Ist $z = \infty$ ein Pol $\nu$ ter Ordnung, so gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\nu} c_n z^n \quad (\nu \geqq 1,\ c_\nu \neq 0).$$

Ist $z = \infty$ eine wesentlich singuläre Stelle, so gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad (\text{unendlich viele } c_n \neq 0).$$

Die Laurent-Entwicklungen konvergieren für jeden Punkt außerhalb eines hinreichend großen Kreises um den Nullpunkt, nämlich des kleinsten Kreises, außerhalb dessen $f(z)$ regulär ist (bis eventuell auf $z = \infty$).

Eine Funktion, die keine Konstante ist, kann nicht in der ganzen Ebene mit Einschluß von $z = \infty$ regulär sein. Dies folgt aus dem

Satz von Liouville: Eine Funktion, die in der ganzen Ebene (mit eventuellem Ausschluß von $\infty$) regulär und beschränkt ist, ist eine Konstante. (Eigentlich von Cauchy, *C. R.* **19** (1844) S. 1377.)

Ist $f(z)$ in der Umgebung von $z = \infty$ mit eventueller Ausnahme dieses Punktes regulär, so verstehen wir unter dem *Residuum* von $f(z)$ für $z = \infty$ das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int f(\zeta)\,d\zeta$, erstreckt über einen Kreis, außerhalb dessen und auf dem $f(z)$ regulär ist, und zwar in dem Sinne, daß die Umgebung von $z = \infty$ zur Linken liegt.

Ist $\sum_{0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{1}^{\infty} c_n z^n$ die Laurent-Entwicklung für den Punkt $\infty$, so ist das Residuum gleich $-b_1$. Ist $f(z)$ in $z = \infty$ regulär, so kann das Residuum trotzdem von 0 verschieden sein. Der Cauchysche Satz, wonach das Integral über eine geschlossene Kurve, in und auf der die Funktion regulär ist, verschwindet, braucht also nicht zuzutreffen, wenn das Innere den

Punkt $\infty$ enthält. Hat eine Funktion in der ganzen Ebene nur endlich viele singuläre Stellen, so ist die *Summe der Residuen*, einschließlich dessen in $z = \infty$, gleich Null.

### Die rationalen Funktionen.

Eine rationale Funktion $\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_p z^p}{\beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_q z^q}$ hat in der ganzen Ebene mit Einschluß des Punktes $\infty$ keine anderen Singularitäten als Pole, und umgekehrt: Eine Funktion, die in der ganzen Ebene einschließlich $\infty$ keine andern Singularitäten als Pole hat, ist eine rationale Funktion. Hat sie speziell nur in $z = \infty$ einen Pol, so ist sie eine *ganze* rationale Funktion, d. h. es ist $\beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$; $\beta_0 \neq 0$. Hat die rationale Funktion in den Punkten $z_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots r)$ Pole der Ordnung $\mu_\lambda$ und in $z = \infty$ einen Pol der Ordnung $\mu_0$ (im Falle der Regularität sei $\mu_0 = 0$), so läßt sie sich in der Form darstellen:

$$f(z) = a_{\mu_0} z^{\mu_0} + \cdots + a_1 z + a_0 + \sum_{\lambda=1}^{r} \left[ \frac{b_{\mu_\lambda}^{(\lambda)}}{(z - z_\lambda)^{\mu_\lambda}} + \cdots + \frac{b_1^{(\lambda)}}{z - z_\lambda} \right]$$

(*Partialbruchzerlegung*).

Eine rationale Funktion läßt sich in jedem abgeschlossenen Bereich, der keinen Pol enthält, beliebig genau durch ganze rationale Funktionen (Polynome) approximieren.

Durch die Angabe ihrer Nullpunkte und Pole sowie deren Ordnung ist eine rationale Funktion bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt; jedoch muß die Anzahl der Nullpunkte gleich der Anzahl der Pole (mit Einrechnung des unendlich fernen Punktes) sein

### Die Anzahl der Nullstellen und Pole.

Eine Funktion $f(z)$ sei im Innern und auf dem Rande eines von einer oder mehreren geschlossenen, rektifizierbaren Kurven begrenzten Bereiches $\mathfrak{B}$ regulär bis auf Pole im Innern (d. h. meromorph), ferner auf der Berandung $\mathfrak{C}$ von 0 verschieden. (In diesem Fall liegen im Innern nur endlich viele Pole, da unendlich viele eine Häufungsstelle hätten, die dann weder ein regulärer Punkt noch ein Pol wäre.) Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \text{Anzahl der Nullstellen minus Anzahl der Pole}$$

in $\mathfrak{B}$, wobei jede Nullstelle und jeder Pol mit der Vielfachheit zu zählen ist, die durch die Ordnung gegeben ist.

Ferner ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \text{Summe der Nullstellen minus Summe der Pole,}$$

jede Nullstelle und jeder Pol mit der entsprechenden Vielfachheit gezählt.

Satz von Rouché (*J. éc. polyt.* **22**, 39. cah. (1862) S. 193 [S. 217]): Sind zwei Funktionen $f(z)$ und $F(z)$ im Innern und auf dem Rande eines Bereiches $\mathfrak{B}$ regulär und ist auf dem Rande $F(z) \neq 0$ und $|f(z)| < |F(z)|$, so haben $F(z)$ und $F(z) + f(z)$ gleichviel Nullstellen im Innern von $\mathfrak{B}$.

Satz von Jensen (*Acta math.* **22** (1899) S. 359): Eine Funktion $f(z)$ sei im Innern des Kreises $|z| < R$ meromorph, auf dem Rande regulär und von 0 verschieden Im Innern mögen die Nullstellen $z_1, \ldots z_m$ und die Pole $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ (mehrfache auch mehrfach aufgeschrieben) liegen. Der Nullpunkt sei weder Nullstelle noch Pol. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi = \lg\frac{|f(0)|\,R^{m-n}\,|\zeta_1\cdots\zeta_n|}{|z_1\cdots z_m|}$$

(Die Werte, deren Logarithmen zu bilden sind, sind positive Zahlen $\neq 0$.)

Für *reguläre* Funktionen folgt hieraus:

Ist eine Funktion $f(z)$ in und auf dem Kreise $|z| \leqq R$ regulär und hat sie dort die Nullstellen $z_1, \ldots z_m$ (mehrfache auch mehrfach aufgeschrieben), von denen keine in den Mittelpunkt und auf den Rand fällt, ist ferner auf dem Rande $|f(z)| \leqq M$, so ist

$$|z_1 \cdots z_m| \geqq \frac{|f(0)|\,R^m}{M}.$$

und

$$|z_\nu| \geqq R\,\frac{|f(0)|}{M},$$

d. h. die Nullstellen liegen sämtlich außerhalb des Kreises vom Radius $R\frac{|f(0)|}{M}$.

Ist $\alpha$ die Anzahl der Nullstellen in und auf dem Kreise $|z| \leqq \varrho < R$, so ergibt sich aus dem letzten Satz:

$$\alpha \leqq \frac{\lg \frac{M}{|f(0)|}}{\lg \frac{R}{\varrho}}.$$

Der Jensensche Satz hat sich in vielen modernen Untersuchungen als äußerst fruchtbar erwiesen, vgl. z. B. Bohr und Landau, *Pal. Circ. mat.* **37** (1914) S. 269; F. u. R. Nevanlinna, *Acta soc. scient. Fenn.* **50** Nr. 5 (1922), hier auch Verallgemeinerung; Ostrowski, *Acta litt. ac scient. Szeged* **1** (1923) S. 80.

## III. Abschnitt.

## Analytische Fortsetzung und Riemannsche Fläche.

### § 7. Analytische Fortsetzung.

Ist von einer Funktion $f(z)$ bekannt, daß sie in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ regulär ist und gibt es eine Funktion $F(z)$, die in einem $\mathfrak{B}$ enthaltenden Bereich $\mathfrak{D}$ regulär ist und in $\mathfrak{B}$ mit $f(z)$ übereinstimmt, so heißt $F(z)$ eine analytische Fortsetzung von $f(z)$. Aus dem Identitätssatz (S. 715) folgt, daß die analytische Fortsetzung in einen größeren Bereich, wenn überhaupt, so nur auf *eine* Weise möglich ist. Analytische Fortsetzung ist keineswegs identisch mit Darstellung durch denselben analytischen Ausdruck. So stellt z. B. das Cauchysche Integral (vgl. S. 703) im Innern der Integrationskurve die Funktion, im Äußern die Konstante 0 dar. (Vgl. jedoch die Borelschen Untersuchungen hierzu, dargestellt mit Literaturangaben bei Vivanti-Gutzmer, *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen,* Leipzig 1906, S 334; ferner Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe,* chap. III—V, Paris 1917, und *The Rice Institute pamphlet* **4** (1917) S. 22)

#### Fortsetzung durch Potenzreihen.

*Die wichtigste Art,* eine reguläre Funktion fortzusetzen, beruht auf der Anwendung der *Potenzreihen.* Ist von einer Funktion $f(z)$ bekannt, daß sie in einem Kreise $\mathfrak{K}_0$ um den Mittelpunkt $z_0$ regulär ist, so kann man sie in eine Reihe nach Potenzen von $z - z_0$ entwickeln:

$$f(z) = \mathfrak{P}_0(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die sicher in $\mathfrak{K}_0$ konvergiert. Es kann aber vorkommen, daß $\mathfrak{K}_0$ nicht der wahre Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}_0$ ist, d. h. daß $\mathfrak{P}_0$ in einem größeren Kreise $\overline{\mathfrak{K}}_0$ noch konvergiert. Da eine Potenzreihe in ihrem Konvergenzkreis eine reguläre Funktion darstellt, so ist damit $f(z)$ in das größere Gebiet $\overline{\mathfrak{K}}_0$ analytisch fortgesetzt. Ist $z_1$ ein innerer Punkt von $\overline{\mathfrak{K}}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ der Kreis um $z_1$, der $\overline{\mathfrak{K}}_0$ von innen berührt, so ist $f(z)$ in $\mathfrak{K}_1$ regulär und daher in eine sicher innerhalb $\mathfrak{K}_1$ konvergente Reihe

$$\mathfrak{P}_1(z - z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z - z_1)^\nu$$

nach Potenzen von $z - z_1$ entwickelbar, deren Koeffizienten aus denen der Reihe $\mathfrak{P}_0$ berechnet werden können:

$$b_\nu = \frac{1}{\nu!} \mathfrak{P}_0^{(\nu)}(z_1 - z_0)$$

und die übrigens durch Umordnung aus der Reihe

$$\mathfrak{P}_0(z - z_0) = \mathfrak{P}_0((z - z_1) + (z_1 - z_0)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((z - z_1) + (z_1 - z_0))^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (z - z_1)^\nu (z_1 - z_0)^{n-\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (z - z_1)^\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n}{\nu} a_n (z_1 - z_0)^{n-\nu}$$

entstanden gedacht werden kann. Konvergiert nun aber $\mathfrak{P}_1$ über $\mathfrak{K}_1$ hinaus in einem größeren Kreis $\overline{\mathfrak{K}}_1$, so ist damit $f(z)$ in das sichelförmige Gebiet von $\overline{\mathfrak{K}}_1$, das über $\mathfrak{K}_0$ hinausreicht, analytisch fortgesetzt.

Nun kann man wieder $f(z)$ um einen in $\mathfrak{K}_1$ liegenden Punkt $z_2$ entwickeln und erhält eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_2(z - z_2)$ usw. Der Übergang von $\mathfrak{P}_0$ zu $\mathfrak{P}_1$, ebenso der von $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{P}_2$, usw., wo also der neue Entwicklungsmittelpunkt innerhalb des alten Konvergenzkreises liegt, wird als *unmittelbare Fortsetzung* bezeichnet

Eine einzelne der hierbei auftretenden Potenzreihen heißt ein *Funktionselement*. Unter einer *analytischen Funktion* schlechthin (wobei also nicht wie im II. Abschnitt von vornherein von einem Gebiet die Rede ist, in dem die Funktion als regulär bekannt ist) versteht man nach Weierstraß die Gesamtheit aller Elemente, die aus einem von ihnen durch analytische Fortsetzung erhalten werden können. Jedes Element kann aus jedem anderen durch Bildung einer *„Kette“*, d. h. einer geeignet gewählten Folge von Funktionselementen, die sukzessive durch unmittelbare Fortsetzung auseinander hervorgehen, erhalten werden.

Die analytische Funktion ist durch ein beliebiges ihrer Elemente bestimmt. Die Konvergenzradien der Funktionselemente ändern sich stetig mit dem Mittelpunkt.

Auf einer Kurve zwischen $P_1$ und $P_2$ mögen die Mittelpunkte der Konvergenzkreise einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Funktionselementen liegen, von denen je zwei aufeinanderfolgende durch unmittelbare Fortsetzung auseinander hervorgehen. Man sagt dann, die Funktion sei von $P_1$ nach $P_2$ *langs der Kurve fortgesetzt.*

### Permanenz der Funktionalgleichungen.

$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; z)$ sei eine reguläre Funktion einer jeden ihrer Variablen, wenn $x_\nu$ auf ein Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, $z$ auf ein Gebiet $\mathfrak{G}_z$ beschränkt wird Sie sei mit ihren ersten partiellen Ableitungen für jedes Wertsystem $(x_1, \ldots, x_n; z)$, das dieser Gesamtheit von Gebieten entnommen ist, stetig. Ist nun $a$ ein Punkt von $\mathfrak{G}_z$ und $\mathfrak{P}_\nu(z - a)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ ein Funktionselement, das in einer gewissen Umgebung von $z = a$ nur Werte aus $\mathfrak{G}_\nu$ annimmt, und genügen die $\mathfrak{P}_\nu$ in einem Kreis um $z = a$ der Gleichung

$$\Phi(\mathfrak{P}_1(z-a), \ldots, \mathfrak{P}_n(z-a); z) \equiv 0,$$

so genügen auch etwaige Fortsetzungen von ihnen innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}_z$ derselben Gleichung, vorausgesetzt, daß auch sie wieder nur Werte aus den $\mathfrak{G}_\nu$ annehmen. (Beweis z. B. in Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie* **1** (1921) S. 204)

(Sind z. B. einige der $\mathfrak{P}_\nu$ Ableitungen der anderen, so ist $\Phi = 0$ eine Differentialgleichung und man erhält einen sehr haufig benutzten Spezialfall des Satzes.)

Das Permanenzprinzip ist ein zweites wichtiges Mittel zur analytischen Fortsetzung von Funktionen Beispiel: Die Eulersche *Gammafunktion*, die zunächst durch $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ nur für

$\Re(z) > 0$ definiert ist, aber vermöge der durch partielle Integration abzuleitenden Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (für positiv ganzzahlige $z$ ist $\Gamma(z+1) = z!$) in die ganze Ebene mit Ausnahme der Punkte $z = 0, -1, -2, \ldots$ fortgesetzt werden kann, wo sie Pole 1. Ordnung besitzt.

Eine dritte Methode der analytischen Fortsetzung wird durch das Schwarzsche Spiegelungsprinzip (s. S. 743) geliefert.

### Mehrdeutigkeit.

Setzt man ein Funktionselement längs eines geschlossenen Weges fort, d. h. kehrt man mit dem Entwicklungsmittelpunkt in den Ausgangspunkt zurück, so kann es vorkommen, daß das Funktionselement selbst sich nicht reproduziert; abermalige Fortsetzung kann wiederum ein neues Funktionselement liefern usw., so daß man demselben Punkte der komplexen Ebene 2, 3, usw., eventuell unendlich viele Funktionselemente zuordnen muß. Die analytische Funktion heißt dann *mehrdeutig*, bzw. *unendlich vieldeutig*. Sie kann höchstens abzählbar unendlich vieldeutig sein (Poincaré, *Palermo Circ. mat.* 2 (1888) S 197; Volterra, *Rom. Acc. L. Rend.* 4, 2⁰ sem. (1888) S. 355).

*Das fundamentale Beispiel einer m-deutigen Funktion* ist $w = \sqrt[m]{z} = z^{\frac{1}{m}}$ ($m$ positiv ganz), definiert durch $\sqrt[m]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{m}}$, wo $z = re^{i\varphi}$ und $\sqrt[m]{r} \geqq 0$, oder als Umkehrung von $z = w^m$ (die Potenzreihenentwicklung um einen beliebigen Punkt $\neq 0$ ist hierdurch bestimmt); auf Wegen, die den Nullpunkt umschließen, reproduziert sich das Funktionselement für einen Punkt $z_0 \neq 0$ erst nach $m$-maligem Umlauf um $z = 0$. Nach einem einfachen Umlauf im positiven Sinn erscheint das Funktionselement mit $e^{i\frac{2\pi}{m}}$ multipliziert.

*Das fundamentale Beispiel einer unendlich vieldeutigen Funktion* ist $w = \lg z$, definiert als Umkehrung von $z = e^w$ (für $z = re^{i\varphi}$: $w = \lg r + i\varphi$, unter $\lg r$ den gewöhnlichen reellen Logarithmus verstanden) oder auch als $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, genommen längs eines den Punkt $z = 0$ meidenden Weges. Nach einem einmaligen Umlauf in positivem Sinne erscheint das Funktionselement um $2\pi i$ vermehrt. — Die beliebige Potenz $w = z^\alpha$ ($\alpha$ beliebig komplex) wird definiert durch $w = e^{\alpha \lg z}$ und ist daher unendlich vieldeutig,

außer wenn $\alpha$ rational ist. — Dagegen bedeutet $w = a^z = e^{z \lg a}$, wo $a$ eine beliebige komplexe Konstante ist, je nach der Definition von $\lg a$ unendlich viele verschiedene eindeutige Funktionen.

Während wir im II. Abschnitt von „in einem Bereich eindeutigen" Funktionen sprachen, die jedoch vom jetzigen Standpunkt aus durch analytische Fortsetzung zu mehrdeutigen Funktionen sich erweitern können, verstehen wir nunmehr unter einer *eindeutigen Funktion* schlechthin eine solche, deren Funktionselemente sich bei Fortsetzung längs geschlossenen Wegen stets reproduzieren.

Monodromiesatz (von Weierstraß. Beweis s. z. B. bei Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie* **1**, S. 217): Eine in einem einfach zusammenhängenden Bereich bis auf Pole reguläre Funktion ist dort notwendig eindeutig.

Erweist sich also eine Funktion bei Fortsetzung in einem einfach zusammenhängenden Bereich als mehrdeutig, so enthält dieser mit Notwendigkeit Singularitäten, und zwar andere als Pole.

## § 8. Die Riemannsche Fläche.

Durch das Auftreten von Mehrdeutigkeiten wird man dazu geführt, die geometrische Vorstellung der $z$-Ebene, bzw. ihrer Gebiete, in denen man die Funktion definiert hat, zu erweitern.

Wie die Funktion in ihrem Gesamtverlauf erst allmählich durch analytische Fortsetzung entsteht, so denkt man sich gleichzeitig auch ihr Definitionsgebiet erst nach und nach anwachsend, und zwar als selbständige Fläche, die von der $z$-Ebene losgelöst ist. Letztere ist nur der Boden, über dem sich das sukzessive erzeugte Definitionsgebiet wie ein Teppich ausbreitet. Kommt man beim Anwachsen des Gebiets in eine Gegend der $z$-Ebene, über der schon ein Stück Fläche ausgebreitet ist, so verwebt man den neuen Teil nur dann mit dem alten, wenn die zugehörigen Funktionselemente in dem gemeinsamen Gebiet dieselben Funktionswerte liefern. Im anderen Fall läßt man die jüngste Verlängerung der Fläche über den alten Teil hinweglaufen, so daß also dort zwei Blätter übereinanderliegen. Kommt man bei weiterer Fortsetzung wieder einmal über die betreffende Gegend der $z$-Ebene, so führt man im Falle der Nichtübereinstimmung des zugehörigen Funktionselementes mit den zu den früheren Blättern gehörigen die Fläche in einem neuen Blatt über die früheren hinweg; ergibt sich jedoch Übereinstimmung mit dem zu einem der früheren Blätter gehörigen Funktionselemente, so

verwebt man die letzte Fortsetzung der Fläche mit dem betreffenden Blatt usw. Der räumlichen Vorstellung erwächst hier nur eine kleine Schwierigkeit, wenn die Vereinigung nicht mit dem letzten, sondern mit einem der früheren Blätter herzustellen ist, wodurch jenes frühere Blatt mit den späteren längs der Durchdringungslinien gemeinsame Punkte bekommt, die man jedoch in Ansehung unserer Zwecke nicht als gemeinsam rechnen darf.

Die gesamte, bei diesem Prozeß erzeugte Fläche heißt die *Riemannsche Fläche der Funktion* (Riemann, *Dissertation* 1851, *Werke*, 2. Aufl., S. 3 [S. 7]).

Für die unendlich vieldeutige Funktion $w = \lg z$ erhält man auf diese Weise eine Schraubenfläche von unendlich vielen Windungen mit der Achse im Punkte $z = 0$; jedes Blatt überdeckt die ganze $z$-Ebene. Für die Funktion $w = \sqrt[m]{z}$ ($m$ pos. ganz) erhält man eine Schraubenfläche mit $m$ Windungen und der Achse in $z = 0$. Das $m$te Blatt schließt sich, die übrigen durchdringend, ohne mit ihnen gemeinsame Punkte zu haben, wieder an das erste an (Fig. 4).

Die wesentliche Bedeutung der Riemannschen Fläche beruht darauf, daß die Funktion auf ihr *eindeutig* ist, während sie auf der $z$-Ebene mehrdeutig war. Zu einer $z$-Koordinate gehören auf der Fläche soviel Punkte, als Blätter über der betreffenden Stelle ausgebreitet liegen. Zu jedem dieser Punkte gehört ein anderes Funktionselement, oder, wie man sagt, ein anderer *„Funktionszweig"* (Riemann, *Werke*, 2. Aufl., S. 68). Liegt über einem Bereich der $z$-Ebene nur ein Blatt, so heißt die Fläche über diesem Bereiche *schlicht*. Liegen über mindestens einem Punkte $n$ Blätter und über keinem Punkte mehr als $n$, so heißt die Funktion $n$-deutig.

Fig 4 Dreiblättrige Riemannsche Fläche

Die Zuordnung der $w$-Werte zu den $z$-Werten vermöge der Funktion $w = f(z)$ kann man als eine *Abbildung* auffassen. (Ausführlicher s. IV. Abschn.) Die Funktion $w = \sqrt[m]{z}$ bildet die $m$-blättrige Riemannsche Fläche uber der $z$-Ebene auf die ganze schlichte $w$-Ebene ab. Zerschneidet man die Riemannsche Fläche durch einen längs der positiv reellen Achse der $z$-Ebene geführten Schnitt in sämtlichen Blättern (sogenannte *Verzweigungsschnitte*), so zerfällt die Fläche in $m$ übereinander geschichtete Ebenen. Diesen einzelnen Blättern entsprechen der Reihe nach die $m$ Sektoren der $w$-Ebene, die durch die von $w = 0$ ausgehenden, mit der positiv reellen Achse die Winkel $k\frac{2\pi}{m}$ $(k = 0, 1, \ldots, m - 1)$ bildenden Strahlen begrenzt werden. Die Blätter der Riemannschen Fläche in unzerschnittenem Zustand hängen so zusammen, wie diese Sektoren der $w$-Ebene — In ähnlicher Weise bildet die Funktion $w = \lg z$ die unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche auf die schlichte $w$-Ebene ab. Zerschneidet man wieder durch Verzweigungsschnitte längs der positiv reellen Achse die Fläche in unendlich viele Blätter, so entsprechen diesen die Parallelstreifen von der Breite $2\pi$ in der $w$-Ebene, die von den Geraden $v = k\ 2\pi (w = u + vi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ begrenzt werden. — Unter dem *Hauptzweig* der Funktion $\sqrt[m]{z}$, bzw. $\lg z$ versteht man diejenigen Funktionselemente, die der positiv reellen Achse in der $z$-Ebene dieselbe Achse in der $w$-Ebene zuordnen.

Der Punkt $z = 0$ war bei der früheren Erzeugung der Riemannschen Fläche von $\sqrt[m]{z}$ und $\lg z$ kein innerer Punkt der Fläche. Grenzt man um den Punkt mit der Koordinate $z = 0$ in der $z$-Ebene eine Umgebung ab, so entsprechen ihr nicht, wie bei den übrigen Punkten, $m$, bzw. unendlich viele getrennte Umgebungen auf der Fläche, sondern ein zusammenhängendes, sich um $z = 0$ herumwindes Stück. Derartige Punkte heißen *Windungspunkte* (Riemann, *Werke,* 2. Aufl, S. 8) oder *Verzweigungspunkte* (ebenda, S. 68) der Fläche; besteht die Windung um den Punkt herum aus $m$ Blättern, so heißt der Punkt ein Verzweigungspunkt von $m - 1$ter Ordnung — Verzweigungspunkte treten höchstens in abzahlbar unendlicher Anzahl auf

Der *Punkt* $z = \infty$ kann in die Betrachtung einbezogen werden, indem man die Riemannsche Fläche nicht über der $z$-Ebene, sondern über der $z$-Kugel ausbreitet. Ein zum Punkt $\infty$ gehöriges Funktionselement erscheint in der Form $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$. Für die

Funktion $\sqrt[m]{z}$, bzw. $\lg z$ ist $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt $m-1$ter, bzw. unendlich hoher Ordnung.

Die Verzweigungspunkte endlicher Ordnung heißen auch „Stellen algebraischen Charakters“ (weil bei algebraischen Funktionen (Kap. XVII) keine anderen als solche auftreten), die Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung auch „transzendente Singularitäten“.

Zu der Riemannschen Fläche rechnet man hinzu: die Verzweigungspunkte endlicher Ordnung (weil sie bei einer Abbildung ihrer Umgebung auf ein schlichtes Gebiet in innere Punkte übergehen, s. S. 737) sowie die außerwesentlich singulären Punkte oder Pole (weil ihnen als Funktionswert der bei Darstellung auf der Kugel keinen Ausnahmefall bedeutende Wert $w = \infty$ zugehört). Dem entspricht die Erweiterung der „analytischen Funktion“ zum *„analytischen Gebilde“* (Weierstraß, *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten, Werke* 4), indem man statt der früheren „regulären“ Funktionselemente auch solche der Form $\mathfrak{P}(\sqrt[m]{z-a})$ bzw., wenn es sich um den unendlich fernen Punkt handelt, der Form $\mathfrak{P}\left(\sqrt[m]{\frac{1}{z}}\right)$ ($m$ positiv ganz) und ferner das Auftreten von endlich vielen negativen Exponenten zuläßt. (Es können auch beide Fälle zugleich vorkommen, z. B. bei der Funktion $w = \sqrt[m]{z}$ im Punkte $z = \infty$). An Stelle der alten Definition der *analytischen Fortsetzung* hat dann folgendes Prinzip zu treten: Zwei Funktionselemente gehören zu demselben analytischen Gebilde, wenn es ein reguläres Funktionselement gibt, das aus beiden durch analytische Fortsetzung erhalten werden kann.

Die vorhin anschaulich geometrisch gegebene und daher nicht mathematisch befriedigende *Definition der Riemannschen Fläche* kann auch *begrifflich exakt* gefaßt werden. (S. vor allem Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche,* Leipzig und Berlin 1913.) Die Punkte der Riemannschen Fläche sind nicht schon durch die $z$-Stelle $z = a$, über der sie liegen, sondern erst durch das zu ihnen gehörige Funktionselement $\mathfrak{P}(z-a)$ erschöpfend charakterisiert. (Der Funktionswert an der betreffenden Stelle würde nicht ausreichen, da es vorkommen kann, daß zwei Funktionselemente im Mittelpunkt übereinstimmen, in den Nachbarpunkten aber nicht.) Da der Begriff des Mittelpunktes schon im Begriff des Funktionselementes enthalten ist, so kann man einen Punkt der Riemannschen Fläche auch einfach durch sein

zugehöriges Funktionselement $\mathfrak{P}(z-a)$ charakterisieren. Um zu einer rein begrifflichen Definition der Riemannschen Fläche zu gelangen, legen wir nun nicht sogleich anschaulich geometrische Vorstellungen zugrunde, sondern gehen umgekehrt vor: Unter einem „Punkt" verstehen wir ein Funktionselement $\mathfrak{P}(z-a)$ unserer analytischen Funktion; unter einer „Umgebung" eines Punktes $\mathfrak{P}(z-a)$ eine Gesamtheit von Funktionselementen $\mathfrak{P}(z-\zeta)$, die durch unmittelbare Fortsetzung aus ihm hervorgehen und deren Mittelpunkte $\zeta$ einer Umgebung (im gewöhnlichen Sinne) der Stelle $a$ angehören; unter einer „stetigen Kurve" zwischen zwei „Punkten" $\mathfrak{P}(z-a)$ und $\mathfrak{P}(z-b)$ eine Gesamtheit von „Punkten" $\mathfrak{P}(z-\zeta)$, die derart einem reellen Intervall $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ zugeordnet sind: $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_\lambda$, daß $\mathfrak{P}_{\lambda_0} = \mathfrak{P}(z-a)$, $\mathfrak{P}_{\lambda_1} = \mathfrak{P}(z-b)$ ist und durch Einschränkung des Parameters $\lambda$ auf eine hinreichend kleine Umgebung eines bestimmten Wertes $\bar{\lambda}$ es erreicht werden kann, daß $\mathfrak{P}_\lambda$ in einer vorgeschriebenen Umgebung von $\mathfrak{P}_{\bar{\lambda}}$ liegt. Dann folgt aus der Definition der analytischen Funktion, daß jeder „Punkt" $\mathfrak{P}$ Umgebungen besitzt und daß man je zwei „Punkte" durch eine „stetige Kurve" verbinden kann. Damit ist nachgewiesen, daß die Gesamtheit aller „Punkte" Gebietscharakter hat (vgl. S. 688), so daß man im übertragenen Sinn geometrische Vorstellungen gebrauchen kann.

Man nennt diese Gesamtheit ein *„Riemannsches Feld"* (Fricke, *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen* 1, Leipzig 1916, S. 24). Erweitert man die gegebenen Begriffe dahin, daß als „Punkte" Potenzreihen der Form $\mathfrak{P}(\sqrt[m]{z-a})$, bzw. $\mathfrak{P}\left(\sqrt[m]{\frac{1}{z}}\right)$ mit endlich vielen negativen Exponenten zugelassen werden, so treten noch die Verzweigungspunkte algebraischen Charakters und die Pole hinzu und man erhält die *„Riemannsche Fläche"*, das begriffliche Substrat des früher besprochenen anschaulichen Gebildes gleichen Namens; sie gibt das „analytische Gebilde" in anderer Terminologie wieder.

Die volle Bedeutung der Riemannschen Ideen wird jedoch erst ausgeschöpft, wenn man mit F. Klein von der Fläche im Sinne der Analysis situs ausgeht und die auf ihr eindeutigen, regulär-analytischen Funktionen betrachtet. Vgl. hierzu außer der Schrift von F. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihre Integrale,* Leipzig 1882 *(Ges. Abh.* 3, S. 499*)* vor allem H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche,* § 7, wo S 35 auch weitere Literatur zitiert ist.

## § 9. Singuläre Stellen.

Setzt man eine Funktion durch eine Kette (s. S. 727) von abzählbar unendlich vielen Funktionselementen fort, deren Mittelpunkte einen einzigen Häufungspunkt $a$ haben, der auch der unendlich ferne Punkt sein kann, so streben die Konvergenzradien, wenn wir, um den Punkt $a = \infty$ genau wie die endlichen Punkte behandeln zu können, sie auf der komplexen Kugel messen, gegen einen Grenzwert $R$, und es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder ist $R > 0$; dann ist $a$ eine reguläre Stelle. Oder es ist $R = 0$; dann nennen wir $a$ eine *singuläre Stelle.* (Diese Art der Definition ist die von Bieberbach, *Enzykl.* $\mathrm{II}_3$, Heft 4, S. 401, vorgeschlagene.) Bei mehrdeutigen Funktionen ist zu berücksichtigen, daß auf der Riemannschen Fläche die Angabe der $z$-Koordinate nicht genügt, sondern daß hier die Funktionselemente zur Charakterisierung hinzutreten müssen. (Siehe hierüber Bieberbach a. a. O., S. 402—404, oder *Lehrbuch* **1**, S. 209—211.)

Nach dieser Definition sind z. B. bei einer eindeutigen analytischen Funktion nicht alle Randpunkte des vollständigen Regularitätsbereichs singuläre Punkte. Man kann Beispiele von einfach zusammenhängenden Bereichen angeben, die Regularitätsgebiete von analytischen Funktionen sind (vgl. S. 756) und bei denen Randpunkte existieren, die nicht durch eine Kette der obigen Art erreichbar sind (s. z. B Osgood, *Lehrbuch* **1**, 2. Aufl., S. 153, 154 und S. 438).

Auf dem Rande des Konvergenzkreises einer Potenzreihe liegt mindestens ein singulärer Punkt der dargestellten analytischen Funktion (aber nicht umgekehrt: Nicht jeder singuläre Punkt braucht auf dem Rande des Konvergenzkreises eines Funktionselementes zu liegen).

Die singulären Punkte können sich auch zu *singulären Linien* zusammenschließen. Ist die singuläre Linie geschlossen, so läßt sich die Funktion nicht im gewöhnlichen Sinne über sie hinaus analytisch fortsetzen (vgl. jedoch die S. 725 zitierten Untersuchungen). Die betreffende Linie heißt dann eine *natürliche Grenze* der Funktion, im Gegensatz zu den aus irgendwelchen Gründen eingeführten künstlichen Grenzen (wie z B. Schnitten in einer Riemannschen Fläche, die ein Gebiet abgrenzen, in dem die Funktion eindeutig ist), uber die hinaus eine Fortsetzung möglich ist.

Man kann gewisse Funktionsklassen, die schon anderweitig definiert sind, auch durch ihre Singularitäten vollständig charakterisieren. S. z. B. für die rationalen Funktionen S. 723. Ferner: Eine Funktion, die bis auf endlich viele Pole und Verzweigungsstellen endlicher Ordnung in der ganzen Ebene regulär ist, ist eine algebraische Funktion (vgl. Kap. XVII).

## IV. Abschnitt.
# Geometrische Funktionentheorie.

## § 10. Konforme Abbildung.

Ist $w = f(z)$ in einem Bereiche $\mathfrak{B}_z$ auf der $z$-Ebene oder allgemeiner auf einer Riemannschen Fläche regulär, so erfüllt die Menge der zugehörigen $w$-Werte ebenfalls einen eventuell auf einer Riemannschen Fläche liegenden Bereich $\mathfrak{B}_w$, der als „*Bild*“ des $z$-Bereiches aufgefaßt werden kann. Die Ausbeutung dieser geometrischen Veranschaulichung liegt der „geometrischen Funktionentheorie“ ob. Da der reelle und der imaginäre Bestandteil einer analytischen Funktion konjugierte Potential- oder harmonische Funktionen sind (s. S. 705), so steht sie in engster Beziehung zur Potentialtheorie, die sich auch geometrischer Veranschaulichungen durch stationäre Strömungen bedient. (Vgl. für diesen Zusammenhang der beiden Disziplinen die Lehrbücher der Funktionentheorie von Osgood, 2. Aufl. 1912, IV. Abschn., und von Hurwitz-Courant, 2. Aufl. 1925, III. Abschn. *Geometrische Funktionentheorie*) Die geometrische Funktionentheorie geht auf Riemann zurück, der die aus der Potentialtheorie geläufigen Gesichtspunkte, eine Funktion durch Randbedingungen zu charakterisieren, in die Theorie der komplexen Funktionen eingeführt hat. Besonders F. Klein hat aus der geometrischen Veranschaulichung viele fruchtbare Ideen gezogen (vgl z. B. die autographierte Vorlesung über Riemannsche Flächen).

Wie man eine analytische Funktion durch analytische Ausdrücke (z. B. Potenzreihen) oder durch ihre Singularitäten (vgl. oben) charakterisieren kann, so kann man sie auch geometrisch durch die zu ihr gehörige Abbildung als gegeben ansehen.

Aus dem Gebietscharakter der Bildmenge folgt: Der *absolute Betrag* einer in einem Gebiet regulären Funktion nimmt im Innern kein Maximum an; ist die Funktion auch noch auf dem Rande regulär oder wenigstens stetig, so wird das Maximum dort angenommen. Der *reelle Teil* (und ebenso der imagi-

näre) nimmt im letzten Fall sowohl sein Maximum als sein Minimum auf dem Rande an.

Ist $\mathfrak{B}_z$ ein schlichter Bereich, d. h. ist $f(z)$ ein eindeutiger Funktionszweig und ist in einem Punkt $z$ von $\mathfrak{B}_z$ $f'(z) \neq 0$, so kann man um $z$ einen so kleinen Kreis abgrenzen, daß dessen Bild ein *schlichtes* Gebiet $\mathfrak{G}$ innerhalb $\mathfrak{B}_w$ bildet, d. h. daß die Abbildung umkehrbar eindeutig ist. In $\mathfrak{G}$ ist $z$ auch eine reguläre Funktion von $w$: $z = \varphi(w)$, und es ist $\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}$. (Satz von der Umkehrfunktion, vgl. S. 693).

Liegen $\mathfrak{B}_z$ und $\mathfrak{B}_w$ auf Riemannschen Flächen, so kann in $\mathfrak{B}_w$ nur da ein *Windungspunkt* liegen, wo im entsprechenden Punkt von $\mathfrak{B}_z$ $f'(z) = 0$ ist; ebenso entsprechen den Punkten in $\mathfrak{B}_w$ mit $\varphi'(w) = 0$ die Windungspunkte in $\mathfrak{B}_z$.

Die wichtigste Eigenschaft der durch eine analytische Funktion vermittelten Abbildung besteht darin, daß sie, abgesehen von den diskreten Ausnahmestellen, die durch die Verzweigungspunkte geliefert werden, konform, d. h. winkeltreu ist; genauer:

Ist $z_0$ kein Windungspunkt und außerdem $f'(z_0) \neq 0$, d. h. ist auch der entsprechende Punkt in $\mathfrak{B}_w$ kein Windungspunkt und bewegen sich zwei Punkte $z_1$ und $z_2$ derart gegen $z_0$, daß $\operatorname{arc}(z_1 - z_0) - \operatorname{arc}(z_2 - z_0) =$ Winkel zwischen den geradlinigen Verbindungen von $z_1$ und $z_2$ mit $z_0$, einen Grenzwert $\alpha$ hat, so hat auch $\operatorname{arc}[f(z_1) - f(z_0)] - \operatorname{arc}[f(z_2) - f(z_0)] =$ Winkel zwischen den geradlinigen Verbindungen der entsprechenden Bildpunkte, einen Grenzwert, der auch gleich $\alpha$ ist.

Ein wichtiger Spezialfall ist der, daß die vorkommenden arcus einzeln Grenzwerte besitzen, d. h. daß sowohl in $\mathfrak{B}_z$ als $\mathfrak{B}_w$ die Annäherung auf Kurven erfolgt, die in $z_0$, bzw. $w_0 = f(z_0)$ bestimmte Tangenten besitzen. Dann folgt:

Der *Schnittwinkel* der Originalkurven überträgt sich *nach Größe und Drehungssinn* auf die Bildkurven. — Hat die Randkurve eines einfach zusammenhängenden Bereichs an jeder Stelle eine Tangente und ist die Abbildungsfunktion auch auf dem Rande regulär, so wird durch die Abbildung auf den Rand des Bildbereiches derselbe Umlaufsinn übertragen.

Die im engeren Sinne, d. h. unter Erhaltung des Drehungssinnes, winkeltreuen Abbildungen, heißen *konform*. Man nennt sie auch vage „in den kleinsten Teilen ähnlich“. Die Tatsache $\left|\frac{dw}{dz}\right| = |f'(z)|$ drückt man vage so aus: Die Abbildung ist *„streckentreu“*, d. h. alle von einem Punkt ausgehenden, hin-

reichend kleinen Strecken werden im gleichen Verhältnis $|f'(z)|$, dem *„linearen Vergrößerungsverhältnis"*, deformiert. Das *„flächenhafte Vergrößerungsverhältnis"* ist $|f'(z)|^2$, ein vager Ausdruck für die Tatsache, daß das Bild eines Bereiches $\mathfrak{B}_z$ den Flächeninhalt

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}_z} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx\,dy$$

$$= \iint\limits_{\mathfrak{B}_z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{B}_z} |f'(z)|^2 dx\,dy$$

hat.

Hat $f'$ in $z_0$ eine Nullstelle $m-1$ter Ordnung $(m \geqq 2)$, d. h.

$$w - f(z_0) = w - w_0 = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m + \cdots \quad (f^{(m)}(z_0) \neq 0),$$

so entspricht dem Punkte $z_0$ ein Windungspunkt $w_0$ von endlicher Ordnung $m-1$ und die Winkel zwischen in $z_0$ einander schneidenden Kurven werden mit $m$ multipliziert, die Abbildung ist *„quasikonform"*. Umgekehrt läßt sich eine hinreichend kleine Umgebung eines Windungspunktes $w_0$ von $m-1$ter Ordnung durch die Funktion $w = w_0 + t^m$; $t = \sqrt[m]{w - w_0}$, auf eine schlichte, volle Umgebung von $t = 0$ abbilden, wobei jeder Winkel mit dem Scheitel in $w_0$ auf den $m$ten Teil reduziert wird. Durch die Substitution $w = w_0 + t^m$ wird daher die Funktion $z = \varphi(w)$ in einer gewissen Umgebung von $t = 0$ eindeutig; man nennt deshalb $t$ einen *lokalen uniformisierenden Parameter* (lokal, weil die Uniformisierung, d. h. das Eindeutigmachen, im allgemeinen nur in einer hinreichend kleinen Umgebung gelungen ist).

## § 11. Die durch lineare Funktionen vermittelten Abbildungen.

Hier lassen sich die Zusammenhänge zwischen der $z$- und der $w$-Ebene nicht nur im Kleinen, sondern auch sehr einfach im Großen verfolgen. Dazu ist es zweckmäßig, sich die beiden Ebenen als zusammenfallend und die Abbildung als eine Transformation der Ebene in sich vorzustellen.

I. Ganze lineare Funktion $w = az + b \quad (a \neq 0)$.

Spezialfälle:

1. $a = 1$: *Translation* um den Vektor $b$.
2. $b = 0$:

α) $a$ positiv reell $= r$. *Streckung* der Ebene, d. h. Ähnlichkeitstransformation mit dem Nullpunkt als Zentrum und dem Ähnlichkeitsverhältnis $r$.

β) $a = e^{i\varphi}$ ($\varphi$ reell): *Drehung* um den Nullpunkt durch den Winkel $\varphi$.

γ) $a$ beliebig $= r e^{i\varphi}$: *Drehstreckung*.

Allgemein:

Streckung um $|a|$, Drehung um $\operatorname{arc} a$ (beides mit dem Nullpunkt als Zentrum), nachfolgend Translation um $b$.

II. Gebrochen lineare Funktion $w = \frac{az+b}{cz+d} \quad \left(\begin{vmatrix} a b \\ c d \end{vmatrix} \neq 0\right)$.

(Vgl. hierzu Kap. XIX, § 2, 3, insbesondere die Figuren.)

Spezialfall:

$$w = \frac{1}{z}, \quad \text{also} \quad |w| = \frac{1}{|z|}, \quad \operatorname{arc} w = -\operatorname{arc} z:$$

Transformation durch *reziproke Radien*, auch Spiegelung am Einheitskreis genannt, mit nachfolgender *Spiegelung* an der reellen Achse.

Allgemein:

Die Transformation ist eine *Kreisverwandtschaft* (sie fuhrt Kreise in Kreise über; Gerade sind als Kreise durch den unendlich fernen Punkt anzusehen). Durch eine geeignet gewählte, lineare Transformation kann man drei beliebige, verschiedene Punkte in drei verschiedene, beliebig gewählte Punkte überführen, und die Transformation ist hierdurch eindeutig bestimmt. Man kann also jeden Kreis durch eine passende lineare Transformation in jeden anderen überführen und dabei noch zwei Punktetripel $z_1, z_2, z_3$ bzw. $w_1, w_2, w_3$ auf den Peripherien vorschreiben, die ineinander übergehen sollen. Da der Umlaufsinn $z_1 \to z_2 \to z_3$ mit dem Umlaufsinn $w_1 \to w_2 \to w_3$ übereinstimmen muß, so kann man sofort entscheiden, ob bei der Transformation das Innere des $z$-Kreises in das Innere oder in das Äußere des $w$-Kreises übergeht.

Die Gesamtheit aller linearen Transformationen bildet eine *Gruppe,* d. h. die Aufeinanderfolge von zwei Transformationen läßt sich auch durch eine einzige realisieren.

Eine lineare Transformation hat mindestens einen und höchstens zwei *Fixpunkte,* d. h. Punkte, die in sich übergehen. Dabei sind folgende Typen zu unterscheiden:

I. Ein Fixpunkt $z_0$

Normalform: $$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + a.$$

*Parabolische* Transformation. Es gibt zwei invariante, orthogonale Kreisscharen, die beide durch $z_0$ gehen. Sämtliche Kreise einer Schar berühren einander; die Kreise der einen Schar gehen einzeln in sich über, die der anderen vertauschen sich. Liegt der Fixpunkt im Unendlichen, so ist die Transformation eine Translation (vgl S. 738).

II. Zwei Fixpunkte $z_1, z_2$.

Normalform: $$\frac{w - z_1}{w - z_2} = \alpha \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

1. $\alpha$ positiv reell: *Hyperbolische* Transformation. Es bleiben zwei orthogonale Kreisscharen invariant. Die Kreise der ersten Schar laufen durch $z_1$ und $z_2$, jeder Kreis geht einzeln in sich über. Die Kreise der zweiten Schar schneiden einander nicht, jeder Kreis geht in ein anderes Individuum über. Liegt der eine Fixpunkt im Unendlichen, so handelt es sich um eine Ähnlichkeitstransformation mit dem anderen Fixpunkt als Zentrum (vgl S. 738).
2. $\alpha = e^{i\varphi}$ ($\varphi$ reell): *Elliptische* Transformation. Dieselben Kreisscharen sind invariant, nur geht jetzt jeder Kreis der zweiten Schar in sich, jeder der ersten in ein anderes Individuum über. Liegt der eine Fixpunkt im Unendlichen, so handelt es sich um eine Drehung um den anderen (vgl. S 738).
3. Keiner dieser Falle liegt vor: *Loxodromische* Transformation. Hier ist keine Kreisschar, sondern eine Schar von Spiralen (Loxodromen) invariant. Liegt der eine Fixpunkt im Unendlichen, so handelt es sich um eine Drehstreckung (vgl. S 738).

Eine lineare Funktion bildet die ganze Ebene mit Einschluß des unendlich fernen Punktes (d. h. die Vollkugel) auf

sich, ebenso das Innere bzw. Äußere eines Kreises auf das Innere oder Äußere eines Kreises (d. h. eine Kugelkalotte auf eine Kugelkalotte) konform und eineindeutig ab. Es gilt auch das Umgekehrte: Bildet eine analytische Funktion die *Vollkugel* eineindeutig auf sich oder eine *Kugelkalotte* eineindeutig auf eine Kugelkalotte ab, so ist sie eine lineare Funktion. (Die Voraussetzung der umkehrbaren Eindeutigkeit ist wesentlich; z. B. bildet die nichtlineare Funktion $w = z^2$ den Einheitskreis auch auf den Einheitskreis, aber auf den doppelt überdeckten, ab.)

## § 12. Beschränkungen für die Deformation.

Das Schwarzsche Lemma (Schwarz, *Ges. Abh.* **2** S. 109): Ist $w = f(z)$ für $|z| < 1$ regulär, $|f(z)| < 1$ und $f(0) = 0$, so ist $|f(z)| \leqq |z|$. Das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion $w = e^{i\varphi} z$ ($\varphi$ reell). Das heißt geometrisch: Bildet eine Funktion das Innere des Einheitskreises (über den Rand wird nichts vorausgesetzt) auf ein (schlichtes oder nichtschlichtes) Gebiet in dessen Innern so ab, daß der Nullpunkt in sich übergeht so rückt jeder Punkt näher an den Mittelpunkt heran. Die Distanz bleibt nur erhalten, wenn die Abbildung mit einer Drehung identisch ist. (Bew. bei Carathéodory, *Math. Ann.* **72** (1912) S. 107. Bei Schwarz wird noch Regularität für $|z| = 1$ vorausgesetzt.) Vgl. Koebe, *Math. Zeitschr.* **6** (1920) S. 52.

Ausdehnung des Schwarzschen Lemmas auf Halbebenen: Ist $f(z)$ für $\Re z > 0$ regular, $\Re f(z) \geqq 0$ und in der Umgebung des unendlich fernen Punktes

$$\frac{f(z)}{z} = 1 + \varepsilon(z),$$

wo $\varepsilon(z)$ in jedem inneren Winkelgebiet der Halbebene $\Re(z) > 0$ für $|z| \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 strebt, so ist $\Re f(z) \geqq \Re(z)$. (Unter gewissen Einschränkungen von Julia, *Acta Math* **42** (1920) S. 349, allgemein (in etwas anderer Fassung) von R Nevanlinna, *Ann. acad. scient. Fennicae, ser A*, **18**, Nr. 5 (1922) bewiesen; für die hier gegebene Fassung vgl. F. und R. Nevanlinna, *Acta soc. scient. Fenn.* **50**, Nr. 5 (1922) S. 20)

Der Koebesche Verzerrungssatz. Den Kern dieses äußerst wichtigen Satzes stellt das Theorem dar:

Bildet eine Funktion $w = f(z)$ den Kreis $|z| \leqq \varrho$ auf einen schlichten Bereich (d h. $f'(z) \neq 0$ für $z < \varrho$) so ab, daß $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ist (d. h. daß die Richtungen der reellen Achsen in

den Nullpunkten einander entsprechen, Vergrößerungsverhältnis $= 1$), so gibt es eine Kreisscheibe $|w| \leqq k\varrho$, die ganz dem Bildbereich angehört, wobei $k$ eine absolute, von der speziellen Wahl von $f$ unabhängige Konstante ist. (Koebe, *Gött Nachr.* 1907, S. 191 [S. 204]; *Math. Ann.* **67** (1909) S. 145 [S. 215]; *Math. Ann.* **69** (1910) S. 1 [S. 48].) Der genaue, nicht zu verbessernde Wert von $k$ ist $\frac{1}{4}$ (Bieberbach, *Math. Ann.* **77** (1916) S. 153; *Berl. Sitzungsber.* 1916, S. 940).

Der Satz läßt sich auch so aussprechen: Der Radius der größten Kreisperipherie um den Nullpunkt der $w$-Ebene, deren Punkte sämtlich Bildpunkte sind, ist $\geqq k\varrho$. Bei dieser Fassung kann die Voraussetzung der Schlichtheit gestrichen werden (Landau, *Pal. Circ. mat.* **46** (1922) S. 347). Es braucht dann aber keineswegs die ganze Kreisscheibe zum Bildbereich zu gehören (vgl. Bohr, *Jerusalemer Univ. Abh.* **1** (1923))

Der Koebesche Verzerrungssatz: Bei jeder im Kreise $|z| < 1$ regulären Funktion $w = f(z)$, die eine schlichte Abbildung ($f'(z) \neq 0$) vermittelt, gilt für zwei beliebige Punkte $z_1$, $z_2$ in dem kleineren Kreise $|z| \leqq \vartheta < 1$

$$\frac{1}{Q} \leqq \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \leqq Q,$$

wo Q nur von $\vartheta$, nicht von der Funktion abhängt (*Gott Nachr.* 1909, S. 68 [S 73]; *Math. Ann.* **69** (1910) S. 1 [S. 50]; *Math. Zeitschr.* **6** (1920) S. 311) Der Name „Verzerrungssatz" rührt daher, daß $f'(z)$ das lineare Vergrößerungsverhältnis (vgl. S. 737) oder die Verzerrung der Abbildung bedeutet und man daher aus dem Satz Schranken für die Verzerrung von Längen bei der Abbildung herleiten kann

Satz von Carathéodory über die Beschränktheit des imaginären Teils bei Beschränktheit des reellen (*Schwarz-Festschrift*, Berlin 1914, S 19): Ist $w = f(z)$ fur $|z| < 1$ regulär, $f(0) = 0$ und $|\Re f| < \lambda$, so ist fur $|z| \leqq \vartheta < 1$

$$|\Im f| \leqq \frac{2\lambda}{\pi} \lg \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}.$$

(Vgl. auch Koebe, *Math. Zeitschr.* **6** (1920) S 52)

Der Bieberbachsche Drehungssatz (*Math. Zeitschr.* **4** (1919) S 295): Wenn $f'(0) = 1$, $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und das Bildgebiet schlicht ist, so gilt für $|z| \leqq \vartheta < 1$

$$|\arg f'(z)| \leqq 2 \lg \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}.$$

(arg $f'(z)$ gibt den Winkel an, um den eine durch $z$ gehende Richtung bei der Abbildung gedreht wird.)

## § 13. Der Riemannsche Fundamentalsatz der konformen Abbildung.

Jedes einfach zusammenhängende (schlichte) Gebiet mit mehr als einem Randpunkt läßt sich (auf unendlich viele Weisen) konform und eineindeutig auf das Innere eines Kreises abbilden. — Schreibt man vor, daß ein gewisser Punkt des Gebietes und ein Linienelement, d. h. eine Richtung durch ihn, in einen gegebenen Punkt nebst Linienelement in dem Kreise übergehen soll, so ist die Abbildung dadurch eindeutig festgelegt. — Schreibt man vor, welcher Punkt $z_0$ des Gebietes in den Kreismittelpunkt übergehen und welchen Wert das Vergrößerungsverhältnis $|f'(z_0)|$ haben soll, so ist dadurch der Radius des Bildkreises eindeutig bestimmt. — Zwei beliebige einfach zusammenhängende Gebiete mit mehr als einem Randpunkt lassen sich konform aufeinander abbilden. (Riemann, *Dissertation* 1851, *Werke*, 2. Aufl., S 3 [S. 40].)

Riemann reduziert das Abbildungsproblem, das bei ihm in der Form eines Randwertproblemes der Potentialtheorie auftritt, auf ein Variationsproblem (vgl. Rep. $\mathbf{I_2}$ Kap. XIV § 8, S. 675): Die Funktion $u(x, y)$ zu finden, die das Integral

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

erstreckt über den Bereich, zu einem Minimum macht (Dirichletsches Prinzip [nach Riemann, *Werke*, 2. Aufl, S. 97]) Die Existenz dieser Funktion sah er als selbstverständlich an, ein Fehlschluß, der von Weierstraß (*Werke* **2** S. 49) erkannt wurde. C Neumann (*Leipz. Ber* **22** (1870) S. 49, 264; *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*, 2 Aufl., 1884, Kap. 16—18, S. 388—471) und Schwarz (*Ges. Abh.* **2** S 133—171) ersannen dann neue Methoden, vor allem das sogenannte „alternierende Verfahren", um den Beweis, wenn auch nicht für ganz beliebige Gebiete, exakt zu führen. Hilbert (*Math.-Ver.* **8** (1900) S. 184; *Math. Ann.* **59** (1904) S. 161; *Gött. Nachr.* 1909, S. 314) hat den ursprünglichen Riemannschen Beweis durch direkten Nachweis der Existenz der Minimumfunktion streng gemacht. Hieran hat neben vielen anderen insbesondere Courant angeknüpft (*Gött. Nachr.* 1910, S. 154; *Math. Ann.* **71** (1912) S. 145; *Math. Ann.* **72** (1912) S. 517; *J. f. Math.* **144** (1914) S. 190). Neuere, rein funktionentheo-

retische Beweise stammen vor allem von Koebe (*Gött. Nachr.* 1912, S. 844; *J. f. Math.* **145** (1915) S. 177) und Carathéodory (*Math. Ann.* **72** (1912) S. 107; *Schwarz-Festschrift*, Berlin 1914, S. 19). Der Fortschritt der neueren Beweise gegenüber den älteren von Neumann und Schwarz beruht hauptsächlich darauf, daß die Abbildung des *Inneren* des Gebietes von der des Randes ganz losgelöst wird.

Die Zuordnung der Ränder.

Bei der umkehrbar eindeutigen Abbildung des Innern eines einfach zusammenhängenden Bereiches auf das Innere eines Kreises brauchen die Randpunkte nicht umkehrbar eindeutig auf die Peripheriepunkte abgebildet zu werden Über Fälle, in denen dies doch zutrifft, gibt Auskunft

das Schwarzsche Spiegelungsprinzip (*Ges. Abh.* **1** S. 12; **2** S. 66, 149; vgl. auch Carathéodory, *Schwarz-Festschrift*, Berlin 1914, S. 19 [S. 32]):

Bei der konformen Abbildung eines einfach zusammenhängenden Bereichs auf einen schlichten Kreis geht jedes freie geradlinige oder kreisbogenförmige oder allgemein analytische Begrenzungsstück eineindeutig in einen Bogen der Kreisperipherie über. Die Abbildungsfunktion ist über ein solches Begrenzungsstück hinaus fortsetzbar, und zwar gehen Spiegelpunkte an der analytischen Kurve in Spiegelpunkte am Kreise über. Ein Eckpunkt, in dem zwei analytische Kurven zusammenstoßen, geht in einen Kreispunkt über, in dem die entsprechenden Kreisbogen zusammenstoßen. — Besteht der Rand also aus endlich vielen analytischen Kurvenstücken, so geht er eineindeutig in die Kreisperipherie über und die Abbildungsfunktion ist über die einzelnen Randstücke hinaus fortsetzbar.

Dabei gelten folgende Definitionen:

Ein Kurvenbogen $\gamma$ des Randes heißt *frei*, wenn sich um jeden seiner Punkte ein Kreis beschreiben läßt, derart, daß eines der beiden Segmente, in die der Kreis durch $\gamma$ zerlegt wird, ganz im Gebiet liegt.

Ein Kurvenbogen $\gamma$ heißt *analytisch*, wenn sich seine Koordinaten als Potenzreihen eines reellen Parameters $t: x = \mathfrak{P}(t)$, $y = \mathfrak{Q}(t)$, mit einem gemeinsamen Konvergenzgebiet $|t| < \varrho$ darstellen lassen und immer $\mathfrak{P}'(t)^2 + \mathfrak{Q}'(t)^2 \neq 0$ ist, d. h. $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ nicht gleichzeitig verschwinden.

Die Reihen $\mathfrak{P}(t)$ und $\mathfrak{Q}(t)$ konvergieren auch für komplexe $t$ mit $|t| < \varrho$, die Funktion $z = x + iy = \mathfrak{P}(t) + i\mathfrak{Q}(t)$ ist daher für $|t| < \varrho$ analytisch und bildet ein die Kurve $\gamma$ enthaltendes, schlichtes (wegen $\mathfrak{P}' + i\mathfrak{Q}' \neq 0$) Gebiet $\mathfrak{H}$ auf den Kreis $|t| < \varrho$ der komplexen $t$-Ebene so ab, daß $\gamma$ dem reellen Durchmesser entspricht. Unter *Spiegelpunkten* an $\gamma$ verstehen wir zwei zu $\mathfrak{H}$ gehörige Punkte, deren Bilder in dem Kreis zu dem reellen Durchmesser spiegelbildlich liegen. — Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Parameters $t$. — Für den Fall eines Kreisbogens fällt diese Definition mit der früheren durch reziproke Radien (S. 738) zusammen.

Der Fall *nicht-analytischer Begrenzung* wird erledigt durch folgende Sätze:

Satz von Osgood (vermutungsweise ausgesprochen in *Enzykl.* **II**$_2$, Heft 1, S. 56): Ist die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Bereichs eine Jordankurve (S. 690), so geht sie bei Abbildung des Bereichs auf das Innere eines schlichten Kreises eineindeutig in die Kreisperipherie über. — Notwendig und hinreichend dafür, daß die Berandungen zweier einfach zusammenhängender Bereiche Punkt für Punkt ineinander übergehen, ist also, daß sie Jordankurven sind. (Beweise von Study, *Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie*, Heft 2: *Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche*, Leipzig 1913; Carathéodory, *Math. Ann.* **73** (1913) S. 305; *Gött. Nachr.* 1913, S. 509; Lindelöf, *C R.* **158** (1914) S 245; Courant, *Gött. Nachr.* 1914, S. 101; *J. f Math* **144** (1914) S. 190; Koebe, *Gött. Nachr.* 1913, S 286; *J. f Math.* **145** (1915) S. 177)

Satz von Carathéodory: Bei der Abbildung eines beliebig begrenzten, einfach zusammenhängenden schlichten Gebietes auf das Innere eines Kreises entsprechen die Primenden des Randes eineindeutig den Peripheriepunkten des Kreises. (*Math Ann.* **73** (1913) S. 323.)

Unter einem *Primende* versteht man die Menge derjenigen Randpunkte, die allen ineinandergeschachtelten Teilgebieten angehören, welche durch eine Folge von einander nicht schneidenden, gegen einen Randpunkt konvergierenden Querschnitten (das sind offene Jordankurven, deren Endpunkte auf dem Rande liegen, während sie sonst ganz im Innern des Gebietes verlaufen) abgeschnitten werden. (In Fig. 5 besteht das Gebiet aus einem Quadrat, aus dem unendlich viele Strecken, die sich gegen die

Seite *AB* häufen, herausgenommen sind; die gestrichelt gezeichneten Querschnitte ziehen sich auf den Punkt *A* zusammen und schneiden eine Folge von ineinandergeschachtelten Teilgebieten ab, die sämtlich das Primende *AB* auf dem Rand enthalten.)

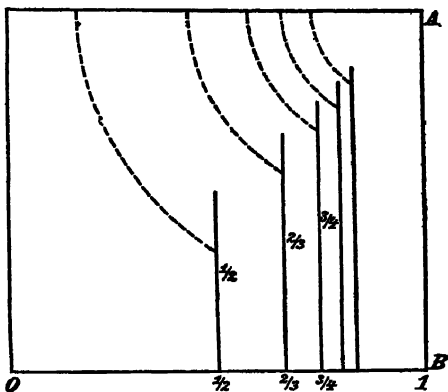
Abb. 5.

### Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete.

Zwei mehrfach zusammenhängende, schlichte Gebiete können im allgemeinen nicht aufeinander konform abgebildet werden (Schottky, *J. f. Math.* **83** (1877) S. 300); schon aus topologischen Gründen ist klar, daß die Gebiete dieselbe Zusammenhangszahl haben müssen. Aber dies ist nicht hinreichend; z. B läßt sich jedes zweifach zusammenhängende Gebiet stets auf einen konzentrischen Kreisring (der auch ausgeartet sein kann, indem sich der innere Kreis auf den Mittelpunkt oder der äußere auf den Punkt $\infty$ reduziert oder beides) abbilden, dessen Radienverhältnis (der „Modul" des Gebietes) jedoch eindeutig durch das Gebiet bestimmt ist (Schottky, a. a O. S 324; Koebe, *J. f. Math.* **145** (1915) S 177 [S 195]).

Um über die Abbildung allgemeine Sätze aufstellen zu können, legen wir „*Normalgebiete*" zugrunde:

Unter einem „*Schlitzgebiet*" verstehen wir die ganze Ebene, aus der (endlich oder unendlich viele) parallele Strecken, die sich auch auf Punkte reduzieren können, herausgenommen sind

Abbildungssatz: Ein schlichtes, beliebig (auch unendlich) vielfach zusammenhängendes Gebiet läßt sich umkehrbar eindeutig und konform auf ein gewisses Schlitzgebiet abbilden. (Da im allgemeinen der Punkt $\infty$ ein innerer Punkt des Schlitzgebietes ist, so hat die Abbildungsfunktion in einem, übrigens beliebig vorzuschreibenden Punkt einen Pol erster Ordnung.) Die Primenden des Gebietes entsprechen eineindeutig den Randpunkten des Schlitzgebietes. (Beweis bei Courant, *Math. Ann.* **71** (1912) S. 145; **72** (1912) S. 517; *J. f. Math.* **144** (1914)

S. 190; *Gött. Nachr.* 1914, S. 101; Koebe, *Acta Math.* **40** (1916) S. 251; **41** (1918) S. 305.)

### Verallgemeinerung auf nichtschlichte Gebiete.

Der Abbildungssatz bleibt auch bestehen, wenn das Gebiet nicht schlicht ist, sondern auf einer Riemannschen Fläche mit endlich oder unendlich vielen Blättern liegt, und zwar sind die allgemeinsten Gebiete, die man hoffen kann, auf schlichte abzubilden, die schlichtartigen.

Ein Gebiet heißt *schlichtartig* (nach Koebe), wenn es durch jedes in ihm verlaufende geschlossene Polygon in zwei Teile zerlegt wird; oder, was dasselbe ist, wenn es sich durch stetige Deformation in ein schlichtes Gebiet überführen läßt. (Nicht schlichtartig sind z. B. die zu den algebraischen Funktionen vom Geschlecht $\geqq 1$ gehörigen Flächen, s. Kap. XVII, § 2.)

Daß die Möglichkeit der stetigen Abbildung die der konformen Abbildung nach sich zieht, wird gewährleistet durch das allgemeine Uniformisierungsprinzip: Jedes schlichtartige Gebiet (das unendlich vielfach zusammenhängend und unendlich vielblättrig sein kann) läßt sich eineindeutig und konform auf ein schlichtes Gebiet abbilden, d. h. jede im Sinne einer stetigen Deformation mögliche Abbildung auf ein schlichtes Gebiet läßt sich auch konform realisieren. Windungspunkte endlicher Ordnung gelten hierbei als innere, solche unendlicher Ordnung als Randpunkte. (Koebe, *Atti del IV congresso internazionale dei matematici*, Roma 1908. Vol. 2 (1909) S 25; *Gött Nachr.* 1908, S. 337; 1909, S. 324 [hier weitere Aussagen über die Begrenzung jenes schlichten Bildgebietes]; ausführlich *J. f Math.* **138** (1910) S. 192; vgl. ferner die S. 745 genannten Arbeiten von Courant.)

Der Name dieses Satzes wird durch das folgende erklärt.

## § 14. Uniformisierung

Nach S. 737 läßt sich eine hinreichend kleine Umgebung jedes einzelnen Punktes einer zu einem analytischen Gebilde $w = f(z)$ gehörigen Riemannschen Fläche durch eine Parameterdarstellung $z = z(t)$, $w = w(t)$ eineindeutig auf ein schlichtes Gebiet einer $t$-Ebene abbilden. Diese Darstellung ist von Punkt zu Punkt eine andere. Die Uniformisierungstheorie, begründet von Klein (*Math. Ann.* **19—21** (1882/83)) und Poincaré (*Acta math* **1, 3—5** (1882/84)), stellt sich die Aufgabe, eine für

*alle* Punkte des analytischen Gebildes gültige, eineindeutige Darstellung vermittels eines in der schlichten $t$-Ebene variierenden Parameters, der uniformisierenden Variablen herzustellen. Der vollständige Beweis für die Möglichkeit der Uniformisierung ist 1907 von Koebe (*Gött Nachr.* 1907, S. 191 und 633) und Poincaré (*Acta Math.* **31** (1908) S. 1) vermittels der Idee der Überlagerungsfläche geliefert worden. (Vgl. vor allem die weiteren Arbeiten von Koebe: *Math.-Ver.* **21** (1912) S. 157; *Math. Ann.* **67** (1909) S. 145; **69** (1910) S. 1; **72** (1912) S. 437; **75** (1914) S. 42; *J. f. Math.* **138** (1910) S 192; **139** (1911) S. 251; **147** (1917) S. 67.)

Eine Fläche $\overline{\mathfrak{F}}$ heißt eine (unverzweigte) *Überlagerungsfläche* über einer Grundfläche $\mathfrak{F}$, wenn jedem Punkte $\overline{P}$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$ ein einziger Punkt $P$ auf $\mathfrak{F}$ als „Projektionspunkt“ und einer gewissen Umgebung von $\overline{P}$ umkehrbar eindeutig und stetig ein Gebiet auf $\mathfrak{F}$ zugeordnet ist.

Zu einer beliebigen Riemannschen Fläche wird nun eine Überlagerungsfläche konstruiert, auf der alle relativ zur Grundfläche unverzweigten, d. h. wenn auch nicht im Ganzen, so doch in der Umgebung jeder Stelle eindeutigen Funktionen wiederum im Ganzen eindeutig sind und die (im Gegensatz zur Grundfläche) *einfach zusammenhängend* ist. (Für die scharfe Fassung dieses Begriffs vgl. Weyl, *Idee der Riemannschen Fläche*, S. 47, wo an die Überlagerungsfläche angeknüpft wird. Man kann auch eine Fläche als einfach zusammenhangend definieren, wenn sie eineindeutig und stetig auf eine volle oder eine punktierte Kugel abgebildet werden kann. Vgl. auch Riemann, *Werke* 2. Aufl S. 9.) Nach dem

Koebe-Poincaréschen Grenzkreistheorem: „Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche läßt sich entweder auf die ganze Ebene (Vollkugel) oder die punktierte Ebene (punktierte Kugel) oder auf das Innere eines Kreises (Kugelkalotte) eineindeutig und konform abbilden“

kann man die Überlagerungsfläche auf ein schlichtes Gebiet abbilden, wodurch die ursprüngliche Fläche in ein Teilgebiet übergeht und die Uniformisierung geleistet ist (Grenzkreisuniformisierung).

Allgemein wird das Problem immer gelöst sein, wenn es gelingt, zur Grundfläche eine schlichtartige, nicht notwendig einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche zu konstruieren. Denn

eine solche kann man nach dem Koebeschen allgemeinen Uniformisierungsprinzip immer auf einen schlichten Bereich abbilden.

Das Uniformisierungsproblem steht in engem Zusammenhang mit der Theorie der *automorphen Funktionen*, das sind Funktionen, die gegenüber einer Gruppe von linearen Transformationen invariant bleiben. Siehe Rep. $I_2$, Kap. XIX, insbesondere § 25.

## V. Abschnitt.

## Spezielle Funktionsklassen (ganze und meromorphe Funktionen und Verallgemeinerungen).

### § 15. Die ganzen Funktionen.

#### Die Weierstraßsche Produktdarstellung.

Eine ganze rationale Funktion läßt sich vermöge ihrer Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (mehrfache auch mehrfach aufgeschrieben) in der Form darstellen: $f(z) = A(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_n)$ und umgekehrt: Gibt man endlich viele beliebige Punkte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vor, so kann man vermöge dieser Darstellung alle ganzen rationalen Funktionen angeben, die diese Punkte zu Nullstellen haben. Eine ähnliche Produktdarstellung gilt auch für die ganzen, nichtrationalen Funktionen (S. 714), und auch hier kann man die Nullstellen im Rahmen des Möglichen, nämlich unter der Einschränkung, daß sie im Endlichen keine Häufungsstelle haben, was bei ganzen Funktionen nicht vorkommen kann (vgl. S. 716), beliebig vorschreiben.

Satz von Weierstraß (1876, *Werke* 2 S. 77; vgl. auch Pringsheim, *Münch. Ber.* 1915, S. 387): Ist eine abzählbare, den Nullpunkt nicht enthaltende Menge von Punkten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ gegeben, die nach wachsenden Absolutbeträgen geordnet sind (je endlich viele $\alpha$ oder $|\alpha|$ können zusammenfallen) und die, wenn sie wirklich in unendlicher Anzahl vorhanden sind, sich nur bei $z = \infty$ häufen, also

$$0 < |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots, \quad \alpha_n \to \infty \quad \text{für } n \to \infty,$$

so kann man (auf unendlich viele Weisen) eine Folge von ganzen Zahlen $\lambda_n \geqq 1$ so bestimmen, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{\alpha_n} \right|^{\lambda_n}$$

für jeden endlichen Wert von $z$ konvergiert (z. B. $\lambda_n = n$ genügt stets); und die Gesamtheit aller ganzen Funktionen, die im Nullpunkt eine Nullstelle der Ordnung $m$ haben und sonst nur noch in den $\alpha_n$ von erster Ordnung verschwinden ($\mu$-faches Vorkommen desselben Punktes $\alpha$ unter den $\alpha_n$ bedeutet einen Nullpunkt $\mu$ter Ordnung in $\alpha$), wird durch den Ausdruck dargestellt:

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n - 1}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)^{\lambda_n - 1}},$$

wo $g(z)$ eine beliebige ganze Funktion und der Exponentialfaktor unter $\Pi$ im Falle $\lambda_n = 1$ einfach 1 bedeutet. (Zur Theorie der unendlichen Produkte vgl. Rep. $\mathrm{I}_1$, Kap. VI § 5.)

Weierstraß wurde auf dieses Theorem gelenkt durch Betrachtung der *Eulerschen Gammafunktion* (vgl. S. 696). $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ist eine ganze Funktion mit den einfachen Nullstellen $0, -1, -2, \ldots$ und läßt sich nach Gauß (*Werke* **3** S. 146, vgl. auch Weierstraß, *Werke* **1** S. 194) durch das Produkt:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{z-1}(n+z)}{(n+1)^z} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z \lg \frac{n+1}{n}}$$

oder

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{A z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

darstellen, wo $A = \lim_{N=\infty} \left( \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \lg N \right)$ die Eulersche Konstante ist. Weierstraß erkannte hieran die Rolle der *konvergenzerzeugenden* Exponentialfaktoren, die das für die Darstellung einer Funktion mit den Nullstellen $-1, -2, \ldots$ naheliegende, aber divergierende Produkt $\prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)$ zum Konvergieren bringen, ohne die Nullstellen zu verschieben

Die ganze Funktion $\sin \pi z$ hat alle ganzzahligen Argumente zu Nullstellen. Ihre Produktdarstellung ergibt sich vermöge ihres Zusammenhangs mit der $\Gamma$-Funktion:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)}.$$

### Die Laguerre-Hadamardsche Theorie der ganzen Funktionen.

An die Weierstraßsche Produktdarstellung knüpft die von Laguerre 1883 inaugurierte (vgl. *Œuvres* **1** S. 167 f.) und dann nach einem Vorstoß von Poincaré (*Bull. Soc. M.* **11** (1883) S. 136) vor allem von Hadamard (*J. de Math.* (4) **9** (1893) S. 171) geförderte Theorie der ganzen Funktionen an, die im wesentlichen darauf ausgeht, auch andere Eigenschaften der ganzen rationalen Funktionen (Polynome) auf die ganzen Funktionen zu verallgemeinern. Für die historische Entwicklung und den Stand der Theorie vgl. Bieberbach, *Enzykl.* **II**$_3$, Heft 4; Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, in zweiter Auflage 1921 mit einem Bericht über die modernsten Untersuchungen von G. Valiron; ferner Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions*, Toulouse 1923.

Geschlecht: Liegt eine bestimmte ganze Funktion $f(z)$ vor, so kann es vorkommen, daß man in der Weierstraßschen Produktdarstellung die $\lambda_n$ konstant wählen darf Dann gibt es einen „Grenzexponenten" $\varrho \geqq 0$ (Pringsheim, *Münch. Ber.* **33** (1903) S. 101; im Französischen ordre réel) derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{|\alpha_n|^{\varrho+\varepsilon}}$ konvergiert, dagegen $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{|\alpha_n|^{\varrho-\varepsilon}}$ divergiert; $\varrho$ selbst kann ein Konvergenz- oder ein Divergenzexponent sein. Es sei $k$ die kleinste ganze Zahl $\geqq 0$, für die $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{|\alpha_n|^{k+1}}$ konvergiert, d. h.

wenn $\varrho$ nicht ganzzahlig: $k =$ linksbenachbarte ganze Zahl zu $\varrho$;

wenn $\varrho$ ganzzahlig: $\begin{cases} k = \varrho - 1, & \text{wenn } \varrho \text{ ein Konvergenzexponent,} \\ k = \varrho, & \text{wenn } \varrho \text{ ein Divergenzexponent} \end{cases}$

(Pringsheim, a. a. O. nennt $k$ den *Rang* der Funktion.) Dann kann man in dem Weierstraßschen Produkt alle $\lambda_n - 1 = k$ wählen. Hierdurch ist die ganze Funktion $g(z)$ eindeutig bestimmt. Ist sie speziell eine rationale Funktion vom Grade $q$, so heißt die größere der beiden Zahlen $k$ und $q$ (wir bezeichnen sie mit $p$) das *Geschlecht* (französisch genre, Laguerre *C. R.* **94** (1882) S. 160 = *Œuvres* **1** S. 167; nach Pringsheim, a. a. O., Höhe) von $f(z)$. In allen anderen Fällen, wo also entweder $k$ oder $q$ oder beide nicht existieren, sagt man, $f(z)$ habe unendliches Geschlecht (s. hierfür Blumenthal, *Principes de la théorie*

*des fonctions entières d'ordre infini,* Paris 1910). — Nach seiner Definition hängt das Geschlecht zum Teil von der Verteilung der Nullstellen ab.

Die ganzen Funktionen vom Geschlecht 0 sind den ganzen rationalen Funktionen am nächsten verwandt, sie haben die Form $f(z) = Cz^m \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)$.

Reduziert sich bei einer Funktion von endlichem Geschlecht $g(z)$ auf eine Konstante, so heißt die Funktion *primitiv* oder *kanonisch.*

Ordnung: Gibt es eine Zahl $\mu \geqq 0$, derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ von einem gewissen $|z| = r$ an

$$|f(z)| < e^{r^{\mu+\varepsilon}},$$

dagegen immer wieder für gewisse $z$

$$|f(z)| > e^{r^{\mu-\varepsilon}}$$

ist, so heißt $\mu$ die *Ordnung* (Pringsheim a. a. O.; französisch ordre apparent) von $f(z)$ Gibt es keine endliche Zahl $\mu$ dieser Eigenschaft, so heißt $f(z)$ von unendlicher Ordnung. — Ist z. B. $g(z)$ ein Polynom vom genauen Grade $q$, so hat $e^{g(z)}$ die Ordnung $q$ und umgekehrt. — Es ist

$$\mu = \limsup_{r=\infty} \frac{\lg \lg M(r)}{\lg r},$$

wo $M(r)$ das Maximum von $|f(z)|$ für $|z| = r$ bedeutet — Wenn $\frac{\lg \lg M(r)}{\lg r}$ einen Grenzwert hat, so heißt $f$ von *regelmäßigem Wachstum*

Die Ordnung hängt vom Wachstum der Funktion, verglichen mit Exponentialfunktionen, ab. Sie verallgemeinert den Begriff des Grades bei ganzen rationalen Funktionen, die sich für große $z$ wie die hochste in ihnen vorkommende Potenz verhalten.

Nullstellen und Geschlecht der Ableitung: Hat ein Polynom nur reelle Nullstellen, so gilt dasselbe für seine Ableitung. Für ganze Funktionen ist dies nicht allgemein richtig, wie das Beispiel der Funktion $(z+1)e^{z^2}$ (vom Geschlechte 2) zeigt, die eine reelle Nullstelle besitzt, während die Ableitung

$(2z^2 + 2z + 1)e^{z^2}$ zwei komplexe Nullstellen hat. Es gelten jedoch folgende

Sätze von Laguerre (*C. R.* **94** (1882) S. 160, 635; **98** (1884) S. 79 = *Œuvres* **1** S. 167, 171, 178. Beweise mit Ausfüllung der bei Laguerre vorhandenen Lücken s. Borel, *Leçons sur les fonctions entières,* 2ᵉ édition, Paris 1921, S. 30): Hat eine ganze Funktion $f(z)$ vom Geschlecht null oder eins lauter reelle Nullstellen, so gilt dasselbe für die Ableitung. Zwischen je zwei Nullstellen von $f(z)$ liegt nur eine Nullstelle von $f'(z)$ [nach dem Rolleschen Satz mindestens eine; in mehrfachen Nullstellen von $f(z)$ verschwindet auch $f'(z)$], und $f'$ hat dasselbe Geschlecht wie $f$. — Hat eine Funktion $f(z)$ vom Geschlecht $p$ nur eine endliche Anzahl $s$ von komplexen Nullstellen, so ist $f'$ auch vom Geschlechte $p$ und hat außer den durch den Rolleschen Satz und die Vielfachheit der Wurzeln von $f$ bedingten reellen Nullstellen höchstens $p + s$ weitere (reelle oder komplexe) Nullstellen

Beziehung zwischen der Ordnung und den Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung: Poincaré (*Bull. Soc. M.* **11** (1883) S. 136) hat als erster eine Abschätzung des Kleinerwerdens der Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ durch das Geschlecht $p$ gefunden. Unter Benutzung der Ordnung $\mu$ gilt das präzise Resultat: Die obere Grenze der reellen $\alpha$, für die von einer Stelle an

$$|a_n| \leqq \frac{1}{(n!)^\alpha}$$

gilt, ist gleich $\frac{1}{\mu}\cdot$ (Hadamard, *J. de Math.* (4) **9** (1893) S. 171; Pringsheim, *Münch. Ber.* **32** (1902) S. 163, 295; E. Lindelöf, *Acta soc scient. Fenn.* **31** (1903) Nr 1, S 1.)

Beziehung zwischen der Ordnung $\mu$, dem Grenzexponenten $\varrho$ und dem Geschlecht $p$: Poincaré hat auch hier die ersten Schritte getan (a. a. O ), indem er eine Beziehung zwischen dem Anwachsen der Funktion und dem Geschlecht angab. Die Einführung von Ordnung und Grenzexponent gestattet, folgende Sätze auszusprechen:

Im allgemeinen ist $\varrho \leqq \mu$ (Hadamard, *J. de Math* (4) **9** (1893) S. 171). Für primitive Funktionen ist $\varrho = \mu$ (Borel, *Acta Math.* **20** (1897) S. 357; vgl. auch *Leçons sur les fonctions entières*, 2. Aufl., S. 61 u. 76 Anm.). Die Sätze über das Verhältnis von Geschlecht und Ordnung basieren auf dem

Satz von Hadamard (a. a. O.) über die Abschätzung primitiver Funktionen nach *unten*: Hat eine primitive Funktion $f(z)$ die Ordnung (= Grenzexponent) $\varrho$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Kreise mit unbegrenzt wachsendem Radius $r$, auf denen durchweg

$$|f(z)| > e^{-r^{\varrho+\varepsilon}} \quad \text{gilt.}$$

Hauptsatz: Eine Funktion von endlichem Geschlecht hat auch endliche Ordnung und umgekehrt; genauer: $p = [\mu]$ oder $p = \mu - 1$; letzteres gilt nur, wenn $\mu$ ganz, $q < \mu$ (Bedeutung von $q$ S. 750) und $\mu$ ein Konvergenzexponent ist.

Beziehung zwischen dem Maximalbetrag der Funktion auf einem Kreis und dem Potenzreihenglied von größtem absolutem Betrag. Es sei

$$M(r) = \operatorname*{Max}_{|z|=r} |f(z)|, \quad m(r) = \operatorname*{Max}_{n=1,2\ldots} |a_n| r^n.$$

Für Funktionen endlicher Ordnung $\varrho$ ist

$$1 < \frac{M(r)}{m(r)} < r^{\varrho+\varepsilon}$$

für $\varepsilon > 0$ und alle hinreichend großen $r$, daher ist

$$\frac{\lg M(r)}{\lg m(r)} \to 1 \quad \text{für} \quad r \to \infty$$

(Valiron, *Thèse*, Toulouse 1914). Ferner ist für jedes $\varrho_1 > \varrho$

$$M(r) < \varrho_1 \sqrt{2\pi}\, m(r) [\lg m(r)]^{\frac{1}{2}},$$

wenn $r$ eine gewisse Folge von gegen $\infty$ wachsenden $r$ durchläuft. Für Funktionen beliebiger Ordnung gilt

$$M(r) < m(r) [\lg m(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

für $\varepsilon > 0$ und eine gewisse Folge von unbegrenzt wachsenden $r$ (Wiman, *Acta Math.* **37** (1914) S. 305)

Verhalten bei geradliniger Annäherung an $z = \infty$. Für $r \to \infty$ strebt $M(r)$ gegen $\infty$ und bei jeder ganzen Funktion gibt es ins Unendliche laufende Wege, auf denen $f(z)$ gegen $\infty$ strebt (Iversen, *Thèse*, Helsingfors 1914; Valiron, *C. R.* **166** (1918), S. 382). Nichtsdestoweniger kann $f(z)$ auf einzelnen Strahlen, die etwa vom Nullpunkt ausgehen, gegen beliebige

Werte streben oder überhaupt nicht konvergieren. So strebt die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ auf allen Strahlen $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ gegen 0, auf den Strahlen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ hat sie keinen Grenzwert, dagegen ist dort dauernd $|f(z)| = 1$, und auf den Strahlen $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ strebt $f(z)$ gegen $\infty$. Die Mittag-Lefflerschen Funktionen $E_\alpha(z)$ (s. S. 763) zeigen ein ganz analoges Verhalten, nur ändert sich die Größe der Winkelräume. Es gibt auch, wie Malmquist (*Acta* **29** (1905) S. 203) zuerst zeigte, Funktionen, die auf allen Strahlen mit Ausnahme eines einzigen gegen 0 streben, und wie Mittag-Leffler (*C. R.* **138** (1904) S. 941; *Verhandl. d. dritten Intern. Math. Kongr. in Heidelberg* 1904, Leipzig 1905, S. 258) bewies, solche, die auf allen Strahlen gegen 0 gehen, natürlich nicht gleichmäßig. Dies kann jedoch nur für Funktionen von unendlichem Geschlecht vorkommen. Denn aus dem Satz von Phragmén und Lindelöf (S. 770) folgt, daß eine Funktion von endlichem Geschlecht nicht auf jedem Strahl beschränkt sein, also noch weniger gegen einen endlichen Wert konvergieren kann und daß Funktionen von der Ordnung $< \frac{1}{2}$ auf keinem Strahl beschränkt sind. Bei letzteren gibt es sogar eine unendliche Schar von Kreisen um $z = 0$ mit unbegrenzt wachsendem Radius derart, daß das Minimum von $|f(z)|$ auf ihnen gegen $\infty$ strebt, genauer: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Kreise, auf denen *durchweg*

$$|f(z)| > e^{r^{\mu - \varepsilon}} \quad \text{ist.}$$

(Wiman, *Arkiv för mat.* **1** (1903/04) S. 105; **2** (1905/06) Nr. 14; vgl. auch Lindelöf, *Pal. Circ. mat.* **25** (1908) S. 228.)

Eine Funktion der Ordnung $\mu < \frac{1}{2}$ hat das Geschlecht $p = 0$, ist also eine primitive Funktion (daher $\mu = \varrho$). Folglich stellt der Satz von Wiman eine Verschärfung des Hadamardschen Satzes (S. 753) für Funktionen mit $\varrho < \frac{1}{2}$ dar.

## § 16. Meromorphe Funktionen.

Die meromorphen Funktionen, die in der ganzen Ebene (mit eventueller Ausnahme von $z = \infty$) bis auf Pole regulär sind[1]),

1) Ein Häufungspunkt von Polen kann selbst kein Pol sein. Die Pole können also im Endlichen keinen Häufungspunkt besitzen. Sind es unendlich viele, so häufen sie sich nur im Punkte $z = \infty$, der also eine (nichtisolierte) singuläre Stelle ist, und sind daher abzählbar.

stellen die nächstliegende Verallgemeinerung der gebrochen rationalen Funktionen dar, die sie als Spezialfall (endlich viele Pole in der ganzen Ebene einschließlich $\infty$) enthalten. Wie jede rationale Funktion als Quotient zweier ganzer rationaler (S. 723), so ist auch jede meromorphe Funktion $f(z)$ als Quotient zweier ganzer Funktionen $\frac{g_1(z)}{g_2(z)}$ darstellbar. (Weierstraß, *Werke* **2** S. 121.) $g_1$ muß nur in den Nullstellen, $g_2$ in den Polen von $f(z)$ verschwinden. Die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen wird übertragen durch den

Satz von Mittag-Leffler (*Öfversigt af Kongl Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm* **33** Nr. 6 (1876) S. 3): Ist eine abzählbare Punktmenge $\beta_1, \beta_2, \ldots$, die sich nicht im Endlichen häuft, und zu jedem $\beta_n$ eine rationale Funktion

$$r_n\left(\frac{1}{z-\beta_n}\right) = \frac{B_{\nu_n}^{(n)}}{(z-\beta_n)^{\nu_n}} + \cdots + \frac{B_2^{(n)}}{(z-\beta_n)^2} + \frac{B_1^{(n)}}{z-\beta_n}$$

gegeben, so gibt es meromorphe Funktionen, die in $\beta_n$ einen Pol mit dem Hauptteil $r_n\left(\frac{1}{z-\beta_n}\right)$ besitzen und sich sonst im Endlichen analytisch verhalten; ihre Gesamtheit wird dargestellt durch

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[r_n\left(\frac{1}{z-\beta_n}\right) - g_n(z)\right],$$

wo $g(z)$ eine ganze Funktion und die $g_n$ geeignet gewählte ganze rationale Funktionen $g_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}z + \cdots + a_{\nu_n}^{(n)}z^{\nu_n}$, sind. Die Reihe konvergiert in jedem endlichen Gebiet gleichmäßig, wenn man die auf die darin liegenden Pole bezüglichen endlich vielen Glieder wegläßt. (Die $g_n(z)$ spielen hier eine ähnliche, konvergenzerzeugende Rolle wie die Exponentialfaktoren im Weierstraßschen Satze.) Vgl Weierstraß, *Werke* **2** S. 189.

## § 17. Allgemeinere Singularitätenverteilung.

Mittag-Leffler hat seinen Satz (§ 16) sukzessive auf immer allgemeinere Funktionsklassen ausgedehnt Unter seinen Ergebnissen sei das folgende hervorgehoben, bei dem Polhaufungspunkte im Endlichen zugelassen sind, die ihrerseits nicht isoliert zu liegen brauchen, sondern sich zu Linien zusammenschließen können (Mittag-Leffler, *Acta Math.* **4** (1881) S. 4):

Ist eine Punktmenge $\mathfrak{M}$, die mit der Menge $\mathfrak{H}$ ihrer Häufungspunkte (ihrer Ableitung) keinen Punkt gemein hat (eine sog. isolierte Menge) und daher abzählbar ist: $\beta_1, \beta_2, \ldots$, und zu jedem $\beta_\mu$ eine rationale Funktion $r_n\left(\frac{1}{z-\beta_n}\right)$ gegeben, so gibt es Funktionen, die in jedem nicht zu $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{H}$ gehörigen Punkte analytisch sind und in den $\beta_\mu$ Pole mit den Hauptteilen $r_n\left(\frac{1}{z-\beta_n}\right)$ besitzen, z. B.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[r_n\left(\frac{1}{z-\beta_n}\right)-g_n(z)\right],$$

wo die $g_n(z)$ geeignet gewählte ganze rationale Funktionen sind. Wird die Ebene durch die Menge $\mathfrak{H}$ zerstückt, so stellt die Summe in den verschiedenen Teilen im allgemeinen verschiedene Funktionen dar, die nicht ineinander fortgesetzt werden können.

Eine ähnliche Verallgemeinerung gilt auch für die Weierstraßsche Produktdarstellung (§ 15) der ganzen Funktionen (Mittag-Leffler a. a. O.): Ist eine isolierte Menge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ mit der Ableitung $\mathfrak{H}$ gegeben, so gibt es durch unendliche Produkte darstellbare Funktionen, die in jedem nicht zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Punkte analytisch sind und in den $\alpha_n$, sonst aber nirgends, verschwinden.

Auf Grund dieses Satzes gelingt es leicht (Osgood, *Lehrbuch* **1**, S. 551), den von Weierstraß (1880, *Werke* **2** S. 223) ohne Beweis ausgesprochenen Satz zu beweisen:

Ist ein *beliebiger Bereich* gegeben, so gibt es eindeutige analytische Funktionen, die ihn zum *Existenzbereich* haben, d. h nicht über ihn hinaus fortgesetzt werden können; mit anderen Worten: Jeder beliebige Bereich ist Existenzbereich von eindeutigen analytischen Funktionen

Zum erstenmal bewiesen wurde dieser Satz von Runge (*Acta Math.* **6** (1885) S. 229) In der gleichen Arbeit hat Runge ihn und die andern Sätze dieses Paragraphen in abschließender Weise ergänzt. In § 15 und 16 gelang es, die *Gesamtheit* aller Funktionen mit den vorgeschriebenen Bedingungen explizit anzugeben; jede einzelne vorgegebene Funktion konnte dadurch in Produkt- bzw. Reihenform angeschrieben werden. Die bisherigen Sätze von § 3 jedoch geben nur *Beispiele* von Funktionen mit den vorgeschriebenen Bedingungen an; ob und wie sich eine vorgegebene Funktion, von der man weiß, daß sie die

Bedingung erfüllt, darstellen läßt, blieb ungewiß. Es gilt nun der

Satz von Runge: Eine in einem beliebigen Gebiet $\mathfrak{G}$ bis auf Pole reguläre Funktion $f(z)$ läßt sich in eine *Reihe von rationalen Funktionen* entwickeln, die in jedem abgeschlossenen, keine Pole enthaltenden Teilbereich gleichmäßig konvergiert. Die Pole der rationalen Funktionen liegen in den Polen von $f$, bzw. außerhalb $\mathfrak{G}$. — Das Gebiet kann sich auch ins Unendliche erstrecken.

Insbesondere läßt sich also eine in einem Bereich *reguläre* Funktion in eine in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig konvergente Reihe von rationalen Funktionen entwickeln.

Mit Hilfe des Satzes S. 723 über die Approximation von rationalen Funktionen durch Polynome folgt hieraus:

Eine in einem einfach zusammenhängenden, im Endlichen gelegenen Bereich reguläre Funktion läßt sich in eine in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig konvergente *Reihe von Polynomen* entwickeln. (Man kann auch zulassen, daß der Bereich sich ins Unendliche erstreckt, s z. B. Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes,* Paris 1917, S. 34.) Vgl. auch Hilbert, *Gött. Nachr.* 1897, S. 63 und die Verallgemeinerungen von Painlevé, *C. R.* **126** (1898) S 200 u. 318. Mit Hilfe der konformen Abbildung hat Faber die Entwicklung der in einem Bereich regulären Funktionen nach Polynomen, die nur von dem Bereich abhängen, angegeben (*Math. Ann.* **57** (1903) S. 389; **64** (1907) S. 318; *Math.-Ver* **16** (1907) S. 103; *J. f. Math.* **150** (1920) S. 79). Vgl. die ausführliche Darstellung der polynomischen Entwicklungen in Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe,* Paris 1910, insbesondere Chap II, III.

## VI. Abschnitt.

## Analytische Darstellung und Fortsetzung von Funktionen in Sterngebieten.

### § 18. Ableitung aus dem Cauchyschen Integralsatz.

Auf jedem von einem Punkte $a$ ausgehenden Halbstrahl werde nach einem bestimmten Gesetz ein Punkt $p \neq a$ gewählt ($p$ kann auch $\infty$ sein). Das durch die Gesamtheit der Segmente $ap$ erfüllte Gebiet heißt ein *Stern* mit dem Mittelpunkt $a$, ein Punkt $p$ eine Sternecke (Mittag-Leffler). Ist $a$ ein Regularitätspunkt einer Funktion $f(z)$ und wählt man als $p$ jeweils

den ersten nichtregulären Punkt, den man von $a$ ausgehend auf dem betreffenden Halbstrahl antrifft, so erhält man den sog. *Hauptstern* der Funktion mit dem Mittelpunkt $a$ (auch Holomorphiestern genannt). Begrenzt man den Halbstrahl jeweils durch den ersten Punkt, der weder regulär noch ein Pol ist, so erhält man den „*Meromorphiestern*". Konvergiert ein analytischer Ausdruck im Innern eines Sternes, während er im Äußern divergiert, so spricht man vom *Konvergenzstern*. Noch andere Sternarten erhält man unter Zugrundelegung einer „*erzeugenden Figur*" $\mathfrak{B}$; darunter verstehen wir ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das den Nullpunkt im Innern oder auf dem Rande und den Punkt 1 auf dem Rande enthält. Mit $z\mathfrak{B}$ bezeichnen wir das Gebiet, das aus $\mathfrak{B}$ durch Multiplikation jedes seiner Punkte mit $z$ hervorgeht ($z\mathfrak{B}$ ist einfach das vom Nullpunkte aus im Verhältnis $|z|$ gestreckte Gebiet $\mathfrak{B}$, das außerdem noch um den Winkel $\arg z$ geschwenkt wird, so daß der frühere Punkt 1 in $z$ übergeht). Wir erzeugen nun einen Stern um eine Regularitätspunkt $a$, indem wir auf jedem Halbstrahl bis zu dem ersten Punkte $z = p$ gehen, der die Eigenschaft hat, daß $f(z)$ in $p\mathfrak{B}$ und auf dem Rande nicht mehr regulär ist. Wählt man als erzeugende Figur z. B. den Einheitskreis, so erhält man als Stern den *Konvergenzkreis* des zu $a$ gehörigen Funktionselementes $\sum\limits_0^\infty a_n(z-a)^n$ (nämlich den Kreis durch den zu $a$ nächstgelegenen nichtregulären Punkt). Diese künstlich aussehende Art, den Konvergenzkreis zu definieren, ist gleichwohl im Wesen der Sache begründet. Denn die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ um den Punkt $a$ kann aus dem Cauchyschen Integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}\,d\zeta$$

(S. 702) dadurch abgeleitet werden, daß man

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{1-y}$$

in eine Reihe nach Potenzen von $y = \frac{z-a}{\zeta-a}$ entwickelt und gliedweise integriert:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_0^\infty \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n = \sum_0^\infty (z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta$$

$$= \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_0^\infty a_n(z-a)^n \quad \text{(vgl. S. 713).}$$

Die Reihe konvergiert jedoch nur für $|y| < 1$ (gleichmäßig, so daß sie gliedweise integriert werden kann, für $|y| \leqq \vartheta < 1$, aber $\vartheta$ kann beliebig nahe an 1 liegen), $\frac{z-a}{\zeta-a}$ muß also im Einheitskreis liegen, den wir jetzt mit $\mathfrak{W}$ bezeichnen wollen. Da nun die Kurve $\mathfrak{C}$, auf der $\zeta$ läuft, beliebig nahe am Rand des Hauptsterns von $f(z)$ liegen darf, so ist also jedes $z$ zulässig, bei dem für jeden Randpunkt $\zeta$ des Hauptsterns $\frac{z-a}{\zeta-a}$ in $\mathfrak{W}$, also $z-a$ in allen $(\zeta-a)\mathfrak{W}$ liegt. Der Durchschnitt (S. 687) aller dieser Gebiete ist aber der Kreis durch den zu $a$ nächsten nicht regulären Punkt, und dieses Gebiet läßt sich nun auch unabhängig vom Hauptstern direkt als Stern mit dem Einheitskreis als erzeugender Figur definieren, wie es S. 758 geschah. Unser Gedankengang legt eine sehr weittragende *Verallgemeinerung* nahe (zuerst bei Mittag-Leffler, *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar, Stockholm* **39** Nr. 2 (1882) S. 11, dann abermals erkannt und ausgenutzt bei Borel, *Ann. éc. norm.* (3) **16** (1899) S. 132; Phragmén, *C. R.* **128** (1899) S. 1434, vgl. auch Mittag-Leffler, *Acta Math* **29** (1905) S. 101 [S. 117]): Hat man irgendeine Darstellung für $\frac{1}{1-y}$, die in einer Figur $\mathfrak{W}$, die naturgemäß $y = 1$ auf dem Rande enthält, gilt, so erhält man durch Verwendung dieses Ausdrucks für $\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$ eine Darstellung für $f(z)$, die gültig ist, sobald $z-a$ allen $(\zeta-a)\mathfrak{W}$ angehört, unter $\zeta$ die Grenzpunkte des Hauptsterns von $f(z)$ mit dem Mittelpunkt $a$ verstanden.

Je nach der Wahl der Darstellung fur $\frac{1}{1-y}$ und der dadurch bedingten Gestalt von $\mathfrak{W}$ erhält man die mannigfachsten analytischen Ausdrücke für $f(z)$ mit mehr oder weniger einfachen Gültigkeitsbereichen. Diese Ausdrücke stellen *analytische Fortsetzungen* des ursprünglichen Funktionselementes $\sum_0^\infty a_n(z-a)^n$

mit dem Mittelpunkt $a$ dar, und wir wollen weiterhin die Forderung aufstellen, daß sich diese Ausdrücke aus den Koeffizienten $a_n$ dieses als gegeben anzusehenden Ausgangselementes explizit berechnen lassen, wodurch sie sich von den Darstellungen wie S. 757 wesentlich unterscheiden werden. Man kann sie auch dahin interpretieren, daß sie den Summenwert der Reihe $\sum\limits_0^\infty a_n(z-a)^n$ in Punkten, wo dieselbe divergiert, angeben, und sie stehen daher in enger Beziehung zu der *Summabilitätstheorie* divergenter Reihen. (Vgl. hierfür *Rep.* $\mathrm{I}_1$, S. 430 und Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen,* Berlin 1922.) In der Folge nehmen wir ohne Schaden der Allgemeinheit $a = 0$.

## § 19. Darstellung durch Reihen von Polynomen.

Diese Darstellungsform rührt von Mittag-Leffler her, der sie (mit anderen Methoden als hier angegeben), ebenso wie die weiter unten folgenden Darstellungsarten in Noten unter dem gemeinsamen Titel *„Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène“* in den *Acta Math.* entwickelt hat: I **23** (1900) S. 43; II **24** (1901) S. 183; III **24** (1901) S. 205; IV **26** (1902) S. 353; V **29** (1905) S. 101; VI **42** (1919) S. 285; s. auch *Münch. Ber.* 1915, S. 109

Es sei $\mathfrak{W}$ die ganze Ebene mit Ausnahme des Stückes der reellen Achse zwischen 1 und $+\infty$ und $\frac{1}{1-y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(y)$ eine Darstellung für $\frac{1}{1-y}$ durch eine Reihe von Polynomen

$$p_n(y) = \sum_{\nu=0}^{m_n} \gamma_\nu^{(n)} y^\nu,$$

die in $\mathfrak{W}$ konvergiert, in jedem endlichen abgeschlossenen Teilgebiet gleichmäßig. (Nach S 757 gibt es derartige Darstellungen.) Da hier der Durchschnitt aller $\zeta\mathfrak{W}$, unter $\zeta$ die Randpunkte des Hauptsterns verstanden, der Hauptstern selber ist, so gilt für jedes $z$ im Hauptstern bei passender Wahl von $\mathfrak{C}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} p_n\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{m_n} \gamma_\nu^{(n)} z^\nu \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{m_n} \gamma_\nu^{(n)} a_\nu z^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z).$$

Damit ist $f(z)$ im ganzen Hauptstern durch eine Reihe von Polynomen dargestellt, von denen jedes einzelne sich aus endlich vielen der $a_\nu$ mit Hilfe von universellen, d. h. von $f$ unabhängigen und daher im voraus angebbaren Konstanten $\gamma_\nu^{(n)}$ berechnen läßt (Note I, S. 49.)

Ebensolche Darstellungen lassen sich für gewisse *„Nebensterne“* angeben, die sich dem Hauptstern unbegrenzt nähern (Note II, III, IV). — Der wesentliche Unterschied ist der, daß die Nebensterne *wirkliche Konvergenzsterne* für die zu ihnen gehörigen Ausdrücke sind, während dies beim Hauptstern nicht notwendig der Fall ist (Note II, S 186). Vielmehr gibt es bei jeder zu einem Hauptstern gehörigen Darstellungsart durch Reihen von Polynomen (Borel, *Leçons sur les séries divergentes,* Paris 1901, S. 172), allgemeiner durch Reihen von ganzen Funktionen (Phragmén, in der Abhandlung von Mittag-Leffler, *Münch. Ber* 1915, S. 109 [S. 154]) stets Funktionen, bei denen die Reihe auch außerhalb des Hauptsterns konvergiert

## § 20. Darstellung durch Integrale.

### Die Borelsche Darstellung.

Verwendet man den Ausdruck:

$$\frac{1}{1-y} = \int\limits_0^\infty e^{-(1-y)t} dt,$$

so besteht $\mathfrak{W}$ aus der Halbebene $\Re y < 1$ (für $\Re y \leqq \vartheta < 1$ konvergiert das Integral gleichmäßig), und das Cauchysche In-

tegral geht durch Vertauschung der Integrationsfolgen über in ein *„Laplacesches Integral“*

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} F(z \cdot t)\, dt,$$

wo $F$ die zu $f$ „assoziierte Funktion“ $F(u) = \sum_0^\infty a_n \frac{u^n}{n!}$ bedeutet, die eine ganze Funktion ist (Borel, *Ann. éc. norm.* (3) **16** (1899) S. 9). Die Darstellung konvergiert und ist gültig in dem sog. *„Borelschen Summabilitätspolygon“* (Borel, *C R.* **123** (1896) S. 548). Dieses erhält man, indem man durch Errichten der Lote in den Ecken $p$ des Hauptsterns auf den Strahlen $Op$ die Halbebenen $p\mathfrak{W}$, die $O$ enthalten, bildet und ihren Durchschnitt nimmt. Dieses Polygon (das natürlich kein geradliniges zu sein braucht) enthält den Konvergenzkreis. Es kann auch unabhängig vom Hauptstern als Stern erzeugt werden, indem man auf jedem Strahl durch $O$ die obere Grenze $q$ derjenigen Punkte $z$ bestimmt, für die $f(z)$ in dem Kreise über $Oz$ als Durchmesser regulär ist, d. h. indem man als erzeugende Figur $\mathfrak{W}$ im Sinne von S. 758 den Kreis über $O1$ als Durchmesser wählt.

Fig. 6 Borelsches Summabilitätspolygon

Daß das Borelsche Summabilitätspolygon wirklich ein „Konvergenzstern“ ist, d h daß *im Außern* das Laplacesche Integral *divergiert*, wurde von Phragmén (*C R* **132** (1901) S 1396) bewiesen. Auf dem Rande selbst kann Konvergenz oder Divergenz vorkommen; durch eine Verknüpfung der Borelschen Methode mit den Cesàroschen arithmetischen Mittelbildungen (vgl. *Rep.* $\mathbf{I}_1$, S 430) gelingt es jedoch stets, in allen regulären Punkten auf einer geraden Polygonseite konvergente Darstellungen zu erhalten, wenn

der auf dieser Seite liegende singuläre Punkt ein Pol ist (Doetsch, *Math. Ann.* **84** (1921) S. 245).

Der Borelsche Ausdruck läßt sich auch folgendermaßen umformen:

$$f(z) = \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} s_n(z) \frac{\omega^{n+1}}{(n+1)!},$$

wo $s_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ist. Von diesem Ausdruck (mit einer kleinen Modifikation) ist übrigens Borel ursprünglich ausgegangen (Borel, *J. de Math.* (5) **2** (1896) S. 103; vgl. auch Mittag-Leffler, Note IV).

Die Verallgemeinerung von Mittag-Leffler.

Sie beruht auf der Verwendung der *Mittag-Lefflerschen Funktionen*

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (\alpha > 0).$$

Diese sind ganze transzendente Funktionen und stellen eine Verallgemeinerung der Exponentialfunktion dar, die für $\alpha = 1$ darunter enthalten ist. In den für die gegenwärtigen Zwecke besonders wichtigen Fällen $0 < \alpha < 2$ zeigen sie folgendes Verhalten (Note V S. 119, 132):

$$E_\alpha(x) \to 0 \quad \text{für } |x| \to \infty$$

$$\text{im Winkelraum } \alpha\frac{\pi}{2} < \arg x < 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2},$$

$$|E_\alpha(x)| \to \frac{1}{\alpha} \quad \text{für } |x| \to \infty$$

$$\text{auf den Strahlen } \arg x = \pm\alpha\frac{\pi}{2},$$

$$|E_\alpha(x)| \to \infty, \qquad E_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} \to 0 \text{ für } |x| \to \infty$$

$$\text{im Winkelraum } |\arg x| < \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Für $\alpha = 2$ ist $E_\alpha(x) = \cos\sqrt{-x}$, für $\alpha > 2$ strebt $E_\alpha(x)$ auf jedem Strahl gegen $\infty$, außer auf der negativen reellen Achse.

Es gilt nun, unter $t^{\frac{1}{\alpha}}$ den Hauptzweig verstanden,

$$\frac{1}{1-y} = \int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(yt)\, dt^{\frac{1}{\alpha}}$$

in einem Gebiet $\mathfrak{W}_\alpha$, das folgendermaßen definiert werden kann: Man betrachte den Kreis über dem Segment $0 \leqq u \leqq 1$ der $u$-Ebene als Durchmesser und bilde ihn durch den Hauptzweig der Funktion $v = u^\alpha$ auf die Kurve $\mathfrak{B}_\alpha$ der $v$-Ebene ab. Spiegelt

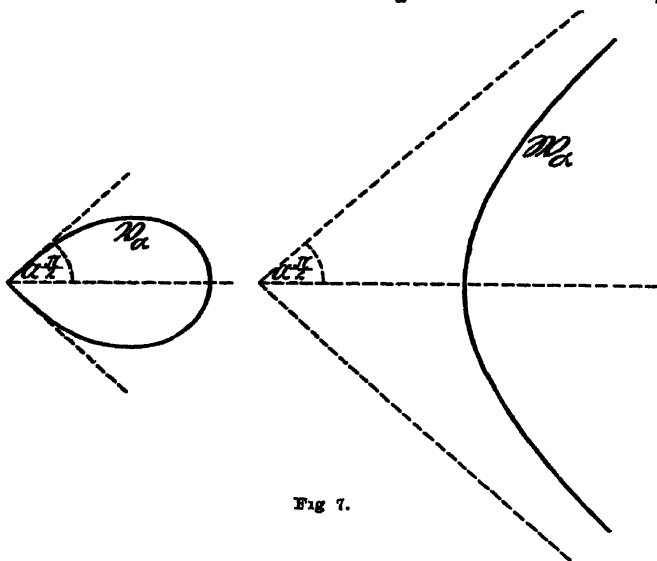



Fig. 7.

man nun $\mathfrak{B}_\alpha$ am Einheitskreis und nimmt von den beiden durch das Spiegelbild begrenzten Gebieten dasjenige, das den Nullpunkt enthält, so hat man $\mathfrak{W}_\alpha$ (Fig. 7). Aus dem Cauchyschen Integral leitet man daher unter Vertauschung der Integrationsgrenzen die Darstellung durch das *„verallgemeinerte Laplacesche Integral“*

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(zt)\, dt^{\frac{1}{\alpha}}$$

ab, wo

$$F_\alpha(u) = \sum_0^\infty a_n \frac{u^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$$

ist. Sie gilt in dem Nebenstern $\mathfrak{B}_\alpha$, der gleich dem Durchschnitt aller $\zeta\mathfrak{W}_\alpha$ ist, wo $\zeta$ die Grenzpunkte des Hauptsterns durchläuft, und der der wirkliche Konvergenzstern des Ausdrucks ist. Man kann $\mathfrak{B}_\alpha$ auch ohne Bezugnahme auf den Hauptstern definieren, indem man als erzeugende Figur das Innere von $\mathfrak{B}_\alpha$ zugrunde legt und auf jedem Strahl durch $O$ die obere Grenze derjenigen $z$ feststellt, für die $f$ in $z\mathfrak{B}_\alpha$ regulär ist (Mittag-Leffler, Note V).

Für $\alpha = 1$ stimmt diese Darstellung mit der Borelschen überein, und zwar ist hier $\mathfrak{B}_\alpha$ der Kreis über dem Segment $0 \leqq v \leqq 1$ als Durchmesser und $\mathfrak{W}_\alpha$ die Halbebene $\Re y < 1$. Für $\alpha \to 0$ schmiegt sich $\mathfrak{B}_\alpha$ der Strecke $0 \leqq v \leqq 1$, der Nebenstern also dem Hauptstern beliebig nahe an; macht man daher in dem verallgemeinerten Laplaceschen Integral den Grenzübergang $\alpha \to 0$, so erhält man eine Darstellung im ganzen Hauptstern Für $\alpha \to \infty$ nähert sich $\mathfrak{B}_\alpha$ dem Einheitskreis, $\mathfrak{B}_\alpha$ daher dem Konvergenzkreis. Übrigens nähert sich hierbei das Gebiet $\mathfrak{W}_\alpha$ ebenfalls dem Einheitskreis, und man versteht so, warum bei der Definition des Konvergenzkreises sowohl als selbständigen Sternes als auch vermittels des Hauptsterns dieselbe Figur, nämlich der Einheitskreis, zu benutzen war

M. Riesz (*Acta Math.* **35** (1912) S. 253) ist in dem noch allgemeineren Fall, daß das gegebene Funktionselement eine Dirichletsche Reihe (S. 718) ist, ohne Benutzung der Eigenschaften der $E_\alpha$-Funktionen einen direkteren Weg gegangen, der dem von Mittag-Leffler in Note IV eingeschlagenen ähnlich ist.

Statt durch ein Integral kann man $f(z)$ in $\mathfrak{B}_\alpha$ auch als Grenzwert einer Summe darstellen (Note V S. 174):

$$f(z) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{n=0}^{\infty} s_n(z) \frac{\omega^{n+1}}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)}.$$

Die angegebene Methode läßt sich noch weiter verallgemeinern, und unter Verwendung einer Funktion, wie sie z. B. Malmquist (vgl. S. 754) angegeben hat, die auf allen Strahlen bis auf einen gegen 0 strebt, kann man ähnliche Ausdrücke erhalten, die im ganzen Hauptstern konvergieren (Note V S. 175).

Als formal besonders einfach sei noch folgende, im ganzen Hauptstern gültige Darstellung erwähnt:

$$f(z) = \lim_{\alpha=0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$$

(Mittag-Leffler, *Atti del IV congresso intern. dei mat. Roma 1908,* vol. I (1909) S. 67).

In seiner VI. Note hat Mittag-Leffler, wie schon früher H. v. Koch, eine Darstellung von $f(z)$ im Meromorphiestern gegeben (Literaturangaben daselbst) und ferner in noch allgemeineren Bereichen.

## VII. Abschnitt.

## Verhalten in der Umgebung singulärer Stellen.

### § 21. Der Wertevorrat in der Umgebung. (Picardsche Sätze und Verallgemeinerungen.)

In einer hinreichend kleinen Umgebung eines *Poles* $z = p$ ist $|w| = |f(z)|$ beliebig groß, d. h. die Umgebung von $z = p$ auf der $z$-Kugel wird auf die (ein- oder mehrfach überdeckte) Umgebung von $w = \infty$ auf der $w$-Kugel abgebildet. Ordnet man also dem Punkte $z = p$ den Punkt $w = \infty$ zu, so verhält sich die Funktion in einem Pol nicht anders als in einem regulären Punkt. Ganz anders ist das Verhalten in der Umgebung von *wesentlichen Singularitäten.*

Weierstraßscher Satz: In jeder Umgebung eines isolierten, wesentlich singulären Punktes kommt eine Funktion jedem komplexen Wert beliebig nahe (s. S. 721).

Wie es um die Werte bestellt ist, die nicht wirklich angenommen werden, entscheidet der Satz von Picard, der in zwei Etappen bewiesen wurde.

Der kleine Picardsche Satz: Eine ganze Funktion ($\neq$ const.) nimmt jeden Wert mit Ausnahme höchstens eines einzigen an. (*C. R.* **88** (1879) S. 1024; der Beweis stutzt sich auf die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, einen elementareren Beweis (ohne diese höheren Hilfsmittel) gab Borel, *C. R.* **122** (1896) S. 1045; *Acta Math.* **20** (1896—97) S. 357 [S. 382]; vgl. auch den neueren Beweis von R. Nevanlinna, *Acta soc. scient. Fenn.* **50**, Nr. 6 (1924) S. 7.)

Der große Picardsche Satz: In jeder Umgebung einer isolierten, wesentlich singulären Stelle nimmt eine Funktion jeden Wert mit Ausnahme höchstens eines einzigen an. (*C. R.* **89** (1879) S. 745; elementarer Beweis von Schottky (s. u.), kürzer von Lindelöf, *Compte rendu du congrès des math tenu à Stockholm 1909,* Leipzig und Berlin 1910, S 112.)

Erweitert man den Begriff der isolierten, wesentlich singulären Stelle dahin, daß die Funktion in der Umgebung nur bis auf Pole eindeutig und regulär zu sein braucht (so daß sie also Häufungspunkt von Polen sein kann), was (vgl. o.) darauf hinauskommt, daß man dem Wert $\infty$ keine Ausnahmestellung gibt, so modifiziert sich der Satz dahin, daß alle Werte bis auf höchstens zwei endliche angenommen werden. — In der Umgebung einer isolierten, wesentlich singulären Stelle im alten Sinne wird ein Wert, nämlich $\infty$, bestimmt ausgelassen. Da höchstens noch ein endlicher Wert ausgelassen werden kann, so liegen auch hier höchstens zwei Ausnahmewerte vor.

Sätze über Funktionen mit Ausnahmewerten.

Der Landausche Satz (Verallgemeinerung des kleinen Picardschen Satzes): Ist $f(z)$ in der Umgebung von $z = a$ regulär, $f(a) \neq 0$ und $\neq 1$, $f'(a) \neq 0$, so gibt es um $a$ einen Kreis mit einem nur von $f(a)$ und $f'(a)$ abhängenden Radius $R$ (der also für alle Funktionen mit demselben $f(a)$ und $f'(a)$ der gleiche ist), so daß in jedem größeren Kreise entweder eine Null- oder Einsstelle oder aber ein singulärer Punkt der Funktion liegt. (Landau, *Berl. Sitzungsber.* 1904, S. 1118; R. Nevanlinna, *Gött. Nachr.* 1924, S 151). An die Stelle der Werte 0 und 1 kann jedes andere Paar von verschiedenen Werten $w_1$ und $w_2$ treten. $R$ hängt dann auch noch von $w_1$ und $w_2$ ab. Analog in den folgenden Sätzen — Über den Wert von $R$ vgl. Carathéodory, *C. R.* **141** (1905) S. 1213; Landau, *Zürch. Vierteljahrsschr.* **51** (1906) S 252.

Der Carathéodorysche Satz (Verallgemeinerung des großen Picardschen Satzes): Zu allen für $0 < |z| < 1$ regulären, eindeutigen und von 0 und 1 verschiedenen Funktionen gibt es eine positive numerische Konstante $\alpha < 1$ derart, daß für $0 < |z| < \alpha$ dauernd wenigstens eine der beiden Ungleichungen $|f(z)| < 2$ und $|f(z)| > \frac{1}{2}$ gilt (Carathéodory, *C. R.* **154** (1912) S. 1690).

Der Schottkysche Satz: Ist $f(z)$ für $|z| < R$ regulär und von 0 und 1 verschieden, so ist für $|z| \leqq \vartheta R$ $(0 < \vartheta < 1)$

$$|f(z)| < \Omega,$$

wo $\Omega$ eine nur von $f(0)$ und $\vartheta$ abhängige Konstante ist. (Schottky, *Berl. Sitzungsber.* 1904, S. 1244.) Hieraus folgt der

große Picardsche Satz (Schottky, ebenda). — Neuere Beweise von Ostrowski, *Berl. Sitzungsber.* 1925, S. 471, u. Valiron, *C. R.* **183** (1926) S. 728. — Weitere wichtige *Verallgemeinerungen* der Picardschen Sätze s. Picard, *Acta Math.* **11** (1887) S. 1 und vor allem Carathéodory, *Berl. Sitzungsber.* 1920, S. 202.

Über die *Werteverteilung* in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle s. Borel, *Acta Math.* **20** (1896—97) S. 357; Valiron, *Ann. éc. norm.* (3) **37** (1920) S. 219; **38** (1921) S. 389; **39** (1922) S. 317; Julia, *Ann. éc. norm.* (3) **36** (1919) S. 93; (3) **37** (1920) S. 165 und *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé,* Paris 1924; hieran anschließend Ostrowski, *Math. Zeitschr.* **24** (1925) S. 215. In den letzteren Arbeiten tritt der Zusammenhang dieser Probleme mit dem Montelschen Begriff der normalen Funktionenfolge (S. 710) hervor. Ferner F. u. R. Nevanlinna, *Acta soc. scient. Fenn.* **50** Nr. 5 (1922); R. Nevanlinna, *Ann. acad. scient. Fenn.* **23** (1924); *Acta soc scient. Fenn.* **50** Nr. 6 (1924); *Acta Math.* **46** (1925) S. 1; *Skand. Math. Kongr.*, Kopenhagen 1925, S. 77.

## § 22. Verhalten bei Annäherung an einen singulären Punkt längs Kurven.

Hierher gehören zunächst die Eigenschaften der ganzen Funktionen auf Strahlen, die ins Unendliche laufen (s. S 753)

Läßt man im allgemeinen Fall $z$ auf einem beliebigen Weg (Jordankurve) in einen isolierten, wesentlich singulären Punkt hineinwandern, so beschreibt $w = f(z)$ eine stetige Kurve, die ein mannigfaltiges Verhalten zeigen kann: $w$ kann dabei gegen einen (endlichen oder unendlichen) Grenzwert streben, oder die Kurve ist geschlossen und wird immer wieder durchlaufen, oder sie erfüllt die ganze $w$-Ebene oder einen Teil davon überall dicht. Es gibt stets Wege, auf denen das letztere Verhalten vorliegt (Julia, *Ann éc. norm.* (3) **36** (1919) S. 93 [S. 109]) Tritt aber der zuerst genannte Fall ein, so heißt der Grenzwert ein *asymptotischer* oder *Konvergenzwert,* der Weg ein *Bestimmtheitsweg.* Die Konvergenzwerte einer ganzen oder meromorphen Funktion fallen zusammen mit den nicht-algebraischen singulären Punkten der inversen Funktion (so sind 0 und $\infty$ Konvergenzwerte für $w = e^z$ und transzendente Verzweigungspunkte fur $z = \log w$, vgl S. 732). Hat die Funktion *Ausnahmewerte* im Sinne des Picardschen Satzes (S. 766), so sind diese sicher Konvergenzwerte, wie dies mit den Werten 0 und $\infty$ bei $f(z) = e^z$

der Fall ist (Hurwitz, *C. R.* **143** (1906) S. 877; **144** (1907) S. 63; Denjoy, *C. R.* **145** (1907) S. 106; Iversen, *Thèse*, Helsingfors 1914).

Ist eine Funktion in einem Kreise $|z| < R$ regulär und *beschränkt*, d. h. $|f(z)| < M$ für $|z| < R$, so hat sie bei radialer Annäherung gegen den Rand fast überall (d. h. in allen Randpunkten mit Ausnahme einer Nullmenge) einen Grenzwert. Dasselbe gilt, wenn als Weg ein Jordanscher Kurvenbogen zugelassen wird, der zwischen zwei in dem Randpunkt endigenden Sehnen verläuft (Fatou, *Acta Math.* **30** (1906) S. 335; einfacherer Beweis Carathéodory, *Math. Ann.* **73** (1913) S. 305). Verallgemeinerungen von F. und M. Riesz, *Skand. Math. Kongr.*, Stockholm 1916, S. 27, und F. und R. Nevanlinna, *Acta soc. scient. Fenn.* **50**, Nr. 5 (1922) [S. 26]. Siehe auch Lusin und Priwaloff, *C. R.* **178** (1924) S. 456.

Für weitere Untersuchungen vgl. vor allem Groß, *Monatsh. f. Math.* **29** (1918) S. 3; *Math. Zeitschr.* **2** (1918) S. 242; *Math. Ann.* **78** (1918) S. 332.

## § 23. Verhalten bei Annäherung innerhalb von Winkelgebieten.

Zunächst sei wieder an die ganzen Funktionen angeknüpft und als Gebiet, das den singulären Punkt $\infty$ auf dem Rande enthält, der Winkel zwischen zwei, von einem endlichen Punkt nach $\infty$ laufenden Strahlen gewählt.

Satz von Phragmén (*Acta Math* **28** (1904) S. 351): Eine ganze Funktion $f(z)$ erfülle die Bedingungen: 1. Im Innern eines Winkelgebietes von der Öffnung $\alpha$ sei $|f(z)| < C_1 e^{r^k}$, wo $k > 0$ und $k\alpha < \pi$ ist; 2. in den übrigen Punkten sei $|f(z)| < C_2$ ($f$ ist also höchstens von der Ordnung $k$) Dann ist $f(z)$ eine Konstante. — Eine ganze Funktion ($\neq$ const) der Ordnung $\varrho$ kann also höchstens im Innern und auf dem Rande eines Winkelraumes der Öffnung $2\pi - \frac{\pi}{\varrho}$ beschränkt sein Die Mittag-Lefflerschen Funktionen $E_\alpha(z)$ (S. 763) erreichen diese Grenze gerade.

Im allgemeinen Fall bei beliebigen Funktionen denken wir uns den fraglichen singulären Punkt auch ins Unendliche verschoben. Die folgenden Sätze erschließen aus der Annahme, daß die Funktion bei Annäherung an den singulären Punkt vom Innern eines Winkelgebiets her nicht allzu stark wächst und

auf dem Rande beschränkt bleibt, daß sie überhaupt in jenem Sektor der Umgebung des singulären Punktes beschränkt ist.

Satz von Phragmén und Lindelöf (*Acta Math.* **31** (1908) S. 381): Ist eine Funktion im Innern und auf dem Rande eines Winkelgebietes von der Öffnung $\alpha$ regulär und auf dem Rande beschränkt: $|f(z)| \leqq C_1$, während im Innern $|f(z)| < C_2 e^{r^k}$, wo $k\alpha < \pi$, ist, so ist auch im Innern $|f(z)| \leqq C_1$.

Allgemeiner:

Ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$, das sich ins Unendliche erstreckt, möge in einem Winkelraum der Öffnung $\alpha$ Platz haben. Eine im Innern von $\mathfrak{G}$ analytische Funktion erfülle die Bedingungen: 1. Ist $\zeta$ ein beliebiger Randpunkt $\neq \infty$ von $\mathfrak{G}$, so gilt bei beliebig klein gewähltem $\delta > 0$ für alle Punkte $z$ von $\mathfrak{G}$, die hinreichend nahe an $\zeta$ liegen, $|f(z)| < C + \delta$, wo $C$ eine von $\zeta$ unabhängige Konstante ist. 2. Das Produkt $e^{-\varepsilon r^{\frac{\pi}{\alpha}}} f(z)$ strebt, wie klein $\varepsilon > 0$ auch angenommen wird, gleichmäßig gegen 0 mit wachsendem $r$. Dann ist $|f(z)| \leqq C$ im Innern von $\mathfrak{G}$ (a. a. O., S. 387).

Ist von $f(z)$ bekannt, daß es die Voraussetzung 1. erfüllt, so können nur zwei Fälle vorkommen: a) Entweder ist $|f(z)| \leqq C$ im Innern von $\mathfrak{G}$. b) Oder bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ gilt von einem $r = r_0$ an $M(r) > e^{r^{\frac{\pi}{\alpha} - \varepsilon}}$, wo $M(r)$ das Maximum von $f(z)$ auf dem in $\mathfrak{G}$ gelegenen Teile des Kreises $|z| = r$ ist (a. a. O., S. 389).

Weitgehende Vertiefungen dieser Sätze siehe vor allem bei R. und F. Nevanlinna, *Acta soc. scient. Fenn.* **50**, Nr 5 (1922); R. Nevanlinna, *Acta soc. scient. Fenn.* **50**, Nr. 12 (1925).

## VIII. Abschnitt.
## Verhalten von Potenzreihen an der Konvergenzgrenze.

### § 24. Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Konvergenz bzw. Summabilität.

#### Stetigkeit als Folge von Konvergenz bzw. Summabilität.

Nähert sich der Punkt $z$, vom Innern des Konvergenzkreises einer Potenzreihe $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$ herkommend, auf einem Wege $\mathfrak{C}$

einem Randpunkt $z_0$, so kann die dargestellte Funktion $f(z)$ einem Grenzwert $A$ zustreben (z. B immer, wenn $f(z)$ in $z_0$ regulär ist), so daß die Funktion $f(z)$, lediglich auf $\mathfrak{C}$ betrachtet, in $z_0$ stetig wird, wenn man $f(z_0) = A$ setzt Der *Abelsche Stetigkeitssatz* (S. 712) sagt aus, daß der Grenzwert sicher existiert und gleich $A$ ist, wenn $\sum_0^\infty a_n z_0^n$ zur Summe $A$ konvergiert und wenn $\mathfrak{C}$ der Radius $0 z_0$ ist.

Um hieran anknüpfende Verallgemeinerungen kurz aussprechen zu können, benutzen wir folgende Bezeichnungen (nach Hardy und Littlewood, *Lond. M. S. Proc.* (2) **18** (1920) S. 205):

Die Kurve $\mathfrak{C}$ heißt ein *Weg*, wenn sie eine den Konvergenzkreis nicht verlassende, in $z_0$ endende Jordankurve ist; ein *innerer* Weg, wenn sie außer $z_0$ keinen Punkt mit dem Konvergenzkreis gemein hat; ein *Stolzscher Weg*, wenn sie zwischen zwei in $z_0$ endenden Sehnen verläuft; ein *regularer* Weg, wenn sie in allen Punkten außer $z_0$ eine stetig wandernde Tangente hat und sich dem Punkt $z_0$ in bestimmter Richtung nähert, so daß $\arg(z - z_0)$ für $z \to z_0$ einem bestimmten Grenzwert zustrebt — Ferner sei von jetzt an immer vorausgesetzt, daß der Konvergenzkreis der Einheitskreis, der Punkt $z_0$ der Punkt 1 sei. Es gilt dann:

$f(z)$ hat auch dann einen Grenzwert für $z \to 1$, wenn $\sum_0^\infty a_n$ konvergiert und $\mathfrak{C}$ ein Stolzscher Weg ist (S 713), aber nicht immer, wenn $\mathfrak{C}$ ein regulärer Weg ist (Hardy und Littlewood, a. a. O., S. 207, *theorem C*).

Der Abelsche Satz läßt eine wichtige Verallgemeinerung in anderer Richtung zu: Der Grenzwert auf dem Radius existiert auch dann, wenn $\sum_0^\infty a_n$ nicht konvergiert, sondern bloß von irgendeiner positiven Ordnung Cesàro(-Hölder)-summabel (s *Rep.* $\mathrm{I}_1$, S. 430) ist (zuerst im Falle der Summabilität 1. Ordnung von Frobenius, *J. f. Math.* **89** (1880) S. 262, sodann für beliebige ganzzahlige Ordnung von Hölder, *Math. Ann.* **20** (1882) S 535 bewiesen; auf Summabilität beliebiger positiver (auch nicht ganzzahliger) Ordnung ausgedehnt von Chapman, *Lond. M S. Proc.* (2) **9** (1911) S. 369). Unter derselben

Voraussetzung existiert der Grenzwert auch auf jedem Stolzschen Weg.

### Konvergenz bzw. Summabilität als Folge der Stetigkeit bzw. einer Verallgemeinerung derselben.

Der Abelsche Stetigkeitssatz ist *nicht allgemein umkehrbar*[1]) (Beispiel: $\sum_0^\infty (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ strebt für $x \to 1$ gegen $\frac{1}{2}$, die Reihe konvergiert aber in $x = 1$ nicht), sondern nur unter zusätzlichen Voraussetzungen über die $a_n$. Das erste Resultat von Tauber (*Monatsh f. Math.* 8 (1897) S. 273) ist insbesondere von Hardy und Littlewood vertieft worden Die wichtigsten Ergebnisse sind:

Hat $\sum_0^\infty a_n z^n$ für radiale Annäherung gegen 1 einen Grenzwert und ist $n\Re a_n > c_1$, $n\Im a_n > c_2$ ($c_1$ und $c_2$ beliebige Konstanten), also wenn $a_n$ reell: $n a_n > c$, so konvergiert $\sum_0^\infty a_n$ (Hardy und Littlewood, *Lond. M. S. Proc.* (2) **13** (1914) S. 174; s. auch die Wiedergabe bei Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie,* Berlin 1916, S. 46).

Existiert der Grenzwert von $\sum_0^\infty a_n z^n$ auf einem regulären oder einem Stolzschen Weg und ist $|n a_n| < c$, so ist $\sum a_n$ konvergent (Hardy und Littlewood, *Lond M. S. Proc.* (2) **18** (1920) S. 205, *theorems R, S.*).

Hat die Funktion

$$\Phi(z) = \frac{1}{1-z} \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} (1 - z^{n+1}),$$

---

1) Man kann, wie das schon Euler getan hat, gerade diese Möglichkeit dazu benutzen, um einer divergierenden Reihe einen Summenwert beizulegen, indem man $\sum a_n$ durch $\lim\limits_{z \to 1} \sum a_n z^n$ definiert, falls dieser Grenzwert existiert. (Abelsche oder Poissonsche Summabilität, manchmal auch Eulersche Summabilität genannt Doch verstehen manche Autoren unter letzterer etwas anderes )

wenn $z$ auf einem gewissen Weg $\mathfrak{C}$ gegen 1 strebt, einen Grenzwert $A$ und ist $|n a_n| < c$, so konvergiert $\sum_0^\infty a_n$ zur Summe $A$ (ebenda, *theorem Q*; ist z. B. $\mathfrak{C}$ ein rektifizierbarer Stolzscher Weg und konvergiert $\sum \frac{a_n}{n+1}$, so ist $\Phi(z) = \frac{1}{1-z}\int_z^1 f(\zeta)\,d\zeta$).

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $\sum_0^\infty a_n$ von einer gewissen Ordnung Cesàro-summabel ist, sind:

1. $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ ist im Einheitskreis regulär;

2. für $|z| < 1$ ist $|f(z)| < K_1(1-|z|)^{-K_2}$, wo $K_1, K_2$ Konstanten sind;

3. wird

$$f_0(z) = f(z),\ f_1(z) = \frac{1}{1-z}\int_z^1 f_0(\zeta)\,d\zeta,\ f_2(z) = \frac{1}{1-z}\int_z^1 f_1(\zeta)\,d\zeta,\ \ldots$$

gesetzt, so gibt es eine ganze Zahl $k \geqq 0$ so, daß $f_k(z)$ gegen einen endlichen Wert strebt, wenn $z$ auf einem beliebigen Weg vom Innern des Einheitskreises her gegen 1 strebt.

Die Integrale, deren Existenz unter der Annahme der Summabilität von $\sum a_n$ sich ergibt, im umgekehrten Fall aber vorauszusetzen ist, sind dabei über die gebrochene Linie $z01$ oder, was unter der Voraussetzung 2. damit gleichbedeutend ist, über die gerade Linie $z1$ zu erstrecken und durch $\lim\limits_{\xi\to 1}\int_z^\xi$ zu definieren, wo $\xi$ entlang dem Radius 01, bzw entlang der Sehne $z1$ gegen 1 strebt. (Hardy und Littlewood, *Math. Zeitschr.* **19** (1923) S. 67.)

## § 25. Das Anwachsen der Funktion in der Nähe des Konvergenzkreises.

Zum Vergleich für das Anwachsen der Funktion bei Annäherung der Variablen an einen Punkt $a$ der Konvergenzgrenze eignet sich besonders die Funktion $\frac{1}{(a-z)^\alpha}$ $(\alpha \geqq 0)$.

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$ habe den Einheitskreis zum Konvergenzkreis, und wir wollen das Verhalten von $f$ in der Nähe von $z = 1$ betrachten. (Jeder beliebige Punkt $z_0 = e^{i\varphi_0}$ des Einheitskreises läßt sich durch die Transformation $\zeta = e^{-i\varphi_0} z$ in den Punkt 1 überführen.) Wir setzen $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = s_n$. Aus dem Anwachsen von $s_n$ kann man auf das Verhalten von $f(z)$ bei Annäherung an $z = 1$ schließen:

Gibt es ein $\alpha \geqq 0$ so, daß $\frac{s_n}{n^\alpha} \to A$ für $n \to \infty$, wo $A$ eine beliebige Konstante ist, so gilt $(1-z)^\alpha f(z) \to \Gamma(\alpha+1) A$ für $z \to 1$ auf der reellen Achse. (Appell, *C. R.* **87** (1878) S. 689.)

Dieser Satz ist nicht allgemein umkehrbar, sondern nur unter gewissen Voraussetzungen:

Strebt $(1-z)^\alpha \sum_0^\infty a_n z^n$ bei einem $\alpha \geqq 0$ für $z \to 1$ gegen einen endlichen Wert $A$ und sind von einer Stelle an alle $a_n \geqq 0$, so gilt $\frac{s_n}{n^\alpha} \to \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}$ für $n \to \infty$ (Hardy und Littlewood, *Lond. M. S. Proc.* (2) **13** (1914) S. 174).

Innerhalb des Kreises $|z| \leqq \varrho < r$, wo $r$ der Konvergenzradius ist, hat $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ die Majorante (S. 708) $\mathfrak{M}(\varrho) = \sum_0^\infty |a_n| \varrho^n$. Ist $f(z)$ selbst im Konvergenzkreis beschränkt, so kann $\mathfrak{M}(\varrho)$ für $\varrho \to r$ zwar gegen $\infty$ wachsen, aber nur so schwach, daß

$$\mathfrak{M}(\varrho) \sqrt{r-\varrho} \to 0 \quad \text{fur} \quad \varrho \to r.$$

Allgemeiner: Ist $(r-\varrho)^\alpha f(z)$, wo $\alpha \geqq 0$ und $|z| \leqq \varrho$, beschränkt, so ist $(r-\varrho)^{\alpha+\frac{1}{2}} \mathfrak{M}(\varrho)$ beschränkt (Hardy, *Quarterly Journal* **44** (1913) S. 147).

Zur genaueren Untersuchung des Anwachsens der Funktion bei Annäherung der Variablen an die Konvergenzgrenze sind kompliziertere Hilfsmittel notig, wie sie vor allem Hadamard (*J. de Math* (4) **8** (1892) S. 101) geschaffen hat. Vgl. auch Fabry, *Acta Math.* **36** (1913) S 69.

## § 26. Nichtfortsetzbare Reihen.

Es gibt Potenzreihen, die Funktionen darstellen, welche über keinen Punkt des Konvergenzkreises hinaus fortgesetzt werden können, für die also dieser Kreis „natürliche Grenze" ist, und zwar ist dies in gewissem Betracht kein abnormes Ereignis, sondern sogar die Regel. Nach Versuchen von Borel (*C. R.* **123** (1896) S. 1051; *Acta Math.* **21** (1897) S 243) und Fabry (*C. R.* **124** (1897) S. 142; *Acta Math.* **22** (1899) S. 65) ist dieser Aussage von Polya (*Acta Math.* **41** (1917) S. 99) und Hausdorff (*Math. Zeitschr.* **4** (1919) S. 98) ein präziser Sinn verliehen worden.

Die Nichtfortsetzbarkeit hindert nicht, daß die Reihe auf dem ganzen Rande des Konvergenzkreises konvergiert, also dort stetig ist, z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{b^n}, \text{ wo } 0 < a < 1,\ b \text{ positiv ganz} \geqq 2; \quad \text{Konvergenzradius gleich } 1$$

(Weierstraß 1880, *Werke* **2** S. 223 mit einer für den dortigen Beweis notwendigen, an sich aber überflüssigen Beschränkung; diese Reihe ist historisch das erste Beispiel einer Funktion, bei der die Nichtfortsetzbarkeit aus der Reihenentwicklung erschlossen wurde), ja daß sogar alle Ableitungen noch auf dem Rande konvergieren, z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}, \text{ wo } 0 < a < 1; \text{ Konvergenzradius gleich } 1$$

(Fredholm, publiziert von Mittag-Leffler, *C. R* **110** (1890) S. 627; *Acta Math.* **15** (1891) S 279).

Bei speziellen Beispielen gelingt es manchmal, den Beweis für die Nichtfortsetzbarkeit auf Grund der arithmetischen Eigenschaften der wirklich vorkommenden Exponenten (vgl. Hadamard, *J. de Math* (4) **8** (1892) S. 101; Lerch, *Acta Math.* **10** (1887) S 87) zu erbringen. Lediglich die Größenordnung der Exponenten bildet die Voraussetzung für folgende Sätze:

Hadamardscher Luckensatz (*J. de Math.* (4) **8** (1892) S. 101): Hat die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} z^{k_n} \ (a_{k_n} \neq 0;\ k_n \text{ ganz};\ 0 \leqq k_0 < k_1 < \cdots)$$

endlichen Konvergenzradius und ist

$$\lim_{n=\infty} \inf \frac{k_{n+1}}{k_n} > 1,$$

d. h. von einer Stelle an $k_{n+1} > k_n(1+\vartheta)$, wo $\vartheta > 0$, so ist die Reihe nicht fortsetzbar.

Der Name Lückensatz rührt daher, daß hinter einem von 0 verschiedenen Koeffizienten $a_{k_n}$ jedesmal eine Lücke mindestens von der Größenordnung $\vartheta k_n$ in den Indizes auftritt, wo die zugehörigen Koeffizienten verschwinden.

Fabryscher Lückensatz: Hat die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} z^{k_n} \; (a_{k_n} \neq 0;\; k_n \text{ ganz},\; 0 \leqq k_0 < k_1 \cdots)$$

endlichen Konvergenzradius und ist $\frac{k_n}{n} \to \infty$ für $n \to \infty$ (diese Bedingung ist z. B. stets erfüllt, wenn $k_{n+1} - k_n \to \infty$), so ist die Reihe nicht fortsetzbar. (Fabry, *Ann. éc. norm.* (3) **13** (1896) S. 367; *Acta Math.* **22** (1899) S. 65; Faber, *Münch. Ber.* **34** (1904) S. 63; kürzester Beweis unter allgemeineren Voraussetzungen Carlson und Landau, *Gött. Nachr.* 1921, S. 184.)

Daß das Auftreten von Lücken keineswegs eine notwendige Bedingung für die Nichtfortsetzbarkeit der Reihe bildet, folgt aus dem

Satz von Fatou (bewiesen von Hurwitz und Polya, *Acta Math.* **40** (1916) S. 179): Bei jeder Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius läßt sich durch geeignete Änderung der Vorzeichen der Koeffizienten erreichen, daß sie nicht fortsetzbar wird.

## § 27. Das Verhalten der Partialsummen.

Die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe den endlichen Konvergenzradius $r$ und sei also $\not\equiv 0$ Man betrachte die Partialsummen $s_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\nu} a_n z^n$ $(\nu \geqq 1)$ und vereinige die Nullstellen aller $s_\nu(z)$ zu einer Menge $\mathfrak{M}$, wobei Nullstellen verschiedener $s_\nu$ mit derselben Koordinate als verschieden zu rechnen sind. In Ergänzung des Satzes von Hurwitz (S. 717) gilt der

Satz von Jentzsch: Jeder Punkt des Konvergenzkreises $|z| = r$ ist Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$ (*Acta Math.* **41** (1918) S. 219).

Die „Überkonvergenz": Nach Cauchy (vgl. S. 712) divergiert die Folge der Partialsummen $s_\nu(z)$ in jedem äußeren Punkte des Konvergenzkreises. Nichtsdestoweniger kann es, wie Jentzsch (*Acta Math.* **41** (1918) S. 253) an Beispielen gezeigt hat, vorkommen, daß gewisse Teilfolgen $s_{\nu_k}$ auch noch über den Konvergenzkreis hinaus konvergieren. Diese Erscheinung der sogenannten Überkonvergenz hängt mit der Struktur der in der Potenzreihe wirklich auftretenden Exponentenfolge in nachstehender Weise zusammen.

Es seien in der Koeffizientenfolge einer Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ unendlich viele so große Lücken, innerhalb deren die Koeffizienten verschwinden, vorhanden, daß der Quotient der Randindizes $n'$, $n''$ dieser Lücken größer als $1 + \vartheta$ $(\vartheta > 0)$ ist. Bildet man dann eine Abschnittfolge der Potenzreihe, indem man diese jeweils mit dem linken Rande einer solchen Lücke abbricht: $s_{n'} = \sum_{0}^{n'} a_n z^n$, so konvergiert diese Folge über jeden regulären Punkt des Konvergenzkreises hinaus, und zwar gleichmäßig in einem hinreichend kleinen Kreis um einen solchen Punkt. (Ostrowski, *Berl. Sitzungsber.* 1921, S. 557.) Es ist zu beachten, daß die Lucken der betreffenden Größenordnung in dem ähnlich lautenden Hadamardschen Satz S. 775 zwischen allen von 0 verschiedenen Koeffizienten auftreten müssen, während sie hier nur immer wieder vorzukommen brauchen.

Die Lückenbedingung erfaßt, soweit dies möglich ist, das Auftreten der Überkonvergenz schon vollständig, da der obige Satz in gewissem Sinne umkehrbar ist:

Besitzt eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius $R$ eine Abschnittsfolge $s_{\nu_k}(z)$, die in einer Umgebung eines regulären Punktes des Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert, so kann man sie als Summe zweier Potenzreihen darstellen, von denen die erste einen größeren Konvergenzradius als $R$ hat, während die zweite unendlich viele Lucken besitzt, deren Randindizes einen Quotienten größer als $1 + \vartheta$ $(\vartheta > 0)$ haben und in die die Indizes $\nu_k$ hineinfallen. (Ostrowski, *Berl. Sitzungsber.*

1923, S. 185.) Aus diesem und dem vorhergehenden Satz folgt, daß die gleichmäßige Überkonvergenz in einer Umgebung *eines* regulären Randpunktes dieselbe Erscheinung in einer Umgebung *jedes* regulären Randpunktes nach sich zieht.

Wegen des Bereiches der Überkonvergenz s. Ostrowski, *Math.-Ver.* **32** (1923) S. 286; *Hamb. Math. Abh.* **1** (1923) S. 327.

## IX. Abschnitt.

## Zusammenhang zwischen den Koeffizienten einer Potenzreihe und den Singularitäten der Funktion.

### § 28. Bestimmung der Koordinaten der Singularitäten mit Hilfe der Koeffizienten.

Auf dem Rande des Konvergenzkreises einer Potenzreihe liegt mindestens ein singulärer Punkt der dargestellten Funktion, doch kann man keineswegs etwa aus Konvergenz oder Divergenz der Reihe in einem Randpunkt allgemein auf Regularität oder Singularität der Funktion schließen oder umgekehrt (vgl. S. 713). Daß jedoch unter gewissen Voraussetzungen über die Koeffizienten von der Regularität auf die Konvergenz, bzw. von der Divergenz auf die Singularität geschlossen werden kann, zeigt der

Satz von Fatou (*Acta Math.* **30** (1906) S. 335): Hat $\sum_0^\infty a_n z^n$ den Einheitskreis zum Konvergenzkreis und ist $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, so konvergiert die Reihe in jedem regulären Punkt des Randes, auf jedem abgeschlossenen Regularitätsbogen sogar gleichmäßig (Kürzere Beweise von M. Riesz, *J. f. Math* **140** (1911) S 89; *Gött. Nachr.* 1916, S. 62.)

Konvergiert also $\sum a_n z^n$ für $|z| < 1$ und ist $a_n \to 0$, so folgt aus der Divergenz der Reihe in einem Randpunkt, daß dieser singulär ist.

Die Koeffizienten eines Funktionselementes bestimmen die Funktion und damit die Singularitäten vollständig, die explizite Berechnung der letzteren aus den Koeffizienten ist aber im allgemeinen sehr schwierig Gewisse spezielle Voraussetzungen uber die Koeffizienten gestatten jedoch, direkt eine bestimmte der Singularitäten auf dem Rande anzugeben:

Sind alle Koeffizienten bis auf endlich viele $\geqq 0$ (Vivanti, *Riv. di Mat.* **3** (1893) S. 111) oder gehören sie bis auf endlich viele einem Winkelraum mit dem Nullpunkt als Scheitel und einer Öffnung $< \pi$ an (Dienes, *J. de Math.* (6) **5** (1909) S. 327), so ist der positiv reelle Punkt des Konvergenzkreises ein singulärer Punkt.

Hat $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ für $n \to \infty$ einen Grenzwert $z_0$, so ist $z_0$ ein singulärer Punkt. (Ohne genaue Formulierung und Beweis bei Lecornu, *C. R.* **104** (1887) S. 349; Beweis von Fabry, *Ann. éc. norm.* (3) **13** (1896) S. 367; vgl. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique.* Paris 1901 [Scientia Nr. 12] S. 23.) Liegt übrigens auf dem Konvergenzkreis als einzige Singularität ein Pol $z_0$, so hat $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ den Grenzwert $z_0$. (J. König, *Math. Ann.* **23** (1884) S. 447.) Weitere Sätze in dieser Richtung s. Hadamard, *La série de Taylor*, chap. V.

Aufschluß über die Singularitäten von Reihen, deren Koeffizienten aus denen von anderen Reihen mit bekannten Singularitäten in gewisser Weise zusammengesetzt sind, gibt der

Hadamardsche Kompositionssatz (*Acta Math* **22** (1898) S. 55): Die am Rande des Hauptsterns (S. 758) von $a(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ gelegenen Singularitäten seien $\alpha_\nu$, die am Rande des Hauptsterns von $b(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ gelegenen Singularitäten seien $\beta_\nu$. Dann sind die am Rande des Hauptsterns von $f(z) = \sum_0^\infty a_n b_n z^n$ gelegenen Singularitäten unter den Punkten $\alpha_\nu \cdot \beta_\nu$ enthalten (Wortlaut nach Bieberbach, *Enzykl.* **II**$_3$, Heft 4, S. 464 Erweiterungen von Borel, *Bull. Soc. M.* **26** (1898) S 238; Faber, *Math.-Ver.* **16** (1907) S 285.)

Beispiel: Hat $\sum_0^\infty a_n z^n$ endlichen Konvergenzradius, so ist $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$ eine ganze Funktion.

## § 29. Der Einfluß von arithmetischen Eigenschaften der Koeffizienten auf den Charakter der Funktion.

**Reihen mit nur endlich vielen verschiedenen Koeffizienten.**

Hat die Reihe $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ nur endlich viele verschiedene Koeffizienten, so daß sie für $|z| < 1$ konvergiert, und besitzt die dargestellte Funktion auf dem Rande $|z| = 1$ nur endlich viele isolierte Singularitäten, in deren Umgebung die Funktion eindeutig ist, so ist diese eine rationale Funktion mit lauter einfachen Polen, die in Einheitswurzeln liegen. (Jentzsch, *Math. Ann.* 78 (1918) S. 276; vgl. auch Polya, ebenda S. 286.)

Haben die Koeffizienten nur endlich viele verschiedene Werte, so ist notwendig und hinreichend dafür, daß sie von einer Stelle an sogar periodisch sind, daß die Reihe nur eine endliche Anzahl von isolierten singulären Punkten auf dem Einheitskreis hat. (Carlson, *Math. Ann.* 79 (1919) S. 237; hier auch weitere Verallgemeinerungen des vorigen Satzes von Jentzsch.)

**Reihen mit rationalen oder ganzen Koeffizienten.**

Satz von Eisenstein (*Berl. Sitzungsber.* 1852, S. 441): Stellt eine Reihe mit rationalen Koeffizienten

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{s_n}{t_n} z^n \quad (s_n,\ t_n \text{ ganzzahlig und teilerfremd})$$

eine algebraische Funktion (s. Kap. XVII) dar, so gibt es eine ganze Zahl $T$, so daß $t_n$ ein Teiler von $T^n$ $(n \geqq 1)$ ist, d. h. die Reihe

$$f(Tz) - f(0) = \sum_1^\infty s_n \frac{T^n}{t_n} z^n \text{ hat nur ganzzahlige Koeffizienten}$$

(man sagt: sie ist „ganzzahlig“)

Der Eisensteinsche Satz gibt nur eine notwendige Bedingung dafür an, daß eine rationalzahlige Reihe eine algebraische Funktion darstellt Daß sie keineswegs hinreichend ist, folgt schon daraus, daß es ganzzahlige Reihen gibt, für die der Konvergenzkreis natürliche Grenze ist (man streiche z B. aus der Reihe $1 + z + z^2 + \cdots$ so viele Glieder, daß die Lucken gegen $\infty$ wachsen, vgl. S. 776). Da die Reihen, die der Eisensteinschen Bedingung genügen, durch die lineare Transformation $z = T\zeta$ und Subtraktion einer Konstanten, wodurch an ihren Eigenschaften nichts Wesentliches geändert wird, in ganzzahlige Reihen übergeführt werden, so genügt es, sich mit letzteren an Stelle der Reihen vom Eisensteinschen Typ zu be-

schäftigen. — Es soll sich stets um Reihen nach Potenzen von $z$, d. h. um Entwicklungen um den Nullpunkt, handeln.

Damit eine ganzzahlige Reihe eine nicht-rationale algebraische Funktion darstellen kann, muß diese im Einheitskreis einen Verzweigungspunkt haben. (Fatou, *C. R.* **138**, S. 342, 1904.)

Die Sätze von Eisenstein und Fatou setzen voraus, daß die dargestellte Funktion algebraisch ist. Im folgenden wollen wir allgemeiner zunächst Funktionen betrachten, die in einem Kreis $|z| < R$ nur endlich viele Singularitäten haben.

a) $R > 1$.

Hat eine ganzzahlige Reihe in dem Kreise $|z| < R$ ($R > 1$) nur Pole (Borel, *Bull. Sc. M.* (2) **18** (1894) S. 22) oder hat sie dort nur endlich viele Singularitäten und ist eindeutig (Polya, *Math. Ann.* **77** (1916) S 497), so ist sie rational

b) $R = 1$.

Hat eine ganzzahlige Reihe in dem Kreise $|z| < 1$ nur endlich viele Singularitäten, so ist sie entweder rational oder sie hat im Einheitskreis einen Verzweigungspunkt oder sie ist über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar. (Carlson, *Math. Zeitschr.* **9** (1921) S. 1) Hieraus folgt der vorige Satz und der obige Satz von Fatou. Ferner ergibt sich speziell:

Ist eine ganzzahlige Reihe im Einheitskreis konvergent, so stellt sie entweder eine rationale Funktion dar oder sie ist nicht fortsetzbar.

Weiterhin wollen wir nun den Kreis $|z| < R$ ersetzen durch ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{D}$, das den Nullpunkt enthält. $\mathfrak{D}$ läßt sich durch eine Funktion $w = \varphi(z)$ umkehrbar eindeutig auf einen Kreis um den Nullpunkt der $w$-Ebene abbilden Schreibt man vor: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, so ist der Radius $\varrho$ dieses Kreises eindeutig bestimmt (S. 742). Ist eine durch eine ganzzahlige Reihe definierte Funktion $f(z)$ in $\mathfrak{D}$ eindeutig und bis auf isolierte Singularitäten (die in unendlicher Anzahl vorkommen, aber sich im Innern nicht häufen dürfen) regulär, so gilt folgendes:

Ist $\varrho > 1$, so ist $f(z)$ rational;

„ $\varrho \leqq 1$, so gibt es nichtrationale, in $\mathfrak{D}$ reguläre Funktionen;

„ $\varrho = 1$, und ist der Rand von $\mathfrak{D}$ eine Jordankurve, so ist $f(z)$ entweder rational oder über $\mathfrak{D}$ hinaus nicht fortsetzbar. (Polya, *Lond M. S. Proc* (2) **21** (1923) S. 22; *Math.-Ver.* **31** (1922) S. 107.)

Ohne gewisse Voraussetzungen über den Rand von $\mathfrak{D}$ ist der letzte Teil des Satzes nicht richtig (Polya, a. a. O. S. 34). —

Der Satz besagt: Ein Gebiet $\mathfrak{D}$ der obigen Art kann nur dann Eindeutigkeitsbereich mit isolierten singulären Punkten einer nichtrationalen Funktion mit ganzzahliger Potenzreihenentwicklung sein, wenn das zugehörige $\varrho \leqq 1$ ist.

Wichtig für die Beweise der Sätze von Borel, Polya und Carlson sind folgende Kriterien:

Notwendig und hinreichend dafür, daß die Reihe $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ eine rationale Funktion darstellt, ist, daß die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

bis auf endlich viele verschwinden (Kronecker, *Berl. Sitzungsber.* 1881, S. 535), oder auch, daß, wenn

$$\Delta_p^{(q)} = \begin{vmatrix} a_p & a_{p+1} & \cdots & a_{p+q-1} \\ a_{p+1} & \cdots & \cdots & a_{p+q} \\ \vdots & & & \\ a_{p+q-1} & \cdots & \cdots & a_{p+2q-2} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, es ein $q$ und ein $p_0$ gibt derart, daß $\Delta_p^{(q)} = 0$ ist für $p > p_0$ (Borel, *Bull. Sc. M.* (2) 18 (1894) S. 22).

## Lehrbücher.


Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie* I. Elemente der Funktionentheorie Leipzig und Berlin 1921

Bieberbach, *Einführung in die konforme Abbildung.* Sammlung Göschen Nr 768.

Borel, *Collection de monographies sur la théorie des fonctions.* Paris

Burkhardt, *Funktionentheoretische Vorlesungen.* Neu hrsg. von Faber. $\mathrm{I}_1$. 3. Aufl. Leipzig 1920; $\mathrm{I}_2$. 5. Aufl 1921

Goursat, *Cours d'analyse mathématique* II. 4e éd. Paris 1925

Hurwitz-Courant, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen Geometrische Funktionentheorie.* 2. Aufl. Berlin 1925

Knopp, *Funktionentheorie* I, II. Sammlung Göschen Nr. 668, 703.

Kowalewski, *Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen* Leipzig und Berlin 1911.

Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie.* I. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1912

Picard, *Traité d'analyse.* II. 3e éd Paris 1925.

Vivanti, *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen* Hrsg. von Gutzmer. Leipzig 1906.

# Kapitel XVI.

## Elliptische Funktionen und Integrale.

Von *E. Jahnke*† in Berlin.

Überarbeitet und ergänzt von *A. Barneck* in Berlin.*)

### § 1. Die Jacobischen Thetafunktionen.

*Jacobi* definiert (zuerst in den Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Königsberg 1829; Ges. W. **1**, 49—239, § 60; sodann in seiner Königsberger Vorlesung 1835/36) die Thetafunktionen in folgender Weise, wobei wir die Schreibweise von Weierstraß-Schwarz, Formelsammlung[7]**) zugrunde legen, doch mit dem Unterschiede, daß wir das Jacobische $q$ statt des Weierstraßschen $h$ beibehalten:

$$\begin{aligned}\vartheta_0 v = \vartheta_0(v, q) &= \sum_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\nu^2} e^{2\nu v\pi i} \\ &= 1 - 2q\cos 2v\pi + 2q^4 \cos 4v\pi - 2q^9 \cos 6v\pi + \cdots\end{aligned}$$

---

*) Über die Entstehung dieses Kapitels ist zu bemerken, daß E. Jahnke den Schriftsatz bereits 1913 in Druck gegeben und auch zwei Korrekturen gelesen hatte. Dem Bearbeiter blieb daher sowohl aus Pietät gegen den am 18. Oktober 1921 verschiedenen Verfasser als auch aus praktischen Gründen ein geringer Spielraum zu eigener Darstellung. Er hat sich im allgemeinen auf die Berücksichtigung der seitdem erschienenen Literatur und darauf bezügliche Ergänzungen beschränkt, daneben an einigen Stellen ihm zweckmäßig erscheinende Kürzungen vorgenommen und das Ganze einer eingehenden Durchsicht auf Säuberung von Druckfehlern und Beseitigung von Unebenheiten des Textes und der Bezeichnung unterzogen. Er glaubt sein Verhalten damit rechtfertigen zu können, daß auf dem sozusagen klassischen Gebiet der elliptischen Funktionen keine Veränderungen erfolgt sind, die eine völlige Umarbeitung als notwendig hätten erscheinen lassen.

**) Die Verweisungen [1]) bis [36]) beziehen sich auf die Literaturübersicht am Schluß des Kapitels (S. 846).

$$\vartheta_1 v = \vartheta_1(v, q) = \sum_\nu (-1)^\nu i q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)v\pi i}$$
$$= 2q^{\frac{1}{4}} \sin v\pi - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3v\pi + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5v\pi - \cdots$$

$$\vartheta_2 v = \vartheta_2(v, q) = \sum_\nu q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)v\pi i}$$
$$= 2q^{\frac{1}{4}} \cos v\pi + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3v\pi + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5v\pi + \cdots$$

$$\vartheta_3 v = \vartheta_3(v, q) = \sum_\nu q^{\nu^2} e^{2\nu v\pi i}$$
$$= 1 + 2q \cos 2v\pi + 2q^4 \cos 4v\pi + 2q^9 \cos 6v\pi + \cdot$$
$$(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \infty).$$

Diese Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig für jedes $v$, solange $|q| < 1$ ist. Dabei ist $\vartheta_1 v$ eine *ungerade*, die übrigen sind *gerade* Funktionen von $v$, so daß

$$\vartheta_1(-v) = -\vartheta_1 v, \quad \vartheta_i(-v) = \vartheta_i v \qquad (i = 0, 2, 3),$$

also

$$\vartheta_1 0 = \vartheta_1'' 0 = \cdots = 0, \quad \vartheta_i' 0 = \vartheta_i''' 0 = \cdots = 0.$$

In seinen Fundamenta hat Jacobi diese Funktionen mit

$$\Theta\left(\frac{2K}{\pi}x\right), \quad H\left(\frac{2K}{\pi}x\right), \quad H\left(\frac{2K}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad \Theta\left(\frac{2K}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

und in seinen Vorlesungen mit $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$ bezeichnet. Dabei ist $x = v\pi$ gesetzt. Andere Bezeichnungen haben Hermite[8)] und Ges. W. I, 487, H. Weber[27)] und neuerdings Schottky (*Sitz.-Ber. Berl. Akad.* **41**, 897—904, 1911) gewählt.

Setzt man $q = e^{\tau\pi i}$, $\tau = \frac{1}{\pi i} \ln q$, so genügen die vier Thetafunktionen nebst allen ihren Ableitungen der partiellen Differentialgleichung (Jacobi, *Ges. W.* 2, 163):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} + 4\pi^2 q \frac{\partial \vartheta}{\partial q} = 0.$$

Die Thetas sind *ganze transzendente Funktionen*, d. h. sie werden für keinen endlichen Wert von $v$ unendlich groß. Sie dürfen gliedweise nach $v$, ebenso nach $q$ differentiiert werden. Ihre Nullstellen ergeben sich aus der *Produktdarstellung* (vgl. Jacobi, *Fund. nova* § 52, 61, 64, 65):

$$\vartheta_0 v = \Pi(1-q^{2n})\,\Pi(1-2q^{2n-1}\cos 2v\pi + q^{4n-2})$$
$$= \Pi(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}z^{-2})(1-q^{2n-1}z^{2})$$

$$\vartheta_1 v = 2q^{\frac{1}{4}} \sin v\pi\,\Pi(1-q^{2n})\,\Pi(1-2q^{2n}\cos 2v\pi + q^{4n})$$
$$= q^{\frac{1}{4}}\frac{z-z^{-1}}{i}\,\Pi(1-q^{2n})(1-q^{2n}z^{-2})(1-q^{2n}z^{2})$$

$$\vartheta_2 v = 2q^{\frac{1}{4}} \cos v\pi\,\Pi(1-q^{2n})\,\Pi(1+2q^{2n}\cos 2v\pi + q^{4n})$$
$$= q^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1})\,\Pi(1-q^{2n})(1+q^{2n}z^{-2})(1+q^{2n}z^{2})$$

$$\vartheta_3 v = \Pi(1-q^{2n})\,\Pi(1+2q^{2n-1}\cos 2v\pi + q^{4n-2})$$
$$= \Pi(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^{-2})(1+q^{2n-1}z^{2}),$$

wo $z = e^{v\pi i}$ gesetzt ist und $n$ alle ganzzahligen positiven Werte annimmt. Die Thetafunktionen haben die folgenden Nullstellen:

| | Nullstellen | | Nullstellen |
|---|---|---|---|
| $\vartheta_0 v$ | $m + (n + \frac{1}{2})\tau$ | $\vartheta_2 v$ | $m - \frac{1}{2} + n\tau$ |
| $\vartheta_1 v$ | $m + n\tau$ | $\vartheta_3 v$ | $m - \frac{1}{2} + (n + \frac{1}{2})\tau$ |

Dabei sind den $m$, $n$ alle ganzzahligen Werte beizulegen.

Bezeichnen wir die Werte der geraden Thetas für das Argument Null (*Thetanullwerte*) mit $c_0$, $c_2$, $c_3$, den Wert der ersten Ableitung von $\vartheta_1 v$ für das Argument Null mit $c_1'$, so erhalten wir aus obigen Formeln die Reihenentwicklungen der Nullwerte der drei geraden Thetas. Diese waren Gauß schon in den neunziger Jahren des achtzehnten Jahrhunderts bekannt. Über den Anteil von Gauß an der Entdeckung der Thetafunktionen vgl. P. Gunther, *Gott. Nachr.* 1894, S. 92; L. Schlesinger, *Gött. Nachr.* 1912.

Aus den Produktdarstellungen folgt:

$$c_1' = \pi c_0 c_2 c_3.$$

Wegen der Beweise dieser von Jacobi (*Ges. W.* **1**, 517) herrührenden fundamentalen Formel vgl. Krazer[25]), S. 334 und außerdem Caspary, *Journ. de Math.* (4) **6**, 380—382, 1890.

Die Thetafunktionen sind nicht doppeltperiodisch, ihre Periodizitätseigenschaften kommen zum Ausdruck in den sogenannten *Verwandlungsformeln*, die sich in folgender Tafel zusammenfassen lassen:

| Vermehrung | $\vartheta_0$ | $\vartheta_1$ | $\vartheta_2$ | $\vartheta_3$ | Exponentialfaktor |
|---|---|---|---|---|---|
| $m+n\tau$ | $(-1)^n\vartheta_0$ | $(-1)^{m+n}\vartheta_1$ | $(-1)^m\vartheta_2$ | $\vartheta_3$ | $e^{-n\pi i(2v+n\tau)}$ |
| $m-\frac{1}{2}+n\tau$ | $\vartheta_3$ | $(-1)^{m+1}\vartheta_2$ | $(-1)^{m+n}\vartheta_1$ | $(-1)^n\vartheta_0$ | |
| $m+(n+\frac{1}{2})\tau$ | $(-1)^n i\vartheta_1$ | $(-1)^{m+n} i\vartheta_0$ | $(-1)^m\vartheta_3$ | $\vartheta_2$ | $e^{-(n+\frac{1}{2})\pi i[2v+(n+\frac{1}{2})\tau]}$ |
| $m-\frac{1}{2}+(n+\frac{1}{2})\tau$ | $\vartheta_2$ | $(-1)^{m+1}\vartheta_3$ | $(-1)^{m+n} i\vartheta_0$ | $(-1)^n i\vartheta_1$ | |

wo $m, n$ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Diese Formeln drücken die charakteristische Eigenschaft der Thetas aus und lassen den Zusammenhang mit den doppeltperiodischen Funktionen hervortreten (vgl. die doppeltperiodischen Funktionen dritter Art in § 17, S. 831).

Über den Verlauf der Thetas für reelles Argument und einige Werte von $q = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{\cos\alpha}}{1+\sqrt{\cos\alpha}}+\cdots$ vgl. die Figuren bei Jahnke-Emde, *Funktionentafeln*[30]), S. 69. Über die geometrische Diskussion dieser Funktionen im reellen Gebiet vgl. noch M. Krause[32]), Nr. 26.

## § 2. Die Weierstraßschen Sigmafunktionen.

Neben den Jacobischen Thetafunktionen haben sich die von Weierstraß eingeführten *Sigmafunktionen* von fundamentaler Wichtigkeit für die Theorie der elliptischen Funktionen erwiesen. Sie setzen die Existenz von zwei *Perioden* $2\omega_1$, $2\omega_3$ von der Beschaffenheit voraus, daß ihr Verhältnis $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ einen *positiven imaginären Bestandteil* besitzt, also $\Re\left(\frac{\omega_3}{i\omega_1}\right) > 0$ ist. Ist dann $q = e^{\tau\pi i}$, so ist stets $|q| < 1$. Es sei ferner

$$\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3,$$

also

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Ich folge hiermit einem von Study[15] (und ziemlich gleichzeitig auch von J. Tannery-Molk[16]) gemachten Vorschlag. Weierstraß schreibt $\omega$, $\omega'$, $\omega''$ und setzt $\omega'' = \omega + \omega'$. Die Studysche Bezeichnung gestattet, Formeln, die eine *Gruppe* bilden, in einem einzigen Ausdruck zusammenzufassen.

Dann werden die *Sigmafunktionen* nach Weierstraß durch folgende *Doppelprodukte* von *Primfunktionen* definiert:

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

$$\sigma_\lambda(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma_\lambda u = e^{-\frac{1}{2} e_\lambda u^2} \prod \left(1 - \frac{u}{w_\lambda}\right) e^{\frac{u}{w_\lambda} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w_\lambda^2}}.$$
$$(\lambda = 1, 2, 3)$$

Darin ist

$$w = 2m\omega_1 + 2n\omega_3, \quad w_\lambda = w + \omega_\lambda,$$

also

$$w_1 = (2m+1)\omega_1 + 2n\omega_3, \quad w_2 = (2m-1)\omega_1 + (2n-1)\omega_3,$$
$$w_3 = 2m\omega_1 + (2n+1)\omega_3,$$

wo $m$, $n$ sämtliche ganzen Zahlen durchlaufen. Der Akzent am Produktzeichen für $\sigma u$ bedeutet, daß der Wert $w = 0$ auszuschließen ist Die $e_1$, $e_2$, $e_3$ sind definiert durch:

$$e_1 = \frac{\pi^2}{6\omega_1{}^2} + \frac{4\pi^2}{\omega_1{}^2} \sum \frac{n q^{2n}}{1 + q^{2n}} = \frac{\pi^2}{6\omega_1{}^2} + \frac{4\pi^2}{\omega_1{}^2} \sum \frac{(2n-1) q^{4n-2}}{1 - q^{4n-2}}$$

$$e_2 = -\frac{\pi^2}{12\omega_1{}^2} - \frac{2\pi^2}{\omega_1{}^2} \sum \frac{(-1)^n n q^n}{1 + (-1)^n q^n}$$

$$= -\frac{\pi^2}{12\omega_1{}^2} + \frac{2\pi^2}{\omega_1{}^2} \sum \frac{(2n-1) q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}}$$

$$e_3 = -\frac{\pi^2}{12\omega_1{}^2} - \frac{2\pi^2}{\omega_1{}^2} \sum \frac{n q^n}{1 + q^n}$$

$$= -\frac{\pi^2}{12\omega_1{}^2} - \frac{2\pi^2}{\omega_1{}^2} \sum \frac{(2n-1) q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1}}.$$

Die obige Doppelproduktdarstellung läßt die *Nullstellen* der Sigmas erkennen, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind:

| | Nullstellen | | Nullstellen |
|---|---|---|---|
| $\sigma u$ | $2m\omega_1 + 2n\omega_3$ | $\sigma_2 u$ | $(2m+1)\omega_1 + (2n+1)\omega_3$ |
| $\sigma_1 u$ | $(2m+1)\omega_1 + 2n\omega_3$ | $\sigma_3 u$ | $2m\omega_1 + (2n+1)\omega_3$ |

Sie zeigt zugleich, daß die Sigmafunktion $\sigma u$ ungeändert bleibt, wenn man auf $\omega_1$, $\omega_3$ irgendeine lineare ganzzahlige Transformation mit der Determinante 1 anwendet.

Die Größen $e_1$, $e_2$, $e_3$ lassen sich als Nullstellen der ganzen Funktion 3. Grades

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)$$

auffassen, so daß

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad -4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) = g_2, \quad 4e_1 e_2 e_3 = g_3$$

ist. Die *Diskriminante* $G$ ist bestimmt durch

$$16G = 16(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2(e_1 - e_2)^2 = g_2{}^3 - 27g_3{}^2$$
$$= \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} q^2 \prod (1 - q^{2n})^{24}.$$

Anstatt als Funktionen von $(u \mid \omega_1, \omega_3)$ kann man die Sigmafunktionen auch als Funktionen von $u$ und den *Invarianten*

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4} = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20 \sum \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}}\right),$$
$$g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6} = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum \frac{n^5 q^{2n}}{1 - q^{2n}}\right)$$

ansehen.

Bezeichnet $m$ eine von Null verschiedene reelle oder komplexe Größe, so besteht die *Homogeneitätsgleichung:*

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma(u; g_2, g_3) = m\sigma\left(\frac{u}{m} \,\Big|\, \frac{\omega_1}{m}, \frac{\omega_3}{m}\right) = m\sigma\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right).$$

Die Sigmafunktionen besitzen für alle endlichen Werte des Arguments $u$ und der Invarianten $g_2$, $g_3$ den Charakter *ganzer* Funktionen, und zwar ist $\sigma u$ eine *ungerade* Funktion, die andern drei sind *gerade* Funktionen von $u$.

Sie lassen sich in überall konvergente Potenzreihen nach $u$ entwickeln, deren Koeffizienten bei $\sigma u$ *rational und ganz von* $g_2$, $g_3$, bei $\sigma_\lambda u$ *rational und ganz von* $g_2$, $g_3$, $e_\lambda$ abhängen (vgl. Weierstraß-Schwarz[7]), S. 6 u. S. 22).

Setzt man

$$\eta_\lambda = \frac{\sigma' \omega_\lambda}{\sigma \omega_\lambda},$$

so ist

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0,$$

und es besteht die der *Legendreschen* S. 817 entsprechende Relation:

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2 = \eta_3 \omega_2 - \eta_2 \omega_3 = \frac{\pi i}{2}.$$

Ist, entgegen der getroffenen Voraussetzung, $\Re\left(\frac{\omega_3}{i\omega_1}\right) < 0$, dann tritt $-\frac{\pi i}{2}$ anstelle von $\frac{\pi i}{2}$.

Die S. 787 für die Sigmafunktionen angegebenen Doppelprodukte lassen sich auch in *einfache Produkte* überführen, die den *Zusammenhang der Sigmafunktionen mit den Thetafunktionen* erkennen lassen (vgl. Schoenflies, *Archiv der Math. u. Ph.* (3) 8, 234—237, 1905).

Setzt man

$$v = \frac{u}{2\omega_1},$$

so wird der *Übergang von den Sigmafunktionen zu den Thetafunktionen* durch die Formeln vermittelt:

$$\sigma u = 2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\vartheta_1 v}{c_1'}$$

$$\sigma_1 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\vartheta_2 v}{c_2}, \quad \sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\vartheta_3 v}{c_3}, \quad \sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\vartheta_0 v}{c_0}.$$

Es drücken sich ferner $e_1$, $e_2$, $e_3$; $g_2$, $g_3$; $G$; $\eta_1$ durch die *Thetanullwerte* folgendermaßen aus:

$$e_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 (c_0^4 + c_3^4), \quad e_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 (c_2^4 - c_0^4),$$

$$e_3 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 (c_2^4 + c_3^4);$$

$$g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^4 (c_0^8 + c_2^8 + c_3^8),$$

$$g_3 = \frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 (c_0^4 - c_2^4)(c_0^4 + c_3^4)(c_2^4 + c_3^4);$$

$$G = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^{12}\left(\frac{c_1'}{\pi}\right)^8; \quad \eta_1 = -\frac{1}{12\omega_1}\frac{c_1'''}{c_1'}.$$

Bei einer Vermehrung des Arguments um eine ganze Periode scheiden die Sigmafunktionen Exponentialfunktionen als Faktoren aus, deren Exponenten *linear* von dem Argument abhängen. Bei einer Vermehrung des Arguments um eine halbe Periode wird jede Sigmafunktion in eine der drei übrigen Funktionen übergeführt. (Vgl. Weierstraß-Schwarz[7], S. 22, 26.)

Die Werte der Sigmafunktionen für die Halbperioden lassen sich durch die Thetanullwerte darstellen.

Manche der Formeln in der Theorie der elliptischen Funktionen gewinnen ein etwas einfacheres Aussehen, wenn man, dem Vorgange Weierstraß' folgend, für die Produkte der Sigmafunktionen mit gewissen Irrationalitäten Funktionenzeichen einführt.

## § 3. Die Additionstheoreme der Theta- und Sigmafunktionen.

Es existieren im ganzen 256 Additionstheoreme. Eine besonders elegante Form ist ihnen von Study[15] S. 195—196 gegeben worden. Hierbei zeigen sich die Vorzuge einer von Study vorgeschlagenen Abänderung in der Weierstraßschen Bezeichnung, indem es gelingt, *sämtliche* Additionstheoreme, die in dem *Jacobischen Fundamentaltheorem* stecken, mit denen zusammenzufassen, die in der *Weierstraßschen dreigliedrigen Sigmaformel* enthalten sind.

Jacobi erwähnt in einem Briefe an Hermite (*Journ. f Math* **32**, 176, 1845; *Ges. W.* **2**, 115) sein *Fundamentaltheorem*, aus dem sich die sämtlichen Additionstheoreme herleiten lassen. In seinen Vorlesungen (*Ges. W.* **1**, 497; vgl. auch Rosenhain, *Mém. des sav. étr.* **11**, 371, 1851) hat Jacobi darauf die Theorie der elliptischen Funktionen gegründet. Es lautet:

$$\vartheta_2 a\, \vartheta_2 b\, \vartheta_2 c\, \vartheta_2 d + \vartheta_3 a\, \vartheta_3 b\, \vartheta_3 c\, \vartheta_3 d] = \vartheta_2 a'\, \vartheta_2 b'\, \vartheta_2 c'\, \vartheta_2 d' + \vartheta_3 a'\, \vartheta_3 b'\, \vartheta_3 c'\, \vartheta_3 d'.$$

Caspary (*Journ. f. Math.* (4) **6**, 391, 1890) hat darauf aufmerksam gemacht, daß sich Jacobis Fundamentaltheorem aus einer einfachen Vertauschung der Faktoren eines algebraischen Produktes herleiten läßt.

Study leitet die 256 Additionstheoreme aus der dreigliedrigen *Sigmaformel*

$$\sigma a\, \sigma b\, \sigma c\, \sigma d + \sigma a'\, \sigma b'\, \sigma c'\, \sigma d' + \sigma a''\, \sigma b''\, \sigma c''\, \sigma d'' = 0$$

her, die dem Scharfsinn Jacobis entgangen war und von Weierstraß in seinen Vorlesungen mitgeteilt worden ist.

Man darf hierin alle $\sigma$ durch $\vartheta_1$ ersetzen (vgl. Scheibner, *Journ. f. Math.* **102**, 255, 1888 und Kronecker, *Journ. f. Math.* **102**, 260, 1888).

Durch Spezialisierung der Argumente erhält man aus den allgemeinen Jacobischen Additionstheoremen 36 Formeln für $\vartheta_\alpha(v+v_1)\,\vartheta_\alpha(v-v_1)$ und $\vartheta_\alpha(v+v_1)\,\vartheta_\beta(v-v_1)$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$ (vgl. Jacobi, *Ges. W.* **1**, 510), von denen die folgenden erwähnt seien:

$$c_0^2 \vartheta_1(v+v_1)\,\vartheta_1(v-v_1) = \vartheta_1^2 v\, \vartheta_0^2 v_1 - \vartheta_0^2 v\, \vartheta_1^2 v_1 = \vartheta_3^2 v\, \vartheta_2^2 v_1 - \vartheta_2^2 v\, \vartheta_3^2 v_1$$

$$c_2^2 \vartheta_1(v+v_1)\,\vartheta_1(v-v_1) = \vartheta_1^2 v\, \vartheta_2^2 v_1 - \vartheta_2^2 v\, \vartheta_1^2 v_1 = \vartheta_0^2 v\, \vartheta_3^2 v_1 - \vartheta_3^2 v\, \vartheta_0^2 v_1 \quad \text{usw.}$$

Setzt man $v_1 = 0$, so erhält man Formeln, durch die das Quadrat jeder Thetafunktion linear durch zwei andere Thetaquadrate ausgedrückt wird:

$$c_3^2 \vartheta_0^2 v = c_0^2 \vartheta_3^2 v + c_2^2 \vartheta_1^2 v, \qquad c_3^2 \vartheta_2^2 v = c_2^2 \vartheta_3^2 v - c_0^2 \vartheta_1^2 v$$

$$c_3^2 \vartheta_1^2 v = c_2^2 \vartheta_0^2 v - c_0^2 \vartheta_2^2 v, \qquad c_3^2 \vartheta_3^2 v = c_0^2 \vartheta_0^2 v + c_2^2 \vartheta_2^2 v.$$

Hieraus fließen für die Thetas mit dem Argument 0 die Relationen

$$c_3^4 = c_0^4 + c_2^4,$$

$$c_0^8 + c_2^8 + c_3^8 = 2(c_2^4 c_3^4 + c_0^4 c_3^4 - c_0^4 c_2^4),$$

$$(c_0^8 + c_2^8 + c_3^8)^2 = 2(c_0^{16} + c_2^{16} + c_3^{16}) = 4(c_2^8 c_3^8 + c_0^8 c_3^8 + c_0^8 c_2^8).$$

(Vgl. Pascal, *Ann. di Math.* **24**, 24, 1896 und Barneck (Baruch), *Arch. der Math. u. Phys.* **18**, 101, 1911.)

Entsprechende Formeln ergeben sich durch Spezialisierung aus den Weierstraßschen Additionstheoremen.

## § 4. Ableitungen der Theta- und Sigmafunktionen.

Aus den Additionstheoremen der Theta- und Sigma-Quotienten fließt die fundamentale Eigenschaft, daß sich die Ableitungen dieser Quotienten rational wieder durch solche Quotienten darstellen lassen (Jacobi, *Ges. W.* **1**, 515). Daraus folgt weiter für die ersten logarithmischen Ableitungen der Thetas und Sigmas:

$$\frac{d}{dv}\ln\vartheta_1 v - \frac{d}{dv}\ln\vartheta_0 v = \pi c_0^2\,\frac{\vartheta_2 v\,\vartheta_3 v}{\vartheta_0 v\,\vartheta_1 v}$$

nebst den analogen und entsprechend:

$$\frac{d}{du}\ln\sigma u - \frac{d}{du}\ln\sigma_\lambda u = \frac{\sigma_\mu u\,\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u\,\sigma u}$$

$$\frac{d}{du}\ln\sigma_\nu u - \frac{d}{du}\ln\sigma_\mu u = (e_\mu - e_\nu)\frac{\sigma_\lambda u\,\sigma u}{\sigma_\mu u\,\sigma_\nu u}.$$

Über die geometrische Diskussion dieser Funktionen im reellen Gebiet und ihren Verlauf vgl. Jahnke-Emde[30], S 70 und M. Krause[32], Nr. 24.

Die höheren logarithmischen Ableitungen der Thetas lassen sich, von der zweiten an, durch die Thetas selber ausdrucken. Für $n = 2$ lauten die Darstellungen

$$\frac{d^2\ln\vartheta_0 v}{dv^2} = \frac{c_0''}{c_0} - \frac{c_1'^2}{c_0^2}\frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_0^2 v} = -\frac{c_2 c_2''}{c_0^2}\frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_0^2 v} + \frac{c_3 c_3''}{c_0^2}\frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_0^2 v}$$

$$\frac{d^2\ln\vartheta_1 v}{dv^2} = \frac{c_0''}{c_0} - \frac{c_1'^2}{c_0^2}\frac{\vartheta_0^2 v}{\vartheta_1^2 v} = \frac{c_2 c_2''}{c_0^2}\frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_1^2 v} - \frac{c_3 c_3''}{c_0^2}\frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_1^2 v}$$

$$\frac{d^2\ln\vartheta_2 v}{dv^2} = \frac{c_0''}{c_0} - \frac{c_1'^2}{c_0^2}\frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_2^2 v} = \frac{c_2 c_2''}{c_0^2}\frac{\vartheta_0^2 v}{\vartheta_2^2 v} - \frac{c_3 c_3''}{c_0^2}\frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_2^2 v}$$

$$\frac{d^2\ln\vartheta_3 v}{dv^2} = \frac{c_0''}{c_0} - \frac{c_1'^2}{c_0^2}\frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_3^2 v} = -\frac{c_2 c_2''}{c_0^2}\frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_3^2 v} + \frac{c_3 c_3''}{c_0^2}\frac{\vartheta_0^2 v}{\vartheta_3^2 v}.$$

Vgl. L. Königsberger[5], S. 391; H. Weber[27], S. 60; E. Jahnke, *Arch. d Math. u Phys.* (3) **16**, 81 und M Krause[32], S. 72 und Nr 25.

Für $n=3$ vgl. Scheibner, *Leipz. Abh.* **12**, 148, 1879, für $n=4, 5$ vgl. Bertolani, *Batt. Giorn.* **33**, 139, 1895; für allgemeine $n$ vgl. Barneck (Baruch), *Diss.* Halle 1910.

Fur das Argument Null folgen aus diesen Formeln zahlreiche Differentialrelationen, deren wichtigste sind:

$$c_1' = \pi c_0 c_2 c_3,$$

$$\frac{c_3''}{c_3} - \frac{c_2''}{c_2} = \pi^2 c_0^4, \; \frac{c_0''}{c_0} - \frac{c_3''}{c_3} = \pi^2 c_2^4, \; \frac{c_2''}{c_2} - \frac{c_0''}{c_0} = -\pi^2 c_3^4,$$

sowie die auf Weierstraß' Vorlesungen zurückgehende:

$$\frac{c_1'''}{c_1'} = \frac{c_0''}{c_0} + \frac{c_2''}{c_2} + \frac{c_3''}{c_3}.$$

(Vgl. Königsberger[5] I, 381; Halphen[9] **1**, 257; Frobenius, *Journ. für Math.* **98**, 247, 1885; Caspary, *Journ. de Math.* (4) **6**, 381, 1890). Ihr analog gebildet ist die folgende

$$\frac{c_1'''^{\,2}}{c_1'^{\,2}} = \frac{c_0^{IV}}{c_0} + \frac{c_2^{IV}}{c_2} + \frac{c_3^{IV}}{c_3}$$

(Barneck (Baruch), *Arch. d. Math. u. Phys.* (3) **18**, 101). Über die *Nullrelationen zwischen hoheren Ableitungen* vgl. Jahnke, *Arch. d. Math u. Phys.* (3) **16**, 81, Pascal, *Ann. di mat.* (2) **24**, 24 (1896) und besonders die *Diss.* von Barneck (Baruch), Halle 1910, sowie *Arch. d. Math. u Phys.* (3) **18**, 101.

Drückt man in den Formeln für die logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen die Differentiale nach $v$ durch solche nach $\tau$ aus mittels der partiellen Differentialgleichung, der die $\vartheta$ genügen, und setzt dann $v=0$, so resultieren Differentialrelationen für die Thetanullwerte (vgl. H. Weber[27], S. 60)

Ebenso wie die Thetas der bekannten partiellen Differentialgleichung (S. 784) genügen, befriedigen die Weierstraßschen Funktionen $\sigma(u; g_2, g_3)$ und $\sigma_\lambda(u; g_2, g_3)$ die partiellen Differentialgleichungen (vgl. Tannery-Molk[16] 4, 79)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} = 12 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} - \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_\lambda}{\partial u^2} = 12 g_3 \frac{\partial \sigma_\lambda}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma_\lambda}{\partial g_3} - \left(e_\alpha + \frac{1}{12} g_2 u^2\right) \sigma_\lambda. \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

## § 5. Doppeltperiodische Funktionen. Elliptische Funktionen $r^{ten}$ Grades.

Eine Funktion $f(u)$ des komplexen Arguments $u$ heißt *doppeltperiodisch*, wenn es zwei Zahlen — *Perioden* — $2\omega_1$, $2\omega_3$ gibt, deren Verhältnis nicht gleich einer reellen rationalen Zahl ist, so daß

$$f(u + 2\omega_1) = f(u) \text{ und } f(u + 2\omega_3) = f(u)$$

ist. Sind $m, n$ beliebige ganze positive oder negative Zahlen, so ist auch $2m\omega_1 + 2n\omega_3$ eine Periode, d. h. es ist

$$f(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = f(u).$$

Konstruiert man zu einem Punkt $u_0$ (Grundpunkt) die Punkte $u_0 + 2\omega_1$, $u_0 + 2\omega_3$, $u_0 + 2\omega_1 + 2\omega_3$, so bilden die vier Punkte ein *Periodenparallelogramm,* durch dessen Wiederholung die ganze Zahlenebene mit einem *Gitter* von parallelogrammatisch geordneten Punkten bedeckt wird. In allen Punkten des Gitters besitzt die Funktion $f(u)$ denselben Wert.

Zwei Werte $u$, $v$ des komplexen Arguments heißen *kongruent* bezüglich der Perioden, also $u \equiv v \pmod{2\omega_1, 2\omega_3}$ oder $u - v \equiv 0 \pmod{2\omega_1, 2\omega_3}$, wenn sie sich um eine Summe von Vielfachen der beiden Perioden unterscheiden, also $u - v = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ ist. Eine doppeltperiodische Funktion ist vollständig bekannt, wenn man sie in *einem* Periodenparallelogramm kennt, im Unendlichen ist sie unbestimmt.

*Eine eindeutige Funktion einer Veranderlichen kann nicht mehr als zwei Perioden haben* (Jacobi, *Ges. W.* **2**, 25, 1834)

Solche Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$, aus denen sich durch additive Zusammensetzung von ganzen Vielfachen jede Periode darstellen läßt, heißen *primitive* Perioden. *Ihr Verhaltnis muß immer komplex sein* (Jacobi, *Ges. W.* **2**, 25, vgl. Tannery-Molk[16] **1**, 14; A. Pringsheim, *Münch. Ber.* **30**, 54, 1900), also läßt sich mit ihnen immer zu einem Grundpunkt $u_0$ ein eigentliches Parallelogramm konstruieren, welches *Elementarparallelogramm* heißt und für $u_0 = 0$ auch *fundamentales Periodenparallelogramm* genannt wird. Es gibt unendlich viele primitive Periodenpaare, welche sämtlich aus einem solchen Paar durch unimodulare lineare ganzzahlige Transformation entstehen, also

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_3 \\ \Omega_3 &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_3 \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ganze Zahlen}).$$

Für sämtliche primitiven Perioden haben die Elementarparallelogramme gleichen Flächeninhalt.

Man kann die Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ immer so anordnen, daß der Winkel zwischen der 1. und 2. Periode, im positiven Drehsinn gemessen, $< \pi$ ist. Dann hat die Größe $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ einen *positiven imaginären Bestandteil*, und *der absolute Wert von* $q = e^{i\pi\tau}$ *ist* $< 1$. Ferner läßt sich stets ein primitives Periodenpaar so wählen, daß für dieses die Größe $q$ einen kleineren absoluten Wert hat, als für irgend ein anderes primitives Periodenpaar, und es ist dann $|q| < e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} = 0{,}06583$. (Vgl. Jacobi, *Journ. f. Math.* **32**, 177, 1845; *Ges. W.* **2**, 117 und Hermite, *Ges. W.* **1**, 83.)

Eine eindeutige doppeltperiodische Funktion $f(u)$, die im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Funktion hat, dort also keine wesentliche Singularität besitzt, heißt *elliptische Funktion*. Es bestehen die folgenden allgemeinen Sätze, die einer Vorlesung von Liouville entnommen sind (Liouville, *Vorlesung* 1847, *C R.* **32**, 450 (1851)) und daher als Liouvillesche Sätze bezeichnet werden:

1. *Das Integral* $\int f(u)\,du$, *erstreckt längs des Randes eines Periodenparallelogramms, ist Null.*

2. *Die Summe der Residuen von* $f(u)$ *innerhalb eines Periodenparallelogramms ist Null.*

3. Die Zahl, die angibt, wie oft $f(u)$ innerhalb eines Periodenparallelogramms unendlich groß wird — jeder Pol so oft gezählt, als die Ordnung des Unendlichgroßwerdens an dieser Stelle anzeigt — heißt der *Grad* (Weierstraß) oder die *Ordnung* der elliptischen Funktion

Es gibt keine elliptische Funktion 1. Grades. $f(u)$ muß in jedem Periodenparallelogramm mindestens zur 2. Ordnung unendlich werden. Eine elliptische Funktion, von der man fordert, daß sie keinen Pol oder daß sie nicht mehr als einen (einfachen) Pol besitze, reduziert sich auf eine Konstante

4. *Eine elliptische Funktion* $r^{\text{ten}}$ *Grades nimmt in einem Periodenparallelogramm jeden vorgeschriebenen Wert gleich oft, und zwar r-mal an.*

5. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ die *Nullpunkte*, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ die *Pole* einer elliptischen Funktion innerhalb eines Periodenparallelogramms und nimmt die Funktion einen *vorgeschriebenen*

*Wert* $C$ in den Parallelogrammpunkten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_r$ an (wobei auch einzelne der Punkte $\alpha$ oder $\beta$ oder $\gamma$ zusammenfallen können), so ist

$$\sum \alpha_i \equiv \sum \beta_i \equiv \sum \gamma_i \pmod{2\omega_1, 2\omega_3}.$$

6. *Zwischen je zwei elliptischen Funktionen mit gleichen Perioden besteht eine irreduzible algebraische Gleichung.*

7. *Zwischen einer elliptischen Funktion* $r^{\text{ten}}$ *Grades* $z = f(u)$, *welche in einem Periodenparallelogramm* $\varrho$ *getrennte Pole besitzt, und ihrer Ableitung* $s = f'(u)$ *besteht eine algebraische Gleichung vom Grade* $r$:

$$s^r + P_1 s^{r-1} + \cdots + P_i s^{r-i} + \cdots + P_{r-2} s^2 + P_r = 0,$$

von der folgendes zu bemerken ist:

*a) Das Glied mit der ersten Potenz von* $s$ *fehlt unter allen Umständen.*

*b) Die Koeffizienten* $P$ *sind ganze rationale Funktionen von* $z$ *und der Grad von* $P_i$ *ist nicht großer als die kleinere der Zahlen* $2i$ *und* $r + \varrho$.

Die Ableitung einer elliptischen Funktion $f(u)$ hat dieselben Perioden wie $f(u)$ und ist mindestens vom 3. Grade.

8. Jede elliptische Funktion läßt sich durch eine beliebige andere elliptische Funktion und deren Ableitung rational ausdrücken.

9. Jede elliptische Funktion $f(u)$ besizt ein algebraisches Additionstheorem, d. h. zwischen den Funktionen $f(u+v)$, $f(u)$, $f(v)$ besteht eine algebraische Gleichung, deren Koeffizienten von $u$ und $v$ unabhängig sind; und $f(u+v)$ ist *rational* ausdrückbar durch $f(u)$, $f(v)$ und die Ableitungen $f'(u)$, $f'(v)$.

Dieser Satz ist umkehrbar. Vgl. Koebe, *Diss.* Berlin 1905.

Weierstraß hat gezeigt: Jede elliptische Funktion $r^{\text{ten}}$ Grades mit dem Periodenpaar $2\omega_1$, $2\omega_3$ laßt sich mittels der zum selben Periodenpaar gehörenden Funktion $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3)$ als Quotient von Sigmaprodukten darstellen:

$$f(u) = C \frac{\sigma(u-\alpha_1)\,\sigma(u-\alpha_2)\cdots\sigma(u-\alpha_r)}{\sigma(u-\beta_1)\,\sigma(u-\beta_2)\cdots\sigma(u-\beta_r)}.$$

Hierbei ist $C$ eine Konstante und

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r$$

In den Punkten $\alpha_i$ und den zugehörigen Gitterpunkten wird $f(u)$

Null von der 1. Ordnung, in den Punkten $\beta_i$ und den zugehörigen Gitterpunkten unendlich von der 1. Ordnung.

Umgekehrt ist die durch einen solchen Quotienten von Sigmaprodukten bestimmte Funktion eine zum Periodenpaar $(2\omega_1, 2\omega_3)$ gehörende elliptische Funktion $r^{ten}$ Grades, wenn $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = \beta_1 + \cdots + \beta_r$ und keine der Differenzen $\alpha_\lambda - \beta_\mu$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots r)$ der Null kongruent ist.

An Stelle der Sigmafunktion kann auch die ungerade Thetafunktion genommen werden.

## § 6. Die elliptischen Funktionen im engeren Sinne.

Sie wurden von Abel, *J. f. Math.* **2**, 1827 und von Jacobi, *Fund. nova* 1829 eingeführt. Als elliptische Funktionen definiert Jacobi gewisse Quotienten von Thetareihen:

$$\operatorname{sn} u' = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_0 v} = u' - \frac{1+k^2}{6} u'^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{120} u'^5 - \cdots$$

$$\operatorname{cn} u' = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2 v}{\vartheta_0 v} = 1 - \frac{u'^2}{2} + \frac{1+4k^2}{24} u'^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{720} u'^6 + \cdots$$

$$\operatorname{dn} u' = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3 v}{\vartheta_0 v} = 1 - \frac{k^2 u'^2}{2} + \frac{k^2(4+k^2)}{24} u'^4 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{720} u'^6 + \cdots,$$

wo

$$u' = \pi c_3^2 v, \quad \sqrt{k} = \frac{c_2}{c_3}, \quad \sqrt{k'} = \frac{c_0}{c_3}, \quad k^2 + k'^2 = 1.$$

Davon sind $\operatorname{sn} u'$ eine ungerade, $\operatorname{cn} u'$ und $\operatorname{dn} u'$ gerade Funktionen Sie lassen sich auch in trigonometrische Reihen entwickeln, vgl. Jacobi, *Fund nova* oder *Ges. W.* **1**, 157; wegen weiterer Entwicklungen vgl. Königsberger[5)] **1**, 404, M. Krause[17)] **1**, 100, H. Weber[27)], S. 718.

Die beiden Fundamentaleigenschaften der elliptischen Funktionen sind die *doppelte Periodizität* (vgl. S. 801) und die Existenz algebraischer *Additionstheoreme* (vgl. S. 802). Wegen der Darstellbarkeit der elliptischen Funktionen als Quotienten von beständig konvergenten Potenzreihen vgl. noch A. Kneser, *Math. Ann.* **32**, 309, 1888 und M. Hamburger, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.* **1**, 19, 1902

Das, was Legendre elliptische Funktionen nannte, bezeichnen wir jetzt als elliptische Integrale.

Für die Reziproken und Quotienten der $\operatorname{sn} u'$, $\operatorname{cn} u'$, $\operatorname{dn} u'$ hat Glaisher (*Acta math.* **26**, 241) besondere Bezeichnungen eingeführt.

Unter den genannten elliptischen Funktionen bestehen Relationen, deren einfachste sind:

$$\operatorname{sn}^2 u' + \operatorname{cn}^2 u' = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u' + k^2 \operatorname{sn}^2 u' = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u' - k^2 \operatorname{cn}^2 u' = k'^2$$

$$\frac{d \operatorname{sn} u'}{du'} = \operatorname{sn}' u' = \operatorname{cn} u' \operatorname{dn} u', \qquad \frac{d \operatorname{cn} u'}{du'} = \operatorname{cn}' u' = - \operatorname{sn} u' \operatorname{dn} u',$$

$$\frac{d \operatorname{dn} u'}{du'} = \operatorname{dn}' u' = - k^2 \operatorname{sn} u' \operatorname{cn} u',$$

d. h. der Differentialquotient jeder der drei Jacobischen elliptischen Funktionen stellt sich, abgesehen von einer Konstanten, als Produkt der beiden andern dar. Durch die gleiche elliptische Funktion ausgedrückt, ergibt sich die algebraische Darstellung:

$$\operatorname{sn}'^2 u' = (1 - \operatorname{sn}^2 u')(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u')$$

$$\operatorname{cn}'^2 u' = (1 - \operatorname{cn}^2 u')(1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u')$$

$$\operatorname{dn}'^2 u' = (1 - \operatorname{dn}^2 u')(\operatorname{dn}^2 u' - 1 + k^2).$$

Das Umkehrproblem führt von den elliptischen Funktionen zu den elliptischen Integralen. (Vgl. § 10.) Wird $\operatorname{sn} u' = x$ gesetzt, dann ergibt sich durch Umkehrung die Darstellung des $u'$ als Funktion von $x$ mittels des Integrals

$$u' = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi, k) = \pi c_3{}^2 v,$$

das nach Legendre als *elliptisches Integral 1. Gattung* bezeichnet wird. Für $x = 1$ oder $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = c_3{}^2 \frac{\pi}{2}$$

das *vollständige Integral 1. Gattung.* $k$ heißt der *Modul,* $k' = \sqrt{1 - k^2}$ der *komplementäre Modul* des Integrals. Daraus folgt:

$$c_3^2 = \frac{2K}{\pi}, \quad c_2^2 = \frac{2K}{\pi} k, \quad c_0^2 = \frac{2K}{\pi} k', \quad v = \frac{u'}{2K}.$$

Aus $K$ geht das *komplementäre vollständige elliptische Integral* $K'$ hervor, wenn $k$ durch $k'$ ersetzt wird.

Zwischen den Legendreschen $K$, $K'$ und dem Jacobischen $q$ besteht der Zusammenhang

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}.$$

Da der absolute Wert von $q$ kleiner als Eins sein muß, ist $\Re\left(\frac{K'}{K}\right)$ positiv und von Null verschieden. Weierstraß setzt

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega_3 = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \text{also } \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = i\frac{K'}{K}, \quad h = e^{\tau \pi i},$$

während Hermite $K = \omega_1$, $iK' = \omega_3$, Weber $2K = \omega_1$, $2iK' = \omega_3$ wählen und $\frac{K'}{K} = -i\omega$, also $q = e^{i\pi\omega}$ setzen.

Die Tafel auf der folgenden Seite, entnommen aus J. Thomae [26], S. 6, und Hancock [31], S. 466, ist so zu verstehen, daß die Werte des Arguments aus der oberen Horizontalen und linken Vertikalen zusammenzusetzen sind; die zugehörigen Werte der elliptischen Funktionen stehen dann an der Schnittstelle der horizontalen und vertikalen Parallelen. So ist beispielsweise abzulesen

$$\operatorname{sn}(K + iK') = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{cn}(2iK') = -1, \quad \operatorname{dn}(2K + 2iK') = -1.$$

Auch die *Nullstellen* und die *Pole* der elliptischen Funktionen sind aus der Tabelle zu entnehmen:

Die Nullstellen von $\operatorname{sn} u'$, $\operatorname{cn} u'$, $\operatorname{dn} u'$ sind bzw.

$$2mK + 2niK', \quad (2m+1)K + 2niK',$$
$$(2m+1)K + (2n+1)iK'$$

und sämtlich von der 1. Ordnung. Die *Pole* der drei Funktionen sind die gleichen, nämlich $2mK + (2n+1)iK'$, und ebenfalls von der 1. Ordnung

**Tafel der elliptischen Funktionen für ausgezeichnete Werte d. Arguments.**

| $u'$ | | $0$ | $\frac{1}{2}K$ | $K$ | $\frac{3}{2}K$ | $2K$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $\operatorname{sn} u'$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$ | $1$ | $\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$ | $0$ |
| | $\operatorname{cn} u'$ | $1$ | $\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$ | $-1$ |
| | $\operatorname{dn} u'$ | $1$ | $\sqrt{k'}$ | $k'$ | $\sqrt{k'}$ | $1$ |
| $\frac{1}{2}iK'$ | $\operatorname{sn} u'$ | $\frac{i}{\sqrt{k}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2k}}A_1$ [1] | $\frac{1}{\sqrt{k}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2k}}A_2$ | $-\frac{i}{\sqrt{k}}$ |
| | $\operatorname{cn} u'$ | $\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$ | $-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$ | $-i\frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}$ | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$ | $-\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$ |
| | $\operatorname{dn} u'$ | $\sqrt{1+k}$ | $\sqrt{\frac{k'}{2}}A_2'$ | $\sqrt{1-k}$ | $\sqrt{\frac{k'}{2}}A_1'$ | $\sqrt{1+k}$ |
| $iK'$ | $\operatorname{sn} u'$ | $+J$ [2] | $\frac{1}{\sqrt{1-k'}}$ | $\frac{1}{k}$ | $\frac{1}{\sqrt{1-k'}}$ | $-J$ |
| | $\operatorname{cn} u'$ | $-iJ$ | $-\frac{i\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}$ | $-i\frac{k'}{k}$ | $-i\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}$ | $+iJ$ |
| | $\operatorname{dn} u'$ | $-ikJ$ | $-i\sqrt{k'}$ | $0$ | $i\sqrt{k'}$ | $-ikJ$ |
| $\frac{3}{2}iK'$ | $\operatorname{sn} u'$ | $-\frac{i}{\sqrt{k}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2k}}A_2$ | $\frac{1}{\sqrt{k}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2k}}A_1$ | $\frac{i}{\sqrt{k}}$ |
| | $\operatorname{cn} u'$ | $-\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$ | $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$ | $-i\frac{\sqrt{1-k'}}{\sqrt{k}}$ | $-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$ | $\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$ |
| | $\operatorname{dn} u'$ | $-\sqrt{1+k}$ | $-\sqrt{\frac{k'}{2}}A_1'$ | $-\sqrt{1-k}$ | $-\sqrt{\frac{k'}{2}}A_2'$ | $-\sqrt{1+k}$ |
| $2iK'$ | $\operatorname{sn} u'$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$ | $1$ | $\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$ | $0$ |
| | $\operatorname{cn} u'$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$ | $1$ |
| | $\operatorname{dn} u'$ | $-1$ | $-\sqrt{k'}$ | $-k'$ | $-\sqrt{k'}$ | $-1$ |

1) $\left.\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\right\} = \sqrt{1+k} \pm \sqrt{1-k}, \quad \left.\begin{matrix}A_1'\\A_2'\end{matrix}\right\} = \sqrt{1+k'} \pm \sqrt{1-k'}.$

2) Hier ist $J = \lim\limits_{u' \to 0} \frac{1}{k \operatorname{sn} u'}$ gesetzt

Die elliptischen Funktionen für rein imaginäre Werte des Arguments lassen sich auf solche mit reellem Argument zurückführen. Der Zusammenhang des Legendreschen Moduls mit dem Jacobischen $q$ (und daher auch mit dem Weierstraßschen $\tau$) folgt nach Jacobi aus den Definitionsgleichungen der elliptischen Funktionen durch Spezialisierung:

$$\sqrt{k} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}, \quad \sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}$$

(vgl. auch Hermite, *Ges. W.* 2, 165).

Was die Umkehrung dieser Reihen angeht, so hat sich Jacobi begnügt zu zeigen, daß sich zu jedem reellen Wert von $k$, wo $0 < k < 1$, ein Wert von $q$ berechnen läßt. Diese Lücke hat Weierstraß ausgefüllt, indem er die allgemein gültige Reihe für $q$ als Funktion von $k$ aufstellte. Vgl. Jacobi, *Ges. W.* 1, 545, Anmerkung von Weierstraß, aber auch Scheibner, Leipz. Abh. 12, 199, 1879. Diese Reihe lautet:

$$q = \frac{1}{2^4}k^2 + \frac{1}{2^5}k^4 + \frac{21}{2^{10}}k^6 + \frac{31}{2^{11}}k^8 + \frac{6257}{2^{19}}k^{10} + \cdots.$$

Wegen weiterer Entwicklungen vgl. Weierstraß-Schwarz[7], S. 56.

Für $k^2 = 2^4\xi$ enthält die Entwicklung von $q$ nach Potenzen von $\xi$ lauter *ganzzahlige* Koeffizienten (Hermite, *Kasan Ges.* (2) 6, 1, 1897)

Über die geometrische Diskussion von $-\log q$ in Abhängigkeit von $\alpha$, wo $k = \sin\alpha$, vgl. Schellbach[2], S. 63, Jahnke-Emde[30], S. 65 und M. Krause[32], Nr. 30.

Ich komme nun auf die beiden Fundamentaleigenschaften der elliptischen Funktionen zurück:

Die elliptischen Funktionen sind *doppeltperiodisch*, und zwar hat

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sn} u'$ | die Perioden | $4K$ | und | $2iK'$ |
| $\operatorname{cn} u'$ | „ „ | $4K$ | „ | $2K + 2iK'$ |
| $\operatorname{dn} u'$ | „ „ | $2K$ | „ | $4iK'$. |

Dem Zuwachs des Arguments um halbe oder Viertelperioden entsprechen Formeln, die aus folgender Tafel zu entnehmen sind:

| | $u'+2K$ | $u'+2iK'$ | $u'+K$ | $u'+i'K$ | $u'+K+iK'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sn | $-\operatorname{sn} u'$ | $\operatorname{sn} u'$ | $\dfrac{\operatorname{cn} u'}{\operatorname{dn} u'}$ | $\dfrac{1}{k \operatorname{sn} u'}$ | $\dfrac{\operatorname{dn} u'}{k \operatorname{cn} u'}$ |
| cn | $-\operatorname{cn} u'$ | $-\operatorname{cn} u'$ | $-k'\dfrac{\operatorname{sn} u'}{\operatorname{dn} u'}$ | $\dfrac{\operatorname{dn} u'}{ik \operatorname{sn} u'}$ | $\dfrac{k'}{ik \operatorname{cn} u'}$ |
| dn | . $\operatorname{dn} u'$ | $-\operatorname{dn} u'$ | $\dfrac{k'}{\operatorname{dn} u'}$ | $\dfrac{\operatorname{cn} u'}{i \operatorname{sn} u'}$ | $\dfrac{ik \operatorname{sn} u'}{\operatorname{cn} u'}$ |

Die **Legendre-Jacobischen** Perioden $2K$ und $2iK'$ sind nicht unabhängig voneinander, sie müssen der Bedingung genügen:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots, \qquad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

während die **Weierstraßschen** Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ willkürlich gewählt werden, nur mit der Beschränkung $\Re\left(\frac{\omega_3}{i\,\omega_1}\right) > 0$. **Hermite** nimmt $2K\sqrt{e_1-e_3}$ und $2iK'\sqrt{e_1-e_3}$ statt der **Jacobischen** $2K$ und $2iK'$, so daß die vorstehende Bedingung bei seiner Wahl identisch erfüllt wird.

Die zweite Fundamentaleigenschaft der elliptischen Funktionen besteht in der Existenz von algebraischen Additionstheoremen. Diese lassen sich in mannigfacher Form aussprechen, z. B. folgendermaßen:

$$\operatorname{sn}(u' \pm u_1') = \frac{\operatorname{sn} u' \operatorname{cn} u_1' \operatorname{dn} u_1' \pm \operatorname{sn} u_1' \operatorname{cn} u' \operatorname{dn} u'}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u' \operatorname{sn}^2 u_1'}$$

$$\operatorname{cn}(u' \pm u_1') = \frac{\operatorname{cn} u' \operatorname{cn} u_1' \mp \operatorname{sn} u' \operatorname{sn} u_1' \operatorname{dn} u' \operatorname{dn} u_1'}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u' \operatorname{sn}^2 u_1'}$$

$$\operatorname{dn}(u' \pm u_1') = \frac{\operatorname{dn} u' \operatorname{dn} u_1' \mp k^2 \operatorname{sn} u' \operatorname{sn} u_1' \operatorname{cn} u' \operatorname{cn} u_1'}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u' \operatorname{sn}^2 u_1'}$$

Schreibt man das Additionstheorem in der folgenden Form:

$$\operatorname{cn}(u' \pm u_1') = \operatorname{cn} u' \operatorname{cn} u_1' \mp \operatorname{sn} u' \operatorname{sn} u_1' \operatorname{dn}(u' \pm u_1'),$$

so tritt sein Zusammenhang mit der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie zutage, den bereits **Lagrange** (*Théorie des fonctions* S. 85, § 81, 82) bemerkt und zu einer Kon-

struktion der Additionsformel verwandt hat. Eine zweite Konstruktion in der Ebene rührt von Jacobi (*Ges. W.* **1**, 279, 1830), eine andere von Hermite her (*Bull. des sc. math.* **2**, 21 1871). Vgl. auch P. Kokott, *Arch. d. Math. u. Ph.* (3) **3**, 226, 1901.

Diese Additionstheoreme sind im Grunde schon von *Euler* (*Novi Comm. Petrop.* 1761, 6, 7) gefunden worden, dem es gelang, das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$

in der Form

$$C = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}$$

zu finden und so einen Sonderfall des *Abelschen Theorems* zu entdecken.

Über andere Formen der Additionstheoreme vgl. noch J. J. Thomson, *Mess. of Math.* **9**, 53, 1880; Glaisher, *Mess. of Math.* **10**, 106, 1881 und Greenhill[18], 112—141.

## § 7. Die $\wp$- und die $\zeta$-Funktion.

Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion wird definiert durch

$$\wp u = -\frac{d^2 \ln \sigma u}{du^2} = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u\, \sigma'' u}{\sigma^2 u} = -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{1}{4\omega_1^2}\frac{d^2 \ln \vartheta_1 v}{dv^2},$$

$$u = \frac{\pi c_3^2}{\sqrt{e_1 - e_3}}\, v.$$

Sie ist *doppeltperiodisch* mit dem primitiven Periodenpaar $(2\omega_1, 2\omega_3)$ Wird $w = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ gesetzt, wo $m$, $n$ alle positiven oder negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so ist

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_w{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

wo der Strich am Summenzeichen andeuten soll, daß $w = 0$ auszuschließen ist. Diese Doppelreihe konvergiert, wenn der Periodenquotient $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ keinen reellen Wert besitzt.

Die $\wp$-Funktion wird innerhalb jedes Parallelogramms nur an der Stelle, die dem Nullwerte des Arguments kongruent ist,

unendlich groß, und zwar von der 2. Ordnung. Sie ist also eine elliptische Funktion 2. Grades und ist unter allen doppeltperiodischen Funktionen die einfachste. Sie ist eine gerade Funktion ihres Arguments: $\wp(-u)=\wp u$. Daher ist $\wp' u$ eine ungerade elliptische Funktion 3. Grades.

Die $\wp$-Funktion genügt der Differentialgleichung

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

ist also die inverse Funktion des Integrals

$$u=\int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3),$$

wenn $\wp u = s$ gesetzt wird. Dabei hängen die Nullstellen von $S$, die *irrationalen* Invarianten $e_i$, mit den *rationalen* Invarianten $g_2$, $g_3$ in früher (S. 788) angegebener Weise und mit den Perioden wie folgt zusammen:

$$\omega_1=\int_{e_1}^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad \omega_2=\int_{e_2}^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad \omega_3=\int_{e_3}^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}}$$

$$e_1=\wp\omega_1, \quad e_2=\wp\omega_2, \quad e_3=\wp\omega_3.$$

Die Funktion

$$\wp' u = -2\sum_w \frac{1}{(u-w)^3}$$

ist eine doppeltperiodische Funktion 3. Grades mit den primitiven Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ und wird im Grundparallelogramm an den Stellen $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ Null von der 1. Ordnung. Es ist

$$\wp' u = -\frac{\sigma 2u}{\sigma^4 u} = \frac{2\sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u}{\sigma^3 u}.$$

In der Umgebung des Punktes $u=0$ läßt sich $\wp u$ in eine Potenzreihe entwickeln, deren Koeffizienten rationale Funktionen von

$$g_2 = 60\sum_w{}' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 140\sum_w{}' \frac{1}{w^6}$$

sind:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \frac{g_2^{\,2}}{2^4\cdot 3\cdot 5^2}u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{2^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11}u^8 + \cdots.$$

Aus der Produktdarstellung für die Sigmafunktion (S. 789) ergeben sich Fouriersche Reihen für $\wp u$ und $\wp' u$:

$$\wp u = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\frac{1}{\sin^2\frac{u\pi}{2\omega_1}} - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2}\sum\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos\frac{nu\pi}{\omega_1}$$

$$\wp' u = -\frac{\pi^3}{4\omega_1^3}\frac{\cos\frac{u\pi}{2\omega_1}}{\sin^3\frac{u\pi}{2\omega_1}} + \frac{2\pi^3}{\omega_1^3}\sum\frac{n^2q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin\frac{nu\pi}{\omega_1},$$

die gleichmäßig konvergieren innerhalb eines Streifens der $u$-Ebene (vgl. Fricke[28]), S. 194).

$\wp u$, $\wp' u$ sind homogene Funktionen der drei Argumente $u$, $\omega_1$, $\omega_3$ mit der Dimension $-2$ bzw. $-3$, so daß

$$\wp(u \mid \omega_1, \omega_3) = \frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m}\,\middle|\,\frac{\omega_1}{m}, \frac{\omega_3}{m}\right)$$

oder

$$\wp(u; g_2, g_3) = \frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right).$$

Daraus folgt

$$\wp(iu; g_2, g_3) = -\wp(u; g_2, -g_3),\ i\wp'(iu; g_2, g_3) = -\wp'(u; g_2, -g_3),$$

d. h. bei reellen Invarianten und reellem $u$ ist $\wp(iu)$ reell und $\wp'(iu)$ rein imaginär. Die Eulersche Formel für homogene Funktionen liefert

$$u\frac{\partial\wp}{\partial u} + \omega_1\frac{\partial\wp}{\partial\omega_1} + \omega_3\frac{\partial\wp}{\partial\omega_3} = -2\wp.$$

Die $\wp$-Funktion bleibt ungeändert, wenn auf die drei Variabeln eine beliebige ternäre ganzzahlige Substitution der Determinante 1:

$$u_1 = u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,\quad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3,\quad \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3$$

ausgeübt wird. *Diese Eigenschaft der Invarianz kommt den Jacobischen Funktionen nicht zu.*

Als *elliptische Funktion $n^{ter}$ Stufe* wird von Klein eine eindeutige homogene Funktion der drei Argumente $u$, $\omega_1$, $\omega_3$ definiert, die 1. unverändert bleibt, wenn man auf ihre Argumente die Operation der ternären Hauptkongruenzgruppe $n^{ter}$

Stufe ausübt, welche alle zur Identität, d. h. zur Transformation $\omega_1' = \omega_1$, $\omega_3' = \omega_3 \mod n$ kongruenten Substitutionen

$$u' = u + 2m_1\omega_1 + 2m_3\omega_3, \quad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \quad \omega_3' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3$$
$$(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

umfaßt; 2. bei konstanten $\omega_1$, $\omega_3$ als Funktion von $u$ im Fundamentalperiodenparallelogramm keine wesentlich singuläre Stelle aufweist; 3. bei konstantem $u$ als Funktion von $\omega_1$ und $\omega_3$ den Charakter einer algebraischen Modulform $n^{ter}$ Stufe besitzt. In diesem Sinne sind $\wp(u|\omega_1, \omega_3)$, $\wp'(u|\omega_1, \omega_3)$ elliptische Funktionen 1. Stufe, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ sind solche 2. Stufe. Indem man die beiden Theorien von Jacobi und Weierstraß als Bestandteile einer allgemeineren Lehre von den elliptischen Funktionen verschiedener Stufe auffaßt, gelangt man zu einer tieferen Einsicht in das Verhältnis der beiden Theorien (vgl. Klein-Fricke, Modulfunktionen[12]) 2, 5, Fricke[33]), S. 277 und [34]), 1. Bd.).

In Wirklichkeit ist $\wp u$ nur von zwei Größen abhängig, dem *Argument* und der *absoluten Invariante*. Das Integral $\int \frac{ds}{\sqrt{S}}$ läßt sich durch $s = \frac{g_3}{g_2} t$ so transformieren, daß die Invarianten $g_2$ und $g_3$ einander gleich werden:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \sqrt{\frac{g_2}{g_3}} \int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - jt - j}},$$

wo $j = \frac{g_2^3}{g_3^2}$ als *absolute Invariante* der $\wp$-Funktion bezeichnet werden kann. Es ist

$$s = \wp(u;\, g_2,\, g_3), \quad t = \wp\left(u\sqrt{\frac{g_3}{g_2}};\, j,\, j\right).$$

Statt $j$ wird als absolute Invariante meistens eingeführt:

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2},$$

so daß

$$J : J - 1 : 1 = g_2^3 : 27g_3^2 : 16\,G.$$

Bei Weierstraß-Schwarz[7]) steht $j(\tau)$ und bei Weber[27]) $\frac{1}{27\cdot 24} j(\omega)$ statt $J$

Von dem *Additionstheorem* der $\wp$-Funktion heben wir nur die folgenden Formen heraus:

$$\wp(u \pm u_1) + \wp u + \wp u_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u \mp \wp' u_1}{\wp u - \wp u_1}\right)^2$$

$$\wp(u \pm u_1) - \wp u = -\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{\wp' u \mp \wp' u_1}{\wp u - \wp u_1}\right)$$

$$\wp(u \pm u_1) = \frac{2(\wp u \wp u_1 + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3(\wp u + \wp u_1)}{2(\wp u \wp u_1 - \frac{1}{4}g_2)(\wp u + \wp u_1) - g_3 \pm \wp' u \wp' u_1},$$

von denen die beiden ersten die Invarianten nicht explizite enthalten (vgl. Weierstraß-Schwarz,[7] S. 14). Eine einfache Herleitung ist von A. Pringsheim (*Münch. Ber.* **36**, 415, 1906) gegeben worden.

Eine elegante Form nimmt das Additionstheorem an, wenn $u + u_1 + u_2 = 0$ gesetzt wird:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp u & \wp u_1 & \wp u_2 \\ \wp' u & \wp' u_1 & \wp' u_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vgl. Weierstraß-Schwarz[7], S. 13, 14 und wegen weiterer Gestalten Fricke[33], S. 300, Caspary, *J de Math.* (4) **6**, 397, 1890.

Die *Periodizitätsformeln* der $\wp$-Funktion lassen sich zusammenfassen in die Formel:

$$\wp(u \pm \omega_\lambda) = e_\lambda + \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp u - e_\lambda}$$
$$(\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3,\ \lambda \neq \mu \neq \nu),$$

aus welcher durch Spezialisieren die Werte von $\wp$ und $\wp'$ für Argumente, die gleich Viertelperioden sind, folgen.

Weierstraß setzt noch

$$\frac{d \ln \sigma u}{du} = \zeta u, \text{ also } \wp u = -\zeta' u$$

Dann ist

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum_w{}'\left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right), \quad w = 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

und in der Umgebung von $u = 0$ besteht die Entwicklung:

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60} u^3 - \frac{g_3}{140} u^5 - \cdots.$$

Die Periodizitätsformeln lauten:

$$\zeta(u \pm 2\omega_i) = \zeta u \pm 2\eta_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

woraus

$$\zeta \omega_i = \eta_i.$$

Ferner ist

$$\zeta(u_1 \pm u_2) - \zeta u_1 \mp \zeta u_2 = \frac{1}{2} \frac{\wp' u_1 \mp \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2},$$

und diese Formel kann als — allerdings nicht algebraisches — Additionstheorem angesprochen werden. Die $\zeta$-Funktion wird im fundamentalen Periodenparallelogramm nur im Nullpunkt von der 1. Ordnung unstetig:

$$\lim_{u \to 0} \frac{1}{u^2}\left[\zeta u - \frac{1}{u}\right] = 0.$$

Die fundamentale Rolle, die die $\wp$-Funktion in der Weierstraßschen Theorie spielt, wird durch die folgenden Sätze weiter hervorgehoben:

Jede elliptische Funktion mit dem Periodenpaar $(2\omega_1, 2\omega_3)$ ist rational ausdrückbar durch die zu demselben Periodenpaar gehörende Funktion $\wp u$ und ihre Ableitung $\wp' u$ (vgl. Satz 8 in § 6):

$$f(u) = \frac{A_0 + A_1 \wp u + \cdots + A_r \wp^r u + \wp' u (B_0 + B_1 \wp u + \cdots + B_{r-2} \wp^{r-2} u)}{(\wp u - \wp \beta_1)(\wp u - \wp \beta_2) \cdots (\wp u - \wp \beta_r)}.$$

Umgekehrt sind diese Funktionen $\wp u$ und $\wp' u$ durch die Funktion $f(u)$ und deren Ableitung $f'(u)$ rational ausdrückbar, wenn $(2\omega_1, 2\omega_3)$ ein *primitives* Periodenpaar des Arguments der Funktion $f(u)$ ist.

Ist $f(u)$ eine *gerade* Funktion ihres Arguments, so ist sie eine rationale Funktion von $\wp u$ allein, die Koeffizienten $B_i$ verschwinden sämtlich; ist $f(u)$ dagegen eine *ungerade* Funktion, so ist $\frac{f(u)}{\wp' u}$ eine rationale Funktion von $\wp u$, die Koeffizienten $A_i$ verschwinden sämtlich. Ist einer der Pole $\beta_i \equiv 0$, so fehlt der entsprechende Faktor im Nenner.

Wenn die Funktion $f(u)$ nur für $u = 0$ und die kongruenten Werte unendlich groß wird, dann ist sie eine *ganze* Funktion von $\wp u$ und $\wp' u$.

Aus dem Verhalten von $f(u)$ an den Polen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ innerhalb eines Periodenparallelogramms folgt eine Darstellung durch die $\zeta$-Funktion und ihre Ableitungen, die der *Partialbruchzerlegung* der rationalen Funktionen entspricht:

Bezeichnet man mit

$$\sum_{i=1}^{r_1} \frac{B_{i1}}{(u-\beta_1)^i}, \sum_{i=1}^{r_2} \frac{B_{i2}}{(u-\beta_2)^i}, \ldots$$

die Summen aller Glieder mit negativem Exponenten, die in den für die Umgebung der Stellen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ geltenden Reihenentwicklungen von $f(u)$ enthalten sind, so ist

$$f(u) = C + B_{11}\,\zeta(u-\beta_1) + B_{12}\,\zeta(u-\beta_2) + \cdots - B_{21}\zeta'(u-\beta_1)$$

$$- B_{22}\,\zeta'(u-\beta_2) - \cdots + \frac{B_{31}}{2!}\zeta''(u-\beta_1) + \frac{B_{32}}{2!}\zeta''(u-\beta_2) + \cdots - \cdots$$

$$r_1 + r_2 + \cdots = r, \quad B_{11} + B_{12} + \cdots = 0.$$

## § 8. Die elliptischen Funktionen der Weierstraßschen Theorie.

Es ist $\wp u - \wp u_1$ als Funktion von $u$ doppeltperiodisch und wird $0^1$ in den Punkten $\pm u_1 + 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ und $\infty^2$ in den Punkten $2m\omega_1 + 2n\omega_3$. Sie läßt sich also als *Quotient von Sigmafunktionen* darstellen (vgl. S. 796) in folgender Form:

$$\wp u - \wp u_1 = -\frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 u_1}.$$

Setzt man hier $u_1 = \omega_\lambda$, $(\lambda = 1, 2, 3)$, so wird (vgl. S. 789)

$$\wp u - e_\lambda = \frac{\sigma_\lambda^2 u}{\sigma^2 u},$$

folglich:

$$\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u} = \sqrt{\wp u - e_\lambda} = f_\lambda(u). \qquad (\lambda = 1, 2, 3).$$

Es ist also die *Quadratwurzel* aus der einwertigen elliptischen Funktion $\wp u - e_\lambda$ eine *einwertige* Funktion von $u$. Über die

$n^{te}$ Wurzel aus einer ganzen Funktion von $\wp u$ und $\wp' u$, die eine einwertige Funktion der Variablen darstellt, vgl. Durège-Maurer[28], S. 182.

Die drei Funktionen $f_\lambda(u)$ lassen sich als die elliptischen Funktionen in der Weierstraßschen Theorie ansehen (vgl. Fricke[28], S. 224, 225).

Außer $\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}$ hat Weierstraß noch die Quotienten $\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}$ betrachtet (vgl. Weierstraß-Schwarz[7], S. 28, 29). Mit ihrer Hilfe ergeben sich *eindeutig* bestimmte Werte für die Quadratwurzeln aus den Differenzen der Größen $e_1, e_2, e_3$.

## § 9. Die rationale Transformation der Thetafunktionen.

Die rationale Transformation der Thetafunktionen betrifft die Aufgabe, die Thetafunktionen, deren Modul $\tau'$ und Argument $v'$ mit den gegebenen $\tau$ und $v$ durch die Beziehungen

$$\tau = \frac{c + d\tau'}{a + b\tau'} \quad \text{oder} \quad \tau' = \frac{c - a\tau}{b\tau - d} \quad \text{und} \quad v' = \frac{nv}{d - b\tau}$$

zusammenhängen, durch die Thetafunktionen mit dem gegebenen Modul $\tau$ und Argument $v$ auszudrücken. Dabei bedeuten $a, b, c, d$ ganze Zahlen, die der Einschränkung unterliegen, daß ihre Determinante $ad - bc = n$ eine positive ganze Zahl darstellt. $a, b, c, d$ heißen die *Transformationszahlen* und $n$ der *Transformationsgrad* Ist $n = 1$, heißt die Transformation linear, ist $n = 2$, heißt sie quadratisch. Allgemein spricht man von einer Transformation $n^{ten}$ Grades $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$, die die halben Perioden $\omega_1'$, $\omega_3'$ in $\omega_1, \omega_3$ überführt durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \quad d\omega_1 - b\omega_3 \\ \omega_3' &= -c\omega_1 + a\omega_3 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} n\omega_1 &= a\omega_1' + b\omega_3' \\ n\omega_3 &= c\omega_1' + d\omega_3'. \end{aligned}$$

Die unendlich vielen, zu einem bestimmten Transformationsgrade $n$ gehörigen Transformationszahlen, d. h. alle diejenigen $a, b, c, d$, die der Gleichung $ad - bc = n$ genügen, lassen sich in *Klassen* einteilen. Nämlich, eine beliebige Transformation $n^{ten}$ Grades kann ersetzt werden durch eine spezielle, zu der Determinante $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix}$ gehörende Transformation $n^{ten}$ Grades und eine Reihe linearer Transformationen spezieller Art. Wird ver-

abredet, daß alle diejenigen Systeme, die durch Anwendung sämtlicher linearen Transformationen aus einem gegebenen System von Transformationszahlen, das zum $n^{ten}$ Grade gehört, mit diesem zu einer Klasse gerechnet und einander äquivalent genannt werden, dann läßt sich zeigen, daß die Anzahl sämtlicher nicht äquivalenten Transformationsklassen vom Grade $n$ endlich, und zwar gleich der Summe der Divisoren von $n$ ist, 1 und $n$ mit eingerechnet. Ist $n$ eine Primzahl, so ist die Klassenanzahl gleich $n+1$.

Was nun die explizite Aufstellung der Transformationsgleichungen angeht, so kommt man, wie Hermite (*Ges. W.* **1**, 487—496, 1858) gezeigt hat, zu einfachen Beziehungen, wenn die Thetafunktion $n^{ter}$ Ordnung

$$\Pi_\lambda(v) = e^{\pi i (a+b\tau') b v^2} \vartheta_\lambda(v', \tau')$$

zugrundegelegt wird, die durch die ursprünglichen Thetas ganz und rational ausdrückbar ist Dabei tritt eine Reihe von Konstanten $c_\nu$ auf, und es handelt sich im wesentlichen um die Bestimmung dieser Konstanten, von denen man weiß, daß sie sich durch die $\vartheta_\alpha(\tau)$ und $\vartheta_\alpha(\tau')$ rational darstellen lassen (vgl. die Theorie der Modulfunktionen).

Die Darstellung für die Thetafunktionen ist bei Königsberger[5] **2**, 96 angegeben (vgl. auch M. Krause[17] **1**, 174—187).

In dem Sonderfall der *linearen Transformation* $(n=1)$ findet Hermite:

$$e^{i\pi b(a+b\tau')v^2}\theta_{\mu\nu}(v', \tau') = T\theta_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}(v, \tau)$$

fur

$$\mathfrak{m} = a\mu + b\nu + ab, \quad \mathfrak{n} = c\mu\, d\nu + cd, \qquad (\mu, \nu = 0, 1),$$

wo die Konstante

$$T = \frac{\delta\sigma}{\sqrt{-ib(a+b\tau)}}, \qquad \sigma = \sum_{\varrho=0}^{b-1} e^{-\frac{i\pi a}{b}\left(\varrho - \frac{1}{2}b\right)^2}$$

gesetzt ist. Dabei bedeutet $\delta$ die achte Einheitswurzel

$$\delta = e^{-\frac{1}{4}i\pi(ac\mu^2 + 2bc\mu\nu + bd\nu^2 + 2abc\mu + 2abd\nu + ab^2c)};$$

das Vorzeichen der Quadratwurzel ist so zu nehmen, daß der reelle Teil der Wurzel positiv ist. Aus der Reihe für $\sigma$ ergibt

sich nach **Hermite** (*Ges. W.* **1**, 482—496) weiter unter Benutzung des *Legendre*schen zahlentheoretischen Symbols $\left(\frac{q}{p}\right)$: Ist $b$ gerade und von der Form $2^{\alpha}\beta$, dann ist

$$\sigma = e^{\frac{i\pi}{8}[3(\alpha\beta+1)^2+(\beta-1)^2+2]}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\sqrt{b}, \text{ wenn } \alpha \text{ ungerade,}$$

$$\sigma = e^{\frac{i\pi}{8}[3(\alpha\beta+1)^2+(\beta-1)^2+\alpha^2-1]}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{b}, \text{ wenn } \alpha \text{ gerade;}$$

und ist $b$ ungerade, dann lassen sich zwei ganze Zahlen $m$, $n$ bestimmen durch die Gleichung $a = mb + 8n$, und es wird

$$\sigma = e^{-\frac{i m \pi}{4}}\left(\frac{n}{b}\right) i^{\left(\frac{b-1}{2}\right)^2}\sqrt{b}\,.$$

Hiernach kann man die Konstante $T$ auch in die Form bringen $T = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a+b\tau'}}$, wo $\varepsilon^8 = 1$.

Es wird auf diese Weise ersichtlich, weshalb **Jacobi** die Theorie der linearen Transformation auch die [illegible] *der unendlich vielen Formen der Thetafunktion* genannt [illegible] dem gegel[illegible] Übrigens genügt es, bei den Anwendungen de[illegible] euten $a$, $b$, [illegible] $T^2$ zu kennen (vgl. **Enneper**, Gött. Nachr. 1883 und [illegible] e[17]) , daß ihre [illegible] **1**, 109—111). Zahl darst[illegible]

Die einfachsten *linearen* Transformationen, aus denen sich alle anderen zusammensetzen lassen, sind die *Fundamentaltransformationen:* $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, durch welche der Modul $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ in $\tau + 1$ bzw. in $-\frac{1}{\tau}$ übergeführt wird. Die Anwendung derselben linearen Transformationen auf die **Jacobi**schen Funktionen und ihre Wiederholung liefert unter anderen:

$$\operatorname{sn}\left(ku', \frac{1}{k}\right) = k \operatorname{sn} u', \qquad \operatorname{cn}\left(ku', \frac{1}{k}\right) = \operatorname{dn} u', \quad \operatorname{dn}\left(ku', \frac{1}{k}\right) = \operatorname{cn} u'.$$

Diese drei Formeln sind die *Homogeneitatsformeln* der **Jacobi**schen Funktionen. Sie lassen erkennen, daß die **Jacobi**schen Funktionen bei der linearen Transformation nicht ungeändert bleiben, im Gegensatz zur **Weierstraß**schen Theorie, wo die $\sigma$-, $\zeta$-, $\wp$-Funktionen zugleich mit den Invarianten $g_2$, $g_3$ ungeändert bleiben, ebenso wie die Gesamtheit der Funktionen $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ und der Größen $e_1$, $e_2$, $e_3$.

Die Indizes der drei geraden Sigmas und der $e_1, e_2, e_3$ können sich vertauschen (vgl. Weierstraß-Schwarz[7] 39). Die Moduln 2. Gattung $2\eta_1, 2\eta_3$ werden bei der linearen Substitution durch dieselben Formeln transformiert wie $2\omega_1, 2\omega_3$. Vgl. die Darstellung bei Krazer[26], 183.

Was die *quadratische Transformation der Thetas und der elliptischen Funktionen* angeht, so fließen aus der Definition der Jacobischen Thetas unmittelbar die zugehörigen Grundformeln:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(v, q)\,\vartheta_0(v_1, q) &= \vartheta_3(v+v_1, q^2)\,\vartheta_3(v-v_1, q^2) \\
&\quad - \vartheta_2(v+v_1, q^2)\,\vartheta_2(v-v_1, q^2) \\
\vartheta_1(v, q)\,\vartheta_1(v_1, q) &= \vartheta_3(v+v_1, q^2)\,\vartheta_2(v-v_1, q^2) \\
&\quad - \vartheta_2(v+v_1, q^2)\,\vartheta_3(v-v_1, q^2) \\
\vartheta_2(v, q)\,\vartheta_2(v_1, q) &= \vartheta_3(v+v_1, q^2)\,\vartheta_2(v-v_1, q^2) \\
&\quad + \vartheta_2(v+v_1, q^2)\,\vartheta_3(v-v_1, q^2) \\
\vartheta_3(v, q)\,\vartheta_3(v_1, q) &= \vartheta_3(v+v_1, q^2)\,\vartheta_3(v-v_1, q^2) \\
&\quad + \vartheta_2(v+v_1, q^2)\,\vartheta_2(v-v_1, q^2).
\end{aligned}$$

Die Anwendung dieser Formeln führt F. Caspary (*Journ. de Math.* (4) **6**, 367, 1890) unter Benutzung der Eulerschen Darstellung der Koeffizienten eines orthogonalen Neunersystems zu einem einfachen Orthogonalsystem für die Thetas bzw. Sigmas. Es ist dies gerade dasjenige Orthogonalsystem das die Lösung für das Problem der Rotation eines schweren Körpers um seinen Schwerpunkt liefert (vgl. auch H. Weber[27], S. 167).

Unter Benutzung der Verwandlungsformeln für die Thetas erhält man aus den obigen Grundformeln a) für $v_1 = v$:

$$\vartheta_0(2v, q^2) = \frac{1}{\sqrt{c_0 c_3}}\vartheta_0(v, q)\,\vartheta_3(v, q) = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{k'}}}\,\vartheta_0(v,q)\,\vartheta_3(v,q);$$

b) für $v_1 = 0$, wenn $q^2$ durch $q$, und $q$ durch $\sqrt{q}$ ersetzt wird:

$$\vartheta_0(v, \sqrt{q}) = \frac{\vartheta_0^2(v,q) + \vartheta_1^2(v,q)}{\sqrt{c_3^2 + c_0^2}} = \sqrt{\frac{\pi(1-k)}{2K}} \cdot \frac{\vartheta_0^2(v,q) + \vartheta_1^2(v,q)}{k'}$$

und die analogen für $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$.

Die entsprechenden Formeln für die Sinus-Amplitude lauten:

$$\text{a)}\quad \operatorname{sn}\left[(1+k')u',\ \frac{1-k'}{1+k'}\right] = (1+k')\frac{\operatorname{sn}(u',k)\operatorname{cn}(u',k)}{\operatorname{dn}(u',k)}$$

(*Landensche Transformation*);

$$\text{b)}\quad \operatorname{sn}\left[(1+k)u',\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{(1+k)\operatorname{sn}(u',k)}{1+k\operatorname{sn}^2(u',k)}$$

(*Gaußsche Transformation*).

Den beiden auf die $q$ ausgeübten Substitutionen entsprechen solche für $\omega_1$, $\omega_3$, nämlich

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{d. h.}\ \begin{matrix}\omega_1 = 2\,\omega_1'\\ \omega_3 = \omega_3'\end{matrix};\qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ \text{d. h.}\ \begin{matrix}\omega_1 = \omega_1'\\ \omega_3 = 2\,\omega_3'\end{matrix}.$$

Die entsprechenden Transformationsformeln für die $\wp$-Funktion lauten:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned}\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{2},\ \omega_3\right) &= \frac{\wp^2 u - e_1\wp u + (e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp u - e_1}\\ &= -2e_1 + \frac{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}{\wp u - e_1}\end{aligned}$$

(*Landensche Transformation*);

$$\text{b)}\quad \begin{aligned}\wp\left(u \,\middle|\, \omega_1,\ \frac{\omega_3}{2}\right) &= \frac{\wp^2 u - e_3\wp u + (e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp u - e_3}\\ &= -2e_3 + \frac{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)}{\wp u - e_3}\end{aligned}$$

(*Gaußsche Transformation*);

sie sind, im Gegensatz zu den entsprechenden Formeln für $\operatorname{sn} u'$, *sämtlich* rational.

Dabei transformieren sich die transzendenten Moduln 2. Gattung nach den Formeln:

$$\text{a)}\ \eta_1' = \tfrac{1}{2}e_1\omega_1 + \eta_1,\qquad \eta_3' = e_1\omega_3 + 2\eta_3$$

$$\text{b)}\ \eta_1' = e_3\omega_1 + 2\eta_1,\qquad \eta_3' = \tfrac{1}{2}e_3\omega_3 + \eta_3$$

und die irrationalen Invarianten:

a) $e_1' = e_1 + 2\sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}, \quad e_2' = e_1 - 2\sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3},$
$$e_3' = -2e_1$$

b) $e_1' = -2e_3, \quad e_2' = e_3 + 2\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3},$
$$e_3' = e_3 - 2\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}.$$

Wegen der Formeln für die Transformationen 3. und 5. Ordnung vgl. M. Krause[17] **1**, 178, 181.

*Eine Transformation 4. Ordnung.* Aus der Definition der Thetafunktionen folgt

$$\vartheta_3(v, q) = \vartheta_3(2v, q^4) + \vartheta_2(2v, q^4)$$
$$\vartheta_0(v, q) = \vartheta_3(2v, q^4) - \vartheta_2(2v, q^4)$$

und hieraus, wenn $\frac{\vartheta_2^2(0, 4\tau)}{\vartheta_3^2(0, 4\tau)} = k_1$ gesetzt wird:

$$\sqrt{k_1} = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{2q + 2q^9 + 2q^{25} + \cdots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \cdots}, \quad \sqrt{k'} = \frac{1 - \sqrt{k_1}}{1 + \sqrt{k_1}},$$

d. h. zwischen $\sqrt{k_1}$ und $4\tau$ besteht dieselbe Gleichung wie zwischen $\sqrt{k}$ und $\tau$. Hierauf beruht die Weierstraßsche Theorie der Reihe:

$$q = e^{-\pi\frac{K}{K'}} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} + \frac{2}{2^5}\left(\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}\right)^5 + \frac{15}{2^9}\left(\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}\right)^9 + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\beta + \frac{1}{16}\,\mathrm{tg}^{10}\beta + \frac{15}{512}\,\mathrm{tg}^{18}\beta + \cdots,$$

wenn $\sqrt{k'} = \sqrt{\cos\alpha} = \cos 2\beta$ gesetzt wird.

## § 10. Die elliptischen Integrale.

Unter einem elliptischen Integral versteht man ein Integral von der Form $\int R(x, \sqrt{X_4})\,dx$, wo $X_4$ ein allgemeines Polynom 4 Grades in $x$ und $R$ eine rationale Funktion ihrer beiden Argumente bedeutet Nach Legendre kann man dem elliptischen Integral nach Abspaltung eines rationalen Integranden immer die Gestalt geben:

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{X_4}}\,dx.$$

Mit Hilfe einer linearen Substitution der Variabeln, $x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$, läßt sich ein solches Integral in der Form

$$\int \frac{R(y)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

ausdrücken. Und dieses kann stets aus Integralen von drei verschiedenen Typen und algebraischen Funktionen linear zusammengesetzt werden. Vgl. Legendre, *Traité des fonctions elliptiques etc.* Paris 1825—1828. Nach Weierstraß läßt sich jedes beliebige elliptische Integral mit Hilfe einer eindeutig-umkehrbaren, z. B. rationalen Substitution auf die Form bringen:

$$\int R\left(s, \sqrt{S}\right) \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad S = 4s^3 - g_2 s - g_3.$$

Und dieser Satz ist umkehrbar.

Nach Legendre haben die drei Fundamentaltypen der elliptischen Integrale folgende kanonischen Formen:

1. Gattung: $$F(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

2. Gattung: $$E(x, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Gattung: $$\Pi(x, n, k) = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

oder wenn $x = \sin\varphi$ gesetzt wird:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}.$$

Dabei heißen $k = \sin\alpha$ der *Modul*, $\varphi = \operatorname{am} F$ die *Amplitude* und $n$ der Parameter des elliptischen Integrals. Legendre setzt noch den Parameter $n$ als reell voraus. Damit das auf reellem Wege genommene Integral 3. Gattung einen Sinn habe, darf $n$ nicht zwischen 1 und $\infty$ liegen. Das 2. Integral wird mit $E$ bezeich-

net, weil sich mit seiner Hilfe der Ellipsenbogen ausdrücken läßt. Die elliptischen Integrale 1. Gattung nehmen die Werte an von 0 bis $\infty$, wenn $\varphi$ und $\alpha$ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wandern, die Integrale 2. Gattung nur von 0 bis $\frac{1}{2}\pi = 1{,}571\ldots$

Vollständige elliptische Integrale 1. Gattung sind

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}.$$

Ähnlich heißen

$$E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$E' = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k'^2x^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

vollständige elliptische Integrale 2 Gattung. Dabei sind von dem Gebiete $k^2$ alle reellen Werte von $-\infty$ bis 0 und von $+1$ bis $+\infty$ (einschl. 0 und $+1$) auszuschließen und jeder Quadratwurzel der Wert beizulegen, dessen reeller Teil positiv ist.

Zwischen diesen vollständigen Integralen besteht die schon von Legendre aufgefundene und nach ihm benannte Relation

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Wegen ihres Beweises vgl Kummer, *Journ. f Math* **15**, 149, wegen der Literatur hierzu vgl. Krause[17], **1**, 321.

Das Integral 3 Gattung wird von Jacobi, etwas abweichend von Legendre, so definiert:

$$\Pi(u', \alpha) = \int_0^{u'} \frac{k^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{sn}^2 u\,du}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 u} = u'\frac{\Theta'\alpha}{\Theta\alpha} + \frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u'-\alpha)}{\Theta(u'+\alpha)},$$

und hier kann $\alpha$ auch imaginäre Werte annehmen. Alsdann heißt das Integral 3. Gattung nach Legendre *zirkular*, im andern Falle *logarithmisch* oder *hyperbolisch*. Es ist bemerkenswert, daß gerade die zirkulare Form von $\Pi$ in den Problemen der Dynamik eine Rolle spielt. Geben wir dem Legendreschen $\Pi$ für den Augenblick einen Index $L$, so besteht der Zusammenhang

$$\Pi_L(-k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha, k, \operatorname{sn} u') = u' + \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha} \Pi(u', \alpha).$$

Als Riemannsches Normalintegral 1. Gattung bezeichnet man

$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}},$$

das durch die quadratische Transformation $z = y^2$ in die Legendresche Normalform $\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda y^2)}}$ übergeht. Es ist diejenige Normalform, die der Auffassungsweise der neueren synthetischen Geometrie am nächsten steht, insofern der Modul $\lambda$ das Doppelverhältnis der vier Verschwindungspunkte des Nenners darstellt. In diesem Zusammenhange ist zu erwähnen, daß Klein $k = \mu^2$ setzt, wo $\mu$ die Oktaederirrationalität bezeichnet (vgl. Klein-Fricke[12]) 1, 23). Als Riemannsche Integrale 2. und 3 Gattung gelten die Formen

$$\frac{1}{2}\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}} = \int \operatorname{sn}^2 u'\, du', \quad \int \frac{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha\, du'}{\operatorname{sn}^2 u' - \operatorname{sn}^2 \alpha}.$$

Vgl. Riemann-Stahl[22]).

In der *Weierstraßschen Theorie* lauten die drei Typen, wenn $\wp u = s$ und $S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)$ gesetzt wird:

*1. Gattung:* $$u = \int_{\infty}^{(s,\sqrt{S})} -\frac{ds}{\sqrt{S}} = J(s, \sqrt{S}),$$

wo die Integration von dem Wertepaar $(s, \sqrt{S})$ ausgehend längs irgendeines Weges bis $s = \infty$ erstreckt wird. Im Falle reeller Größen $e_\nu$ darf die Integrationsvariable immer $> e_1$ vorausgesetzt werden. In der Umgebung des unendlich fernen Punktes gilt die Entwicklung

$$u = \frac{1}{\sqrt{S}}\left(1 + \frac{g_2}{40}\frac{1}{s^2} - \frac{g_3}{56}\frac{1}{s^3} - \cdots\right).$$

*2. Gattung:*
$$J'(s, \sqrt{S}) = \int^{(s,\sqrt{S})} \frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u,$$

wo die Integrationskonstante durch die Festsetzung bestimmt wird, daß die für hinlänglich große Werte des absoluten Betrages von $s$ geltende Entwicklung eines Zweiges dieser Integralfunktion die Gestalt annimmt:

$$\sqrt{S}\left(1 - \frac{g_2}{24}\frac{1}{s^2} - \frac{g_3}{40}\frac{1}{s^3} + \cdots\right).$$

*3. Gattung:*

$$J(s, \sqrt{S};\ s_0, \sqrt{S_0}) = \int \frac{1}{2}\frac{\sqrt{S} + \sqrt{S_0}}{s - s_0}\frac{ds}{\sqrt{S}} = \ln\frac{\sigma(u - u_0)}{\sigma u\,\sigma u_0} + u\frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0},$$

wo $u_0$ eine willkürliche Konstante, den *Parameter* des elliptischen Integrals 3. Gattung bedeutet, so daß $s_0 = \wp u_0$, $S_0 = 4s_0^3 - g_2 s_0 - g_3$, und $u_0$ weder den Wert Null, noch einen zu Null kongruenten Wert annehmen darf. Dabei erhält das konstante Glied in der für die Umgebung von $u = 0$ geltenden, nach Potenzen von $u$ fortschreitenden Entwicklung

$$\int \frac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\,du = -\ln u + C - \frac{1}{2}\wp u_0 \cdot u^2 + \frac{1}{6}\wp' u_0 \cdot u^3 + \cdots$$

ebenfalls den Wert Null.

Das elliptische Integral 2. Gattung ist also zugleich als logarithmische Ableitung der Sigmafunktion darstellbar, deren Argument das entsprechende Integral 1. Gattung ist Das elliptische Integral 3. Gattung ist durch Logarithmen von Sigmafunktionen darstellbar, deren Argument wieder das entsprechende Integral 1 Gattung ist, und durch dieses Integral selbst. Auch überzeugt man sich, daß die nach $u$ genommene Ableitung des Integrals 3. Gattung sich mittels elliptischer Integrale 1 und 2. Gattung ausdrückt. Die hierdurch angedeuteten Beziehungen zwischen den drei Normalformen sind von Jacobi entdeckt worden.

Ein Integral 1. Gattung wird für keinen (reellen oder komplexen) Wert der Integrationsgrenzen unendlich groß; ein Inte-

gral 2. Gattung wird nur algebraisch unendlich groß, z. B. $J'(s, \sqrt{S})$ für $s = \infty$ wie $\sqrt{S}$. Endlich ein Integral 3. Gattung wird nur logarithmisch unendlich groß.

Jedes elliptische Integral läßt sich darstellen in der Form:

$$\int \frac{R(s, -\sqrt{S})}{\sqrt{S}} \, ds = C \int - \frac{ds}{\sqrt{S}} + C' \int \frac{s\, ds}{\sqrt{S}}$$
$$+ \sum_{r=1}^{m} C_r \int \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S} + \sqrt{S_r}}{s - s_r} \frac{ds}{\sqrt{S}} + R_1(s, -\sqrt{S}),$$

d. h. als Summe *eines* elliptischen Integrals 1., *eines* elliptischen Integrals 2. und von $m$ elliptischen Integralen 3. Gattung und einer rationalen Funktion von $s$ und $-\sqrt{S}$. Die Zahl $m$ gibt die Anzahl der Stellen, wo der Integrand des Integrals 3. Gattung unendlich groß wird.

Die Form $\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$, die den Vorzug hat, daß sie die Invarianten in Evidenz setzt, muß insofern als Weierstraßsche Normalform des Integrals 1. Gattung bezeichnet werden, als Weierstraß der erste gewesen ist, der von dieser Integralform ausgehend die Theorie der elliptischen Funktionen konsequent entwickelt hat. Das schließt nicht aus, daß die nämliche Integralform bereits früher von anderen bemerkt worden ist, so von Eisenstein, *Journ. f. Math.* **35**, 137—276, 1847 oder *Math. Abh.* Berlin 1847, S. 213, dann von Hermite, *Journ. f. Math.* **52**, 1—38, 1856 (Vgl. Fricke[33], S. 253.)

Zwischen den Integralen 1. und 3. Gattung besteht die Beziehung

$$\Pi(u', \alpha) - \Pi(\alpha, u') = u' \frac{\Theta' \alpha}{\Theta \alpha} - \alpha \frac{\Theta' u'}{\Theta u'},$$

welche das Legendresche Theorem von der Vertauschbarkeit zwischen Parameter und Argument beim elliptischen Integral 3. Gattung zum Ausdruck bringt.

In der Weierstraßschen Theorie ergibt sich dieser Satz einfach durch Vertauschung von $u$ und $u_0$ in der Definitionsgleichung des elliptischen Integrals 3. Gattung:

$$J(s, \sqrt{S};\ s_0, \sqrt{S_0}) - J(s_0, \sqrt{S_0};\ s, \sqrt{S}) = \frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0} u - \frac{\sigma' u}{\sigma u} u_0 + (2n+1)\pi i,$$

wo $n$ eine ganze Zahl bedeutet.

Elliptische Integrale 3. Gattung lassen sich, wenn der Parameter der aliquote Teil einer Periode ist, durch elementare Funktionen ausdrücken.

Über das Verhältnis der verschiedenen Normalformen zueinander, insbesondere die Frage, weshalb gerade die Riemannsche, Legendresche, Jacobische, Weierstraßsche Normalform auftreten, vgl. Klein-Fricke.[12])

## § 11. Periodizität und Additionstheoreme der elliptischen Integrale.

Den beiden Fundamentaleigenschaften der elliptischen Funktionen entsprechen ähnliche Eigenschaften der elliptischen Integrale, die wir in der Weierstraßschen Form voraussetzen wollen.

Das Integral 1. Gattung ist unendlich vielwertig; alle Werte für ein bestimmtes $s$ können aus einem abgeleitet werden durch Hinzufügen eines Vielfachen von $(2\omega_1, 2\omega_3)$; dabei werden $(2\omega_1, 2\omega_3)$ *primitive Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals 1. Gattung* genannt. In demselben Sinne heißen $(2\eta_1, 2\eta_3)$ *primitive Periodizitutsmoduln des elliptischen Integrals 2. Gattung,* wobei

$$\eta_1 = \frac{\sigma' \omega_1}{\sigma \omega_1}, \quad \eta_3 = \frac{\sigma' \omega_3}{\sigma \omega_3}.$$

Und endlich, das elliptische Integral 3. Gattung hat die drei Periodizitätsmoduln:

$$2\omega_1 \frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0} - 2\eta_1 u_0, \qquad 2\omega_3 \frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0} - 2\eta_3 u_0, \qquad 2\pi i.$$

Ist die Determinante $G$ der Form $S$ positiv, dann sind bei reellen $g_2$ und $g_3$ die $e_1, e_2, e_3$ reell, und die Werte von $\omega_1$, $\omega_3$ bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad \frac{\omega_3}{i} = \int_{-e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

so daß $\omega_1$ und $\frac{\omega_3}{i}$ reelle, positive Größen sind.

Ist die Determinante $G$ negativ, dann ist $e_1$ reell, $e_2$ und $e_3$ sind konjugiert komplex. Dann wird

$$\omega_2 = \frac{\omega_1' - \omega_1}{2}, \quad \omega_3 = -\frac{\omega_1' + \omega_1}{2},$$

wo

$$\omega_1 = \int_{+\infty}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad \omega_1' = \int_{+\infty}^{-e_2} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Über die Erklärung der Vieldeutigkeit der elliptischen Integrale vgl. Gundelfinger, *Bibl. math.* **9**, 211, 1909 und Krazer, *Bibl. math.* **10**, 250, 1910.

*Die Additionstheoreme der elliptischen Integrale.* Die Summe zweier elliptischen Integrale 1. Gattung läßt sich wieder als *ein* elliptisches Integral 1. Gattung darstellen, dessen obere Grenze eine algebraische Funktion der oberen Grenzen jener beiden Integrale ist, und zwar dieselbe Funktion wie $\wp(u_1 + u_2)$ von $\wp u_1$ und $\wp u_2$:

$$J(s_1, \sqrt{S_1}) + J(s_2, \sqrt{S_2}) = J(s, \sqrt{S}).$$

Ebenso gilt:

$$J'(s_1, \sqrt{S_1}) + J'(s_2, \sqrt{S_2}) = J'(s, \sqrt{S}) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}{s_1 - s_2},$$

d. h. die Summe zweier elliptischen Integrale 2 Gattung läßt sich als die Summe *eines* einzigen Integrals 2. Gattung und einer algebraischen Funktion von $s_1$ und $s_2$ darstellen. Die obere Grenze des Integrals rechter Hand ist genau dieselbe Funktion von den oberen Grenzen der Integrale linker Hand wie beim Additionstheorem der elliptischen Integrale 1. Gattung.

Und endlich:

$$J(s_1, \sqrt{S_1};\ s_0, \sqrt{S_0}) + J(s_2, \sqrt{S_2};\ s_0, \sqrt{S_0}) = J(s, \sqrt{S};\ s_0 \sqrt{S_0})$$
$$- \ln\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s_1 - s_2}\left(\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_0}}{s_0 - s_1} - \frac{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_0}}{s_0 - s_2}\right)\right],$$

d. h. die Summe zweier elliptischen Integrale 3. Gattung ist darstellbar als die Summe *eines* elliptischen Integrales 3. Gattung und des Logarithmus einer algebraischen Funktion von $s_0$. Die

obere Grenze des Integrals rechter Hand setzt sich aus den oberen Grenzen der einzelnen Integrale zusammen wie beim Additionstheorem der Integrale 1. Gattung (vgl. Weierstraß-Schwarz[7] S. 89).

Bei den Abelschen Integralen treten rechter Hand $\varrho$ Integrale derselben Gattung auf. Diese Anzahl nennt man das *Geschlecht*, die elliptischen Integrale sind vom *Geschlecht* Eins (Clebsch); andere Benennungen sind: *Rang* (Riemann), *Klasse* (Weierstraß), *Defekt* (Cayley). Und diese Additionstheoreme sind als spezielle Fälle enthalten in dem berühmten „Abelschen Theorem".

Das Additionstheorem des elliptischen Integrals 1. Gattung rührt von Euler her (*Novi Comm. Petrop.* 1761, 6, 7). Historische Angaben bei Genocchi, *Bolletino di Boncompagni* **3**, 1870, und Enneper-Müller.[10] Wegen einer eleganten Herleitung C. Sturms vgl. Liouville, *Compt. Rend.* 1856, S. 988, und Safford, *Bull. Ann. Math. Soc.* **17**, 9, 1910.

Die Additionstheoreme der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung hat Legendre aufgestellt.

Das Additionstheorem für die Integrale 1. Gattung lautet bei Legendre:

$$F(k, x) + F(k, y) = F(k, z),$$

wo

$$z = \frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2} + y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2y^2}.$$

Bei Jacobi haben die Additionstheoreme 2. und 3. Gattung die Form:

$$E(u') + E(u_1') - E(u' + u_1') = k^2 \operatorname{sn} u' \operatorname{sn} u_1' \operatorname{sn}(u' + u_1')$$

$$\Pi(u', \alpha) + \Pi(u_1', \alpha) - \Pi(u' + u_1', \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(u'-\alpha)\,\Theta(u_1'-\alpha)\,\Theta(u'+u_1'+\alpha)}{\Theta(u'+\alpha)\,\Theta(u_1'+\alpha)\,\Theta(u'+u_1'-\alpha)}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - k^2 \operatorname{sn} u' \operatorname{sn} u_1' \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}(u'+u_1'-\alpha)}{1 + k^2 \operatorname{sn} u' \operatorname{sn} u_1' \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}(u'+u_1'+\alpha)}$$

(vgl. auch Glaisher, *Mess. of Math.* **10**).

## § 12. Reihenentwicklungen für die vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung.

Die schon von Euler gegebenen Entwicklungen, die nichts anderes als spezielle Fälle der hypergeometrischen Reihe sind, lauten:

$$\frac{2}{\pi} K = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots$$

$$\frac{2}{\pi} E = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots.$$

Diese Reihen konvergieren nur schwach. Für kleine Werte des Moduls rechnet man besser mit den Formeln:

$$K = \frac{\pi(1+k_1)}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1{}^2 + \left(\frac{1\quad 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1{}^4 + \cdots\right\}$$

$$E = \frac{\pi}{2(1+k_1)}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1{}^2 + \left(\frac{1}{2\quad 4}\right)^2 k_1{}^4 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k_1{}^6 + \cdots\right\},$$

wo

$$k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{1-k'}{1+k'} \quad \text{oder} \quad k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$$

gesetzt ist, während für große, d. h. der Einheit nahe kommende Werte des Moduls die folgenden Formeln für die numerische Rechnung geeignet sind:

$$\begin{aligned} K = \ln\left(\frac{4}{k'}\right) &+ \left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\ln\left(\frac{4}{k'}\right) - 1\right] k'^2 \\ &+ \left(\frac{1\quad 3}{2\cdot 4}\right)^2\left[\ln\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3\quad 4}\right] k'^4 \\ &+ \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\left[\ln\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3\quad 4} - \frac{2}{5\cdot 6}\right] k'^6 + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = 1 + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{4}{k'}\right) - \frac{1}{1\cdot 2}\right] k'^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4}\left[\ln\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{1}{3\quad 4}\right] k'^4 \\ + \left(\frac{1\quad 3}{2\quad 4}\right)^2 \frac{5}{6}\left[\ln\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{1}{5\cdot 6}\right] k'^6 + \cdots \end{aligned}$$

Diese Formeln rühren von Legendre her (*Mém. de l'Ac* 1780, p. 630 und [1]) **1**, S. 65; vgl. noch Schlömilch, *Zeitschr. Math. Phys.* **2**, 49) und werden aus den Differentialgleichungen ge

wonnen, denen die vollständigen Integrale genügen (vgl. § 15). Bei Vertauschung von $k$ und $k'$ gehen die Formeln für $K$ und $E$ in solche für $K'$, $E'$ über (vgl. M. Krause[32], S. 91). Über weitere Reihen- und Produktentwicklungen vgl. Schellbach[2], S. 58 und S. 66, sowie Tannery-Molk[16] 2, 1896.

## § 13. Reduktion der elliptischen Integrale auf die Normalform.

*Lineare Reduktion des Integrals 1. Gattung auf die Legendresche Normalform*: Schon Abel hat wiederholt hervorgehoben, daß man diese Reduktion durch lineare Transformation erreichen kann, und daß dabei die verschiedenen Werte der Konstanten sehr einfach linear miteinander zusammenhängen. Die bezüglichen Formeln sind von Legendre, Jacobi, Gudermann, Richelot u. a. entwickelt worden.

Nach den Weierstraßschen Vorlesungen erreicht man die Reduktion wie folgt: Wird

$$R(y) = A(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)$$

gesetzt, dann gelingt die Überführung

$$\frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \frac{1}{m}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

durch den Ansatz

$$y = \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(c-b)\frac{x-n}{1-nx},$$

$$2m = \sqrt{A(c-a)(d-b)} + \sqrt{A(b-a)(d-c)}$$

$$n = \frac{\sqrt{(c-a)(d-c)} - \sqrt{(b-a)(d-b)}}{\sqrt{(c-a)(d-c)} + \sqrt{(b-a)(d-b)}}$$

$$k = \frac{\sqrt{(c-a)(d-b)} - \sqrt{(b-a)(d-c)}}{\sqrt{(c-a)(d-b)} + \sqrt{(b-a)(d-c)}},$$

wo jeder Wurzelgröße ein beliebiges, aber uberall dasselbe Vorzeichen zukommt. Wegen der Realitätsverhältnisse vgl. Schellbach[2] 262—268; Appell-Lacour[20], S. 240—246.

*Lineare Reduktion des Integrals 1. Gattung auf die Riemannsche Normalform.* Die lineare Substitution

$$z = \frac{c-a}{c-b}\,\frac{y-b}{y-a} \quad \text{oder} \quad y = \frac{b(c-a) - a(c-b)z}{c-a-(c-b)z}$$

macht

$$\int_b^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \frac{1}{\sqrt{(c-a)(d-b)}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{Az(1-z)(1-\lambda z)}}.$$

Dabei ist

$$\lambda = \frac{(c-b)(a-d)}{(c-a)(b-d)} = \frac{c-b}{c-a} : \frac{d-b}{d-a}$$

und stellt das Doppelverhältnis der vier Punkte $a$, $b$, $c$, $d$ dar. Den sechs Permutationen von $a$, $b$, $c$, $d$ entsprechend, kann $\lambda$ die sechs Werte

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, \; 1-\lambda, \; \frac{1}{1-\lambda}, \; \frac{\lambda}{\lambda-1}, \; \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

annehmen. Wird $\lambda = -1$, dann liegen die vier Punkte $a$, $b$, $c$, $d$ *harmonisch*; wird $\lambda = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, dann liegen sie *äquianharmonisch*. Vgl. Burkhardt[35], 207.

*Lineare Reduktion des Integrals 1. Gattung auf die Weierstraßsche Normalform.* Auch hier ergibt sich im allgemeinen eine *lineare* Transformationsformel Vgl. Hermite, *Journ. f. Math.* 52, 8; Caspary, *Journ. de Math.* (4) 5, 73—79, 1889; Tannery-Molk[16], 4, 63; Burkhardt[35], 175, 206; Appell-Lacour[20], 247—268.

Hier entspricht $g_3 = 0$ dem *harmonischen*, $g_2 = 0$ dem *äquianharmonischen* Fall der $\wp$-Funktion.

Alle diese Transformationen des elliptischen Integrals in die Normalform sind auf 24 verschiedene Arten möglich, und die 24 linearen Substitutionen, die man so erhält, bilden eine Gruppe, die sog. Oktaedergruppe.

*Reduktion der Riemannschen Form auf die Weierstraßsche Form.* Der einen Weierstraßschen Form stehen sechs gleichberechtigte Riemannsche Formen gegenüber, in welche sie durch vier verschiedene lineare Substitutionen übergeführt werden kann. Vgl. die Darstellung in Durège-Maurer[28], S. 32, insbesondere über die der Weierstraßschen Normalform entsprechende Riemannsche Fläche, S. 68.

*Nichtlineare Reduktion des Integrals 1. Gattung auf die Weierstraßsche Form.* Bisher ist die Wurzelgröße $R(y)$ als

in lineare Faktoren zerlegt vorausgesetzt worden. Man kann aber auch ohne eine solche Zerlegung durch eine rationale, allerdings nicht mehr lineare Substitution ein elliptisches Integral auf die Normalform transformieren (Hermite, *Journ. f. Math.* **52**, 7—8, 1856). Vgl. die Darstellung bei H. Weber[27], S. 11.

In seinen Vorlesungen pflegte Weierstraß eine Reduktionsformel abzuleiten, die sich als *algebraische* Funktion der Koeffizienten von $R(x, y)$ darstellt:

$$x = x_0 + \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{S} + \frac{1}{2} R'(x_0)[s - \frac{1}{24} R''(x_0)] + \frac{1}{24} R(x_0) R'''(x_0)}{2[s - \frac{1}{24} R''(x_0)]^2 - \frac{1}{48} R(x_0) R^{IV}(x_0)}$$

$$s = \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + R(x_0) + \frac{1}{2} R'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{12} R''(x_0)(x - x_0)^2}{2(x - x_0)^2}$$

vgl. dazu E. Haentzschel, *Arch. d. Math. Phys.* (3) **1**, 118 (1901).

Von Hermite rührt ein elegantes, mit der Theorie der biquadratischen Formen zusammenhängendes Verfahren her, ein $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$, mit $X$ als Polynom 4. Grades, in ein anderes derselben Form überzuführen mittels einer Transformation 3. Grades (*Journ. f. Math.* **60**, 304). Der Zusammenhang der binären biquadratischen Formen mit den elliptischen Funktionen ist noch von Klein (*Math. Ann.* **32**, 351, 1888) und von Study (*Amer. Journ* **17**, 216, 1895) untersucht und in gewissem Sinne zum Abschluß gebracht worden.

Über die Reduktion der allgemeinen elliptischen Integrale auf die Legendreschen bzw. Weierstraßschen Normalintegrale vgl Tannery-Molk[16], 4, Schlömilch[18], 2, 289—302, und M. Krause[32], Nr. 56, 57.

## § 14. Differentialgleichungen und -relationen für $K$ und $E$.

Die vollständigen Integrale $K$ und $K'$ genügen der linearen Differentialgleichung 2 Ordnung:

$$k(1 - k^2)\frac{d^2y}{dk^2} - (3k^2 - 1)\frac{dy}{dk} - ky = 0$$

oder

$$\frac{d}{dk}\left[k(1 - k^2)\frac{dy}{dk}\right] - ky = 0$$

mit der vollständigen Lösung:

$$y = AK + BK',$$

wo $A$ und $B$ Konstanten bedeuten.

Für das vollständige Integral 2. Gattung besteht die Differentialgleichung

$$k\frac{d^2y}{dk^2} + \frac{dy}{dk} + \frac{ky}{1-k^2} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dk}\left(k\frac{dy}{dk}\right) + \frac{ky}{1-k^2} = 0$$

mit der vollständigen Lösung:

$$y = AE + B(K' - E').$$

Diese Resultate finden sich schon bei Legendre[1)] 1, 62. Ebenfalls schon Legendre bekannt sind die folgenden Relationen:

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E - Kk'^2}{kk'^2} = \frac{Ek}{k'^2} + \frac{dE}{dk} \quad \text{oder} \quad K = E - k\frac{dE}{dk},$$

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k} = -kK + k'^2\frac{dK}{dk}$$

oder

$$E = k'^2K + kk'^2\frac{dK}{dk} = k'^2\frac{d(kK)}{dk}, \qquad k'^2\frac{d(K-E)}{dk} = kE.$$

Über eine andere Form dieser Relationen vgl Glaisher, *Quart. Journ.* **20**, 1885. Wegen der Literatur vgl. M Krause[17)], 320.

Zwischen den Moduln 1. und 2. Gattung und den rationalen Invarianten bestehen die folgenden Differentialrelationen:

$$\frac{d\eta_1}{d\omega_1} = \frac{2i}{\pi}\left(\tfrac{1}{12}g_2\omega_1\omega_3 - \eta_1\eta_3\right), \quad \frac{d\eta_1}{d\omega_3} = -\frac{2i}{\pi}\left(\tfrac{1}{12}g_2\omega_1^2 - \eta_1^2\right)$$

$$\eta_1 = \tfrac{2}{3}\pi i\frac{\partial \ln G}{d\omega_3}, \quad \eta_3 = -\frac{2\pi i}{3}\frac{\partial \ln G}{\partial\omega_1};$$

$$32\,G\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial g_2} = 9\,g_3\eta_\alpha - \tfrac{1}{2}g_2^2\omega_\alpha, \quad 32\,G\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial g_3} = 9\,g_3\,\omega_\alpha - 6\,g_2\eta_\alpha$$

$$64\,G\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial g_2} = g_2^2\eta_\alpha - \tfrac{3}{2}g_2g_3\,\omega_\alpha, \quad 64\,G\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial g_3} = g_2^2\omega_\alpha - 18\,g_3\eta_\alpha.$$

$$(\alpha = 1, 3)$$

Über weitere Relationen vgl Klein-Fricke[12)], 1, 119; Halphen[9)], 1, 307.

## § 15. Übergang von der Jacobischen zur Weierstraßschen Bezeichnung der elliptischen Integrale.

Die Zusammenhänge der Größen aus der Jacobischen Theorie mit den entsprechenden aus der Weierstraßschen Theorie werden durch die folgenden Formeln vermittelt:

$$u' = \pi c_3^2 v = 2Kv = u\sqrt{e_1 - e_3} = 2\omega_1 v\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi c_3^2}{2\omega_1} u$$

$$u = 2\omega_1 v = \frac{\pi c_3^2}{\sqrt{e_1 - e_3}} v = \frac{u'}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}} v$$

$$x = \operatorname{sn}\left(u\sqrt{e_1 - e_3}\right) = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp u - e_3}} = \sqrt{e_3 - e_1}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}.$$

Als unabhängige Variable tritt also bei Jacobi nicht das Weierstraßsche Normalintegral 1. Gattung $u$, sondern das Legendresche $u' = u\sqrt{e_1 - e_3}$ auf. Daher

$$K = \omega_1\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi c_3^2}{2}, \quad iK' = \omega_3\sqrt{e_1 - e_3}, \quad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{iK'}{K}$$

$$k = \frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{c_2^2}{c_3^2}, \qquad k' = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{c_0^2}{c_3^2}$$

$$\frac{1}{27} j = \frac{g_2^3}{27 g_3^2} = 1 + \frac{27 k^4(1-k^2)^2}{(1+k^2)^2(2-k^2)^2(1-2k^2)^2}$$

(absolute Invariante nach Weierstraß),

$$J = \frac{g_2^3}{16 G} = \frac{4}{27}\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2} = \frac{4}{27}\frac{(1-k^2k'^2)^3}{k^4k'^4} = \frac{1}{54}\frac{(c_0^8 + c_2^8 + c_3^8)^3}{c_0^8 c_2^8 c_3^8}$$

(absolute Invariante nach Klein-Fricke)

## § 16. Spezialfälle und Ausartungen der elliptischen Funktionen.

1) *Der harmonische Fall* (Lemniskatische Funktionen):

$$g_2 = 4, \quad g_3 = 0, \quad k^2 = k'^2 = \tfrac{1}{2}, \quad e_1 = 1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -1.$$

Das Integral erster Gattung nimmt die Gestalt an:

$$u = \int_\infty^s \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - 4s}}, \quad s = \wp u,$$

die mit der Lemniskate in einem engen Zusammenhang steht.

Das Periodenparallelogramm ist ein Quadrat, dessen Diagonalen den Achsen parallel sind.

2) *Der äquianharmonische Fall:*

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 4, \quad e_1 = \varepsilon, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = \varepsilon^2, \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

$$\wp(\varepsilon u) = \varepsilon \wp u, \quad \wp'(\varepsilon u) = \wp' u, \quad \sigma(\varepsilon u) = \varepsilon \sigma u$$

$$\omega_3 = \varepsilon \omega_1, \quad \omega_2 = \varepsilon^2 \omega_1.$$

Dieselbe Rolle, die bei Fall 1) die Lemniskate $r^2 = \cos 2\varphi$ spielt, spielt im Fall 2) die Kurve $r^3 = \cos 3\varphi$ (vgl. Kiepert, *Journ. f. Math.* 74).

Das Periodenparallelogramm setzt sich aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammen. Das Integral erster Gattung nimmt die Gestalt an:

$$u = \int^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - 4}}.$$

Wegen der Berechnung von Tafeln für den äquianharmonischen Fall vgl. S. 842.

3) $k = 0, \; k' = 1$ $\qquad \omega_1 = \dfrac{\pi}{\sqrt{6 e_1}}, \quad \omega_3 = \infty i$

$$q = \lim\left(\frac{k^2}{16} + \frac{k^4}{32}\right) \qquad e_2 = e_3 = -\tfrac{1}{2} e_1$$

$$\operatorname{sn} u' = \sin u', \quad \operatorname{cn} u' = \cos u', \quad \operatorname{dn} u' = 1$$

4) $k = 1, \; k' = 0$ $\qquad \omega_1 = \infty, \quad \omega_3 = \dfrac{\pi i}{2\sqrt{3 e_1}}$

$$q = 1 \qquad e_1 = e_2 = -\tfrac{1}{2} e_3$$

$$\operatorname{sn} u' = \frac{e^{u'} - e^{-u'}}{e^{u'} + e^{-u'}} = \mathfrak{Tg}\, u', \quad \operatorname{cn} u' = \operatorname{dn} u' = \frac{2}{e^{u'} + e^{-u'}} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, u'}$$

5) $e_1 = e_2 = e_3 = 0, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 0, \quad \omega_1 = \infty \quad \omega_3 = \infty$

$$\wp u = \frac{1}{u^2}, \quad \zeta u = \frac{1}{u}, \quad \sigma u = u, \quad \sigma_1 u = \sigma_2 u = \sigma_3 u = 1$$

## § 17. Elliptische oder doppeltperiodische Funktionen 2. und 3. Art.

Hermite hat zuerst (*Comptes Rendus* **91** bis **96** (1877—1882) und in der Monographie *„Sur quelques applications etc.“*, wo die Resultate jener Abhandlungen vereinigt sind) darauf aufmerksam gemacht, daß man namentlich in den mechanischen Anwendungen

auf Thetaquotienten geführt wird, die nicht mehr rein periodisch sind und nicht mehr der bekannten Relation zwischen den Null- und Unendlichkeitsstellen genügen. Er belegt sie mit dem Namen der *elliptischen* oder *doppeltperiodischen Funktionen 2. Art*, wenn sie sich um einen konstanten Faktor ändern, sobald man das Argument um Perioden wachsen läßt. Während es keine elliptischen Funktionen 1 Art 1. Grades gibt, sind elliptische Funktionen 2. Art 1. Grades sehr wohl möglich, und sie sind unter den elliptischen Funktionen 2. Art die einfachsten. Sie haben nach Hermite die Form

$$\Phi(u') = \frac{\vartheta_1(v+a)e^{-\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)}v}}{\vartheta_0 v}.$$

In Sigmafunktionen stellen sich diese *Primfunktionen*, aus denen sich die allgemeinen Funktionen 2. Art aufbauen, so dar:

$$\Phi(u') = \frac{\sigma(u+u_1)}{\sigma u\, \sigma u_1}\, e^{-u\zeta u_1}.$$

Sie genügen der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\Phi''(u') = (2k^2 \operatorname{sn}^2 u' - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn} a)\,\Phi(u')$$

bzw.

$$\Phi''(u') = (2\wp u + \wp u_1)\,\Phi(u'),$$

die unter dem Namen der *Laméschen Differentialgleichung* in dem Hermiteschen Fall $n=1$ mannigfache Anwendungen gefunden hat. Wegen der Reihenentwicklung der Primfunktionen vgl. Hermite[8)], S. 13, 102, 124; Halphen[9)] **1**, 236 und Krause[17)] **1**, 302.

*Elliptische oder doppeltperiodische Funktionen 3. Art* nennt Hermite eindeutige Funktionen, die sich um Exponentialfaktoren ändern, wenn man das Argument um Perioden wachsen läßt:

$$\varphi(u+2\omega_1) = \varphi(u)\,e^{cu+h}, \quad \varphi(u+2\omega_3) = \varphi(u)\,e^{c'u+h'}.$$

Über die Darstellung in Sigmas vgl. Halphen[9)] **1**, 471.

Neben der Produktdarstellung der doppelperiodischen Funktionen zweiter und dritter Art ist auch ihre Summendarstellung von großer Bedeutung Vgl. Hermite[8)] und M Krause[17)] **1**, § 81.

Schon Jacobi hat von Funktionen 3. Art außer den Thetas noch die reziproken Thetas behandelt Von Hermite und Kronecker sind an speziellen Funktionen untersucht $\frac{\vartheta_\alpha v\, \vartheta_\beta v}{\vartheta_\gamma v}$, $\frac{\vartheta_\alpha^2 v}{\vartheta_\beta v}$ u. a. Die von Hermite begründete Theorie der Funktionen 3. Art ist

vor allem von Appell und M. Krause gefördert worden. Appell weist nach, daß sich diese Funktionen auf wenige Primfunktionen zurückführen lassen.

Von den Primfunktionen ausgehend lassen sich diese Funktionen in Potenzreihen ihres Argumentes und in trigonometrische Reihen entwickeln. Wegen der Literatur vgl. M. Krause[17] S. 327. Vgl. auch die Darstellung bei Halphen[9], **1**, 225, 462 und Maurer-Durège[28], S. 188

Unter den doppeltperiodischen Funktionen 3. Art wollen wir eine Klasse von ganzen transzendenten Funktionen herausheben und mit Hermite eine Funktion $f(v)$, die den Gleichungen genügt:

$$f(v+1) = (-1)^g f(v)$$
$$f(v+\tau) = (-1)^h e^{-\pi i n(2v+\tau)} f(v),$$

wo $n$ eine ganze positive Zahl bedeutet, eine *Thetafunktion $n^{ter}$ Ordnung* nennen. Man findet auch die Namen: Jacobische Funktionen; fonctions intermédiaires; quasiperiodische Funktionen. Der Zahlenkomplex $(g, h)$ heißt ihre *Charakteristik* Es gibt nur vier wesentlich verschiedene Charakteristiken (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), von denen die drei ersten gerade, die letzte ungerade genannt werden. Der Hermitesche Fundamentalsatz in der Theorie dieser Funktionen lautet: Es gibt nur $n$ linear voneinander unabhängige Thetafunktionen $n^{ter}$ Ordnung, die denselben Bedingungsgleichungen genügen und in $n$ und nur $n$ Punkten des Periodenparallelogramms verschwinden Zwischen $n+1$ Thetafunktionen $n^{ter}$ Ordnung mit gleicher Charakteristik besteht eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten. Die allgemeinen Thetas $n^{ter}$ Ordnung lassen sich durch die ursprünglichen Thetas 1. Ordnung darstellen, unter denen $\vartheta_3 v$ als Thetafunktion mit der Charakteristik (0,0) vielfach als fundamentale Thetafunktion bezeichnet wird. (Vgl. Burkhardt[35], 153 und H. Weber[27], S. 39, wo die Funktionen als $T$-Funktionen bezeichnet sind) H. Weber nimmt die Charakteristik in die Bezeichnung der Thetafunktionen auf.

## § 18. Multiplikation, Teilung und Transformation der elliptischen Funktionen.

*Die Multiplikation des Arguments einer elliptischen Funktion.* Zuerst hat sie Abel untersucht in seinen Recherches, *Journ. f Math* **2**, 114, 146 und in seinem Précis, *Journ f. Math.* **4**.

Es handelt sich dabei um die Aufgabe, die Funktionen $\operatorname{sn}(nu')$, $\operatorname{cn}(nu')$, $\operatorname{dn}(nu')$ als rationale Funktionen von $\operatorname{sn} u'$, $\operatorname{cn} u'$, $\operatorname{dn} u'$ auszudrücken. Soll die Multiplikation reell sein, dann kann der Multiplikator $n$ nur eine ganze Zahl sein. Dieses Problem ist ein spezielles Transformationsproblem der Ordnung $n^2$, wobei der Modul ungeändert bleibt, und seine Lösung folgt aus der Darstellung der Thetafunktionen.

Über die verschiedenen Methoden, das Multiplikationstheorem zu lösen, vgl. M. Krause[17], **1**, § 54—58. Vgl. ferner Weber[27], § 57, Cayley, *Journ. f. Math.* **39** und **41**, Enneper[10], S. 374 und Königsberger[5] **2**, 191.

Eine sehr elegante Form nimmt die Multiplikationstheorie für die Funktion $\wp u$ an. In der Weierstraßschen Theorie gilt nämlich der Satz, daß sich $\wp(nu)$ stets rational durch $\wp u$ allein ausdrückt:

$$\wp(nu;\ \omega_1, \omega_3) = \frac{G_{n^2}(\wp u)}{G_{n^2-1}(\wp u)},$$

wo der angehängte Index den Grad der betreffenden Funktion angibt.

Über das Problem der *ganzzahligen* Multiplikation von $\wp u$ vgl. Brioschi, *C. R.* **59**, 1864, S. 769—775, Kiepert, *Journ. f. Math.* **76**, 21—33, Weierstraß-Schwarz[7], S. 19, Halphen[9], **1**, 95.

*Das Teilungsproblem.* Fassen wir $\wp(nu)$ als gegeben auf und soll $\wp u$ gefunden werden, dann ergibt sich als *Teilungsgleichung* der elliptischen Funktionen eine Galoissche Gleichung vom Grade $n^2$, die durch Wurzelgrößen lösbar ist. Das *spezielle* Teilungsproblem beschäftigt sich nach Klein (Klein-Fricke[12], **2**, 7; vgl. auch Kiepert, *Journ f. Math.* **76**, 34—44) mit denjenigen Funktionen von $\omega_1, \omega_3$ allein, die aus

$$\wp\left(\frac{u + 2\lambda\omega_1 + 2\mu\omega_3}{n};\ \omega_1, \omega_3\right)$$

für $u = 0$ entspringen. Bei der Bestimmung der Koeffizienten der Teilungsgleichungen treten die Transformationsgleichungen für $g_2$, $g_3$ auf, deren Aufstellung zuerst F. Müller (*Diss.* Berlin 1867) in Angriff genommen hat.

Die *allgemeine Teilungsgleichung* für die Funktion

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u'}{n} + \frac{4\mu K + 4\mu' i K'}{n}\right)$$

hat die Form

$$\operatorname{sn} u' D(x^2) - x A(x^2) = 0,$$

wo $x = \operatorname{sn} \frac{u'}{n}$, $A$ und $D$ ganze rationale Funktionen bedeuten. Sie ist vom Grade $n^2$, ist in dem Sinne irreduzibel, als sie nicht in Faktoren zerlegbar ist, die in bezug auf $\operatorname{sn} u'$, $\operatorname{cn} u'$, $\operatorname{dn} u'$ rational sind, selbst nach Adjunktion beliebiger Konstanten, und ist *algebraisch lösbar.*

Für $n = 3, 5, 7$ vgl. Halphen[9] **1**, 96; **3**, 2, 48 und Tannery-Molk[16] **4**, 226; für beliebiges $n$ vgl. Halphen[9] **3**, 194 und Greenhill, *Phil. Trans.* 1904.

*Das allgemeine Teilungsproblem.* Nach dem Abelschen Theorem kann bei einer additiven Verbindung gleichartiger elliptischer Integrale eine algebraische Beziehung zwischen den oberen und unteren Grenzen jener Integrale bestehen. Das allgemeine Transformationsproblem untersucht die Bedingungen dafur, daß für eine additive Verbindung beliebiger gleichartiger und ungleichartiger elliptischer Integrale algebraische Beziehungen zwischen den oberen Integrationsgrenzen stattfinden. Nun läßt sich das allgemeine Problem auf das rationale zurückführen. Die Reduktion läßt sich aber noch weiter treiben und das allgemeine Problem auf die rationale Transformation eines elliptischen Integrals erster Gattung in ein anderes gleichartiges zurückfuhren.

Das von Jacobi (*Astron. Nachr.* VI, **123**, 33—38, 1827, *Ges. W.* **1**, 29—36) formulierte Transformationsproblem lautet dahin: Die Bedingungen aufzustellen, damit eine Gleichung der Gestalt

$$\operatorname{sn}(u', l) = R(\operatorname{sn}(Mu', k))$$

oder

$$F[\operatorname{sn}(u', l), \operatorname{sn}(Mu', k)] = 0$$

bestehe, wo $F$ eine algebraische Funktion bedeutet

Nach Weierstraß ist dieses Problem identisch mit dem folgenden: Die Relationen zwischen den primitiven Periodenpaaren $2\omega_1$, $2\omega_3$; $2\Omega_1$, $2\Omega_3$ abzuleiten, damit eine algebraische Gleichung

$$G[\wp(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad \wp(u \mid \Omega_1, \Omega_3)] = 0$$

bestehe. Und das ist das allgemeine Transformationsproblem der elliptischen Funktionen, da sich jede beliebige elliptische Funktion algebraisch durch die zugehorige $\wp$-Funktion ausdrücken

läßt. Weierstraß findet das einfache Resultat: *Besteht zwischen zwei elliptischen Funktionen eine algebraische Gleichung, so befinden sich unter deren unendlich vielen primitiven Periodenpaaren zwei Paare von der Eigenschaft, daß sich das eine vom anderen nur um gebrochen-rationale Zahlenfaktoren unterscheidet:*

$$k\omega_1 = ln\Omega_1, \quad mk\omega_3 = l\Omega_3,$$

*wo $k$, $l$, $m$, $n$ positive ganze Zahlen bedeuten und $k$ relativ prim zu $l$, $n$ und $l$ relativ prim zu $k$, $m$ sind.* Und dieser Satz ist *umkehrbar*. Aus dem Bestehen dieser Beziehungen unter den primitiven Periodenpaaren zweier $\wp$-Funktionen folgt die Existenz einer algebraischen Gleichung unter diesen $\wp$-Funktionen:

$$R(\wp(u \mid \omega_1, \omega_3))_{l^2 n} = R(\wp(u \mid \Omega_1, \Omega_3))_{k^2 m},$$

wo der angehängte Index den Grad der betreffenden Funktion angibt.

Über den Zusammenhang der Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Teilungsgleichung vgl. Weber[27] § 65.

## § 19. Die Modulargleichungen.

Schon Abel (*Ges. W.* **1**, 372; *Précis*, chap. IV, § 4) hat bemerkt, daß bei der Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung ($n$ eine ungerade Primzahl)

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

eine Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades zwischen $k$ und $l$ auftritt, die von Jacobi den Namen *Modulargleichung* erhalten hat (*Fundamenta* § 29; *Ges W.* **1**, 122). Heute versteht man allgemeiner darunter die Gleichungen zwischen den richtig normierten $\sqrt[n]{k}$ und $\sqrt[n]{l}$.

Jacobi (*Fund.* § 32; *Ges. W* **1**, 129) hat dann weiter bemerkt, daß sich die endliche Relation zwischen $k$ und $l$ durch eine Differentialgleichung 3. Ordnung ersetzen läßt:

$$2\frac{d^3l}{dl} - 3\left(\frac{d^2l}{dl}\right)^2 + \left(\frac{1+l^2}{l-l^3}\right)^2(dl)^2 = 2\frac{d^3k}{dk} - 3\left(\frac{d^2k}{dk}\right)^2 + \left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2(dk)^2$$

Das ist die allgemeinste Beziehung zwischen dem ursprünglichen und dem transformierten Modul. Diese Modulargleichung bleibt unverändert bei Vertauschung von $k$ gegen $l$, von $k$ gegen $\frac{1}{k}$ und $l$ gegen $\frac{1}{l}$, und auch von $k$ gegen $k'$ und $l$ gegen $l'$.

Neben den Modulargleichungen spielen eine wichtige Rolle die *Multiplikatorgleichungen* (Jacobi, *Journ. f. Math.* **3**, 300; *Ges. W.* **1**, 261), das sind die Gleichungen, die zwischen dem Multiplikator der Transformation

$$M^2 = \frac{1}{n}\,\frac{l l'^2\, dk}{k k'^2\, dl}$$

und dem Integralmodul des zu transformierenden Integrals bestehen. Vgl. die Darstellung bei Weber,[27] 7. Abschn.

Der erste, der die Transformation der elliptischen Funktionen untersuchte, war Landen (*Phil. Trans.* 1771, 1775). Ihm verdanken wir die quadratische Transformation. Die Landensche Modulargleichung lautet in den verschiedenen Formen:

$$l = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad k' = \frac{1-l}{1+l}, \quad k = \frac{2\sqrt{l}}{1+l}, \quad l' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},$$

$$(1+k')(1+l) = 2, \quad \sqrt{l} = \frac{1-k'}{k}, \quad \sqrt{k'} = \frac{1-l}{l'}$$

und

$$kl' = 2\sqrt{k'l}.$$

Die Modulargleichung 3. Ordnung geht auf Legendre[1)] **1**, 230; *Suppl.* S. 70, zurück.

Die Modulargleichungen sind bekannt für die Fälle $n = 1$, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 71, 83, 119. Vgl. die Zusammenstellung der Modulargleichungen bei G. Greenhill[13)], S. 327—328, E. W. Fiedler, *Züricher Vierteljahrsschr.* **30**, 129—229, 1885 und Krause, *Leipz. Ber.* **56**, 126—138, 1904. Wegen der Literatur vgl. Enneper-Müller[10)], S. 481—482 und M. Krause[17)], **1**, S. 323—324.

Nach Klein (*Math. Ann.* **14**, 417—427, 1879), lassen sich diese Modulargleichungen durch Relationen zwischen der absoluten Invarianten $J$ und ihrem transformierten Wert $J'$ ersetzen mit Hilfe der Größen $\tau$ und $\tau'$, so daß $J$ eine gewisse Funktion von $\tau$, und $J'$ dieselbe Funktion von $\tau'$ darstellt.

Die algebraischen Gleichungen zwischen den Invarianten $g_2$, $g_3$ der ursprünglichen Funktion $\wp(u; g_2, g_3)$ und den entsprechenden Größen $G_2$, $G_3$ der transformierten Funktion

$$\wp(u; G_2, G_3)$$

werden *Invariantengleichungen* genannt (vgl. F. Müller, *Diss.* Berlin 1867). Weitere Literatur bei Enneper-Müller[10], S. 499. Als Invariantengleichung wird auch die irreduzible Gleichung bezeichnet, deren Wurzeln die Größen $J\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$ sind, im speziellen die Gleichung zwischen $J(n\tau)$ und $J(\tau)$, die aber nur für den Fall $n=2$ aufgestellt worden ist. Vgl. die Darstellung bei H. Weber[27], S 247.

Der Transformation der elliptischen Funktionen entspricht eine Transformation der Thetas. Der erste Teil dieser Transformationstheorie, der seine Aufgabe darin sieht, die transformierten Funktionen durch die ursprünglichen für beliebige Werte des Arguments analytisch darzustellen, kann im wesentlichen als gelöst angesehen werden (vgl. §§ 9, 18). Dagegen ist der zweite Teil noch ungelöst, der die Beziehungen untersucht, die zwischen den mannigfachen *Konstanten* dieser Darstellungen bestehen. Es ist bis jetzt (vgl. die Untersuchungen von Hermite, H. Weber, Kiepert, Brioschi, Klein) nicht gelungen, für allgemeine Transformationsgrade Modulargleichungen, sei es in rationaler oder irrationaler Form, aufzustellen. Dieses Problem erhielt eine ungeahnte Bedeutung, als es Hermite gelang, mit Hilfe der zur Transformation fünften Grades gehörigen Modulargleichung die allgemeine Gleichung fünften Grades zu losen, als ferner vor allem durch die Arbeiten von Kronecker und Hermite sich überaus wichtige Beziehungen zur komplexen Multiplikation (vgl § 21) und Zahlentheorie ergaben (vgl H. Weber[27]). Neben diese algebraische Behandlung des Problems hat sich eine andere, eine funktionentheoretische gestellt, die von den Modulfunktionen ausgeht und mit der Theorie der *automorphen* Funktionen zusammenhängt (vgl Klein-Fricke[12]).

Ein neuer Gesichtspunkt, das Transformationsproblem zu fördern, ist von Prym und Krazer (*Acta mat.* 3 und *Math. Ann.* 43) in die Theorie hineingetragen worden durch die Einführung der Thetas mit gebrochener Charakteristik, die definiert werden durch

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v) = \sum_m e^{\pi i \tau \left(m+\frac{g}{n}\right)^2 + 2\pi i \left(m+\frac{g}{n}\right)\left(v+\frac{h}{n}\right)},$$

wo $g, h$ beliebige ganze Zahlen, $n$ eine beliebige positive ganze Zahl bedeuten. Diese neuen Größen sind nicht nur für die Transformationstheorie von Bedeutung, sie spielen auch in der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen zweiter und dritter Art eine wesentliche Rolle. Wegen der Literatur vgl. M. Krause[17], 1, 325. Von wesentlichem Nutzen haben sich hier die von Schröter, Thomae, M. Krause (vgl. *Hyperelliptische Funktionen* § 46, 1886, und [17], 1, § 79), Krazer und Prym (*Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen*, 1892), Krazer (*Math. Ann.* **43**, 1893), Klein eingeführten, aus den Thetas mit gebrochener Charakteristik gebildeten Fundamentalfunktionen

$$X_g^{(\alpha)} = \vartheta_\alpha(nv + g\tau,\ n\tau)\, e^{\pi i g\left(2v+\frac{g\tau}{n}\right)} \quad (g = 0, 1, \quad n-1)$$

erwiesen. Über die Literatur dieser Funktionen vgl. Krazer[25], V. Kapitel, § 7, und VIII. Kapitel, § 10.

Und endlich hat M. Krause, ausgehend von den Schröterschen Untersuchungen, eine Methode entwickelt, um die ganze unendliche Mannigfaltigkeit der Modulargleichungen unter ein einziges Gesetz zu bringen (vgl. M. Krause, *Vortrag Naturf. Vers.* Wien 1894 und M. Krause[17], 2).

## § 20. Die komplexe Multiplikation.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zulässigkeit einer Multiplikation mit nicht ganzzahligem Multiplikator oder — was dasselbe ist — der komplexen Multiplikation lauten: 1. Die Perioden müssen Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten sein; 2. der Multiplikator $m$ muß linear und ganzzahlig aus der reellen Einheit und aus der jener Gleichung entspringenden komplexen Größe $\mu$ gebildet sein. In Formeln: Es muß $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau$ Wurzel der quadratischen Gleichung

$$a\tau^2 + b\tau + c = 0$$

sein, wo $a$ und $c$ ganze positive und $b$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, und $a, b, c$ relativ prim sind, also

$$\tau = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \frac{-b + i\sqrt{4n - \varepsilon}}{2c},$$

wo $\varepsilon = 0$ oder 1 sein kann und $n > 0$ ist; und $m$ muß die Form haben

$$m = \varrho' + \varrho\mu,$$

wo

$$\mu = \tfrac{1}{2}\left(-\varepsilon + i\sqrt{4n - \varepsilon}\right)$$

gesetzt ist, mit $\varrho$, $\varrho'$ als positiven oder negativen *ganzen* Zahlen.

Der Fall $n = 1$ führt zu den *lemniskatischen* Funktionen.

$\mu$ ist derjenige Multiplikator, aus dem sich alle übrigen Multiplikatoren ganz und linear darstellen lassen; $\mu$ ist ferner derjenige, für den $\wp(mu)$, als rationale Funktion von $\wp u$ ausgedrückt, von kleinstmöglichem Grade wird; und endlich ist $\mu$ der einzige, für den diese rationale Funktion von $\wp u$ durch primitive Transformation aus $\wp(mu)$ hervorgeht.

Entweder lassen alle $\wp$-Funktionen mit der gleichen absoluten Invariante $j(\tau)$ (in der Weberschen Bezeichnung) die komplexe Multiplikation zu oder keine von ihnen. Näheres bei H. Weber[27], 17. Abschnitt.

Die Grundeigenschaften der komplexen Multiplikation wurden von Abel aufgefunden (*Journ. f. Math.* **2**, **3**, 1827, 1828), der durch Untersuchungen über die Lemniskatenteilung zur Entdeckung der elliptischen Funktionen geführt wurde. Abel spricht bereits die wichtigste arithmetische Eigenschaft der singulären Moduln aus, daß nämlich ihre Zahlenwerte durch Wurzelziehungen aus rationalen Zahlen berechnet werden können. Die Entdeckung Abels, der nicht die Zeit gefunden hat, alle seine Resultate zu beweisen, wurde von Kronecker (*Berl Ak. Monatsber.* 1857) und Hermite (*Compt. Rend* 1859; *Œuvres* **2**, 38), der Vergessenheit entrissen.

Wegen der Fälle $n = 2$, $n = 4$, vgl. Hermite, *C. R.* 1859; $n = 6$ Halphen[9] **3**, 153. In bezug auf numerische Ergebnisse ist besonders Greenhill hervorzuheben, *Cambr. Phil. Soc Proc* **4**, 1883; *Quart J* **22**, 119, 174. Weitere Literatur: H. Weber, *Acta mat.* **6**, **11**; Pick, *Math. Ann.* **25**, **26**; Kiepert, *Math. Ann* **26** und **39**. Für eine zusammenhängende und syste-

matische Darstellung und Begründung vgl. bei Sylow, *Journ. de Math.* **3**, 109, 1887. Vgl. weiter die Lehrbücher von H. Weber[27], 3. Buch; Klein-Fricke[12], 2, 193; F. Klein, *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, autograph. Vorles. W. S.* 1895/96 und *S. S.* 1896; Bianchi, *Lezioni sulla teoria delle funzioni ellitiche;* Durège-Maurer[28], S. 573. Über komplexe Multiplikation der Thetafunktionen vgl. Krazer[25], S. 211. Über die praktische Lösung des Problems der Multiplikation der lemniskatischen Funktion vgl. besonders Schwering, *Journ. f. Math.* **107, 110, 111, 112.**

## § 21. Numerische Berechnung der elliptischen Integrale und Funktionen.

An *erster* Stelle steht die Methode, überhaupt nicht zu rechnen, sondern die Legendreschen Tafeln zu benutzen, welche neuerdings durch die „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven" von Jahnke und Emde[30] besser zugänglich geworden sind. Man hat nur nötig, aus dem Modul $k$ mittels der Gleichung $k = \sin\alpha$ den Winkel $\alpha$ zu bestimmen. Dann findet man für alle vollen Grade von $\alpha$ und $\varphi$ zwischen $0^0$ und $90^0$ die Werte von $F(\varphi, \sin\alpha)$ und $E(\varphi, \sin\alpha)$ auf neun (in den Funktionentafeln von Jahnke-Emde auf vier) Dezimalen in den Tafeln. Eine *zweite* Methode, und zugleich die Methode, deren sich Legendre zur Berechnung seiner Tafeln bedient hat, besteht darin, die Integrationsvariable einer quadratischen Transformation zu unterwerfen, derart daß das Integral erster Gattung in ein ebensolches, nur mit verändertem Modul und transformierter Amplitude übergeht. In erster Linie ist hier die sogenannte Landensche Transformation (*Phil. Trans.* 1771, 1775 und *Math. Memoirs* 1780) zu nennen Bei wiederholter Anwendung kommt man schließlich zu einem Integral mit sehr kleinem Modul und sehr großer Amplitude. Kehrt man die Landensche Transformation um, dann nähert sich die Modulleiter, unaufhörlich zunehmend, der Eins.

Von der beschriebenen Methode nicht wesentlich verschieden ist die Gaußsche Methode des *arithmetisch-geometrischen Mittels* (*Ges. W* **3**, 333); sie zeichnet sich vor jener nur durch formale Eleganz aus. Vgl. auch Borchardt, *Journ. f. Math* **58**, 127—134, 1858; *Berl. Monatsber* 1876; Schlesinger, *Berl. Ber* 1898, 346.

Nach diesen Vorschriften läßt sich auch das elliptische Integral zweiter Gattung berechnen. Dagegen gibt es für die Integrale dritter Gattung keine Tafeln. Diese müßten, da $\Pi(\varphi, n, k)$ von drei Veränderlichen abhängt, dreifachen Eingang haben. Doch können die Legendreschen Tafeln benutzt werden, um das sogenannte vollständige Integral dritter Gattung $\Pi(\frac{1}{2}\pi, n, k)$ zu berechnen. Es läßt sich nämlich nach Legendre auf die Integrale erster und zweiter Gattung zurückführen, die in ihren oberen Grenzen den Parameter $n$ enthalten und zum Modul teils den Modul $k$ des Integrals $\Pi$, teils den komplementären Modul haben:

$$\int_{2}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du'}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 u'} = K' + \frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha}[K' E(\varphi, \operatorname{sn}\alpha) - E' F(\varphi, \operatorname{sn}\alpha)].$$

Wegen der Berechnung der elliptischen Integrale in Weierstraßscher Form vgl. Weierstraß-Schwarz[7], S. 67—73.

Eine *dritte* Methode beruht auf der Umkehrung der elliptischen Integrale und auf der Einführung der Thetafunktionen (vgl. Jacobi, *Journ. f. Math.* **26**, 93—114; *Ges. W.* **1**, 345—368 sowie die Darstellung bei Schellbach[2], S. 59—66, 183 bis 184 und Hoüel[24] S. [XLIII]).

Eine *vierte* Methode ist von Runge mitgeteilt worden (*Theorie und Praxis der Reihen,* S. 229).

*Numerische Berechnung der elliptischen Funktionen.* Soll zu einem gegebenen Werte des Arguments der zugehörige Wert einer elliptischen Funktion berechnet werden, so ist es am zweckmäßigsten, die elliptischen Funktionen als Quotienten von Thetas auszudrücken und die Thetas mit Hilfe ihrer Reihen zu berechnen Dazu ist erforderlich, $q$ nach der Formel

$$q = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \cdots, \quad l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

aus dem Modul $k$ zu bestimmen Dabei genügt es, nur die ersten Glieder zu berücksichtigen. Und weiter ist hervorzuheben, daß eine Thetareihe in praxi nichts anderes bedeutet als eine Summe von zwei trigonometrischen Termen, so daß sich jede Formel in

*elliptischen* Funktionen für die Zwecke des numerischen Rechnens durch eine solche mit *trigonometrischen* Funktionen ersetzen läßt (vgl. die Darlegung in Klein-Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels,* Leipzig 1898, **2**, 440—454 und in Burkhardt[35], S. 376).

*Tafeln der elliptischen Integrale und Funktionen.* Tafeln für $F(\varphi, k)$ und $E(\varphi, k)$ sowie für $K$ und $E$ verdankt man Legendre, *Exercices de calcul intégral* **3**, Paris 1816; die Tafeln schreiten sowohl für $\alpha$ als $q$ von Grad zu Grad fort, und zwar sind die Werte von $F(\varphi, \sin\alpha)$ und $E(\varphi, \sin\alpha)$ im Intervall von $\alpha = 0^0$ bis $45^0$ auf zehn, von $\alpha = 45^0$ bis $90^0$ auf neun Stellen angegeben, die Werte von $K$ und $E$ auf zwölf Stellen.

Für $\log q$ hat Jacobi (*Journ. f. Math.* **26**, 1843, *Ges. W.* **1**, 343) eine nach Zehnteln eines Grades fortschreitende Tafel von $\alpha = 0^0$ bis $90^0$ auf fünf Stellen berechnet; schon vorher hatte Verhulst in seinem *Traité élém. des fonct. ell* 1841 eine ähnliche Tafel mitgeteilt. Meißel hat sie später (1860) erweitert. Bei Bertrand[8] ist eine auf Zwölfteilung des Grades beruhende Tafel für $\log q$ mitgeteilt. Der Tafel für $K$ und $E$ haben G. Humbert und Lucien Lévy[21] noch Werte hinzugefügt, so daß ihre Tafel von $\alpha = 70^0$ bis $80^0$ nach halben, von $\alpha = 80^0$ bis $89^0$ nach fünftel und von $\alpha = 89^0$ bis $90^0$ nach zehntel Graden fortschreitet. Noch genauere Tafeln für $K$ und $E$ sind neuerdings von G. Witt für astronomische Zwecke berechnet worden (*Astron. Nachr.* **165**, 33, 1904).

Bei J Hoüel[24] finden sich Tafeln für die Thetafunktionen und ihre logarithmischen Ableitungen

Für den äquianharmonischen Fall der Funktionen $\wp' u$, $\wp u$, $\zeta u$, $\sigma u$ sind auf Veranlassung von Greenhill Tafeln durch A. G Hadcock berechnet und von Greenhill in seiner Abhandlung *Proc. Royal Art. Jnst.* **17**, 1—36, 1889 mitgeteilt worden.

Eine Zusammenstellung aller dieser Tafeln nebst den zugehörigen Formeln und graphischen Darstellungen findet sich in Jahnke-Emde[30] (vgl. dazu auch M. Krause[32])

Zur graphischen Berechnung der elliptischen Funktionen vgl Delaunay, *Bull Soc Math. France* **30**; *Bull. des sc. math.* (2) **26**.

Eine mechanische Auswertung der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung teilt R. Rothe mit (*Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges.* **4**, 13, 1905).

Neuerdings hat Greenhill der Brit. Ass. in Portsmouth einen Plan zur Berechnung einer Tafel für die elliptischen Funktionen vorgelegt, nachdem bereits vor 40 Jahren die Brit. Ass. Glaisher mit der Berechnung einer solchen Tafel beauftragt hatte, ohne daß diese Tafel bis jetzt veröffentlicht worden wäre Auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß zu Cambridge 1912 hat Greenhill eine Probe zu seiner Tafel vorgelegt. Inzwischen ist sie berechnet worden für die Fälle: $\alpha = 15^0$; $\alpha = 24^0, 47$; $\alpha = 45^0$; $\alpha = 65^0, 53$; $\alpha = 75^0$; $\alpha = 80^0, 1$; $\alpha = 89^0$; $\alpha = 80^0, 56$

## § 22 Anwendungen.

Die Zahl der Probleme, deren Lösung durch elliptische Funktionen vermittelt wird, ist sehr groß. Die Anwendungsgebiete erstrecken sich auf Algebra und Zahlentheorie, Differentialgleichungen, Geometrie und konforme Abbildungen, Kurven- und Flächentheorie, Mechanik, Physik und Elektrotechnik. Die meisten Lehrbücher bringen eine Auswahl von ihnen, so z. B Schellbach[2], Halphen[9] Enneper[10] Thomae[11] Greenhill[13], Tannery-Molk[16], Pascal[19], Appell-Lacour[20], Lévy[21], Riemann-Stahl[22], Weber[27], Durège-Maurer[28], Krause[32], Fricke[34].

Daneben finden sich in Zeitschriften und Dissertationen verstreut mannigfache spezielle Anwendungen, die nicht in die Lehrbücher übergegangen sind. Sie hier aufzuführen, würde den zur Verfügung stehenden Raum weit überschreiten Doch sei noch besonders auf den Encyklopädie-Artikel von Fricke[38] hingewiesen, wo sich zahlreiche weitere Literaturangaben finden. Vgl. auch den geschichtlichen Überblick im folgenden Paragraphen.

## § 23 Geschichtlicher Überblick.

Die Theorie der elliptischen Funktionen ist hervorgegangen aus der Beschäftigung mit den Problemen der Rektifikation der Ellipse, Hyperbel, Lemniskate, der verlängerten und verkürzten Zykloide, der parabolischen Spirale, der elastischen Linie u. a.

Diese Versuche bewegen sich in zwei Richtungen. Die eine ist an die Namen Jacob und Johann Bernoulli und Fagnano geknüpft und durch die Aufgabe charakterisiert, fur nicht rektifizierbare Kurven rektifizierbare Summen oder Differenzen zweier Bögen aufzufinden. Die andere wird durch die Untersuchungen Maclaurins und d'Alemberts gekennzeichnet, wo eine Anzahl von Integralen abgeleitet werden, die sich durch einfache Substitutionen auf die Integrale reduzieren lassen, durch welche der Bogen einer Ellipse oder Hyperbel gemessen wird. Aber alle diese Resultate entbehrten zunächst des Zusammenhangs. Als der Schöpfer der Theorie der elliptischen Integrale kann erst Euler bezeichnet werden, dem wir die Entdeckung des Additionstheorems verdanken. Auf den vorliegenden Grundlagen eine zusammenhängende Darstellung der Theorie gegeben zu haben, ist das Verdienst Legendres.

Das Umkehrproblem der elliptischen Integrale ist sodann von Abel in Angriff genommen worden, dem jedenfalls die Priorität in der *Veröffentlichung* der Theorie der elliptischen Funktionen gebührt. Mit Ende des Jahres 1826 war Abel bereits im Besitze jenes Theorems, das nach Jacobis Vorschlag Abels Namen trägt; auch war für ihn die Entdeckung der elliptischen Funktionen in ihren Hauptpunkten abgeschlossen. 1827 erschien der erste Teil seiner *Recherches sur les fonctions elliptiques* (*Journ. f. Math.* 2). Einen Monat später begann Jacobi seine Arbeiten zu veröffentlichen über die Transformation der elliptischen Integrale erster Gattung und die Umkehrungsfunktion dieses Integrals, und 1829 erschienen seine *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Die Priorität in der *Entdeckung* der elliptischen Funktionen gebuhrt unstreitig Gauss, der schon im Jahre 1798, wie Abel von der Lemniskate ausgehend, im Besitze eines erheblichen Teiles von Abels Resultaten war, 1799 die Grundzüge der Theorie der Umkehrungsfunktionen einschließlich ihrer Darstellung durch die Thetas entwickelt und im Jahre 1808 Jacobis Transformationsgleichungen gefunden hatte. Vgl. P. Günther, *Gött. Nachr.* 1894, Gauß' wissenschaftliches Tagebuch, *Math. Ann* 57 und Krazer, *Rekt. Rede* 1908, Karlsruhe.

Über die Geschichte der elliptischen Funktionen in der Zeit 1826—1829 vgl auch Königsberger, *Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transzendenten* 1826—1829, Leipzig, 1879, und Casorati, *Teoria delle funzioni di variabili com-*

*plesse*, Pavia 1868; ferner Sylow, *Les études d'Abel et ses découvertes*, aus Niels Henrik Abel, *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*, Leipzig 1902; G. Mittag-Leffler, *Niels Henrik Abel*, Paris 1907, Gauthier-Villars. Vgl. auch Enneper-Müller[10].

Eine wichtige Ergänzung hat die Theorie der elliptischen Funktionen durch Eisenstein und Weierstraß erfahren. Im Anschluß an die von Eisenstein eingeführten unendlichen Produkte und Partialbruchreihen hat Weierstraß eine abgeschlossene Theorie geschaffen, die seinen Namen trägt und durch Einführung der Sigmafunktionen charakterisiert ist. Über das Verhältnis der Weierstraßschen Theorie zur Jacobischen erlangt man den besten Einblick durch das von Klein aufgestellte Prinzip der Stufenteilung, vgl. Klein-Fricke[12], Fricke[34].

Über die Art und Weise, wie die verschiedenen Autoren gegenwärtig die elliptischen Funktionen vortragen, läßt sich folgendes sagen. Entweder geht man von den elliptischen Integralen aus (Abel), und dieser Weg empfiehlt sich dadurch, daß er dem Gang der historischen Entwicklung angepaßt ist; auch bietet er den Vorteil, das Verständnis für Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen zu eröffnen (vgl. Königsberger[5], Briot-Bouquet[6], Burkhardt[35], Thomae[11], Durège-Maurer[28], Fricke[34]). Oder man legt die algebraische Differentialgleichung 1. Ordnung mit eindeutigen Integralen zugrunde (Abel, Weierstraß in seinen Vorlesungen) Weierstraß pflegte in seinen Vorlesungen auch die Fundamentaleigenschaft der elliptischen Funktionen, ein Additionstheorem zu besitzen, zum Ausgangspunkt der Theorie zu machen, um mit Hilfe funktionentheoretischer Überlegungen zur allgemeinsten Darstellung der doppeltperiodischen Funktionen zu gelangen (H. Weber[27], Hancock[31]). Oder endlich man wählt die Theorie der doppeltperiodischen Funktionen zum Ausgangspunkt, und dieser Weg führt schneller und mit befriedigender Strenge ins Innere der Theorie (Liouville, Eisenstein, Riemann-Stahl[22], Weber[27], Krause[17], Tannery-Molk[16], Fricke[23]) Noch kürzer kann man mit Jacobi von den trigonometrischen Reihen der Thetas oder mit Weierstraß von der Produktdarstellung der Sigmas (vgl dazu eine Notiz von Schoenflies, *Arch. Math. Ph.* (3) 8, 234) oder mit Runge (*Theorie und Praxis der Reihen*, Leipzig 1904, S. 216) von den beiden Entwickelungen der Thetas

als Produkt und Reihe ausgehen, und dieses Verfahren dürfte, weil von allem historischen Ballast befreit, am schnellsten in die Theorie einführen (Schellbach[2], Pascal[19], Appell-Lacour[25], L. Lévy[21], Riemann-Stahl[22], M. Krause[32]; vgl. dazu E. Jahnke, *Jahresber. D. M. V.* **12**, 96) und sich überall da empfehlen, wo es sich darum handelt, gerade so viele Kenntnisse zu übermitteln, als für die Anwendungen der elliptischen Funktionen auf Probleme der Geometrie, Mechanik, der mathematischen Physik und Technik erforderlich ist.

Will man von der Geometrie aus einen Eingang zu den elliptischen Funktionen gewinnen, so bietet sich dazu in naturgemäßer Weise die Theorie der Kurven 3. Ordnung Statt dessen wählt Halphen[9] eine elementare Aufgabe der Geometrie als Eingang in die Theorie; (vgl. auch Kokott, *Arch. Math. Ph.* (3) **7**, 226, 1902). A. Seiffert (*Progr. Realsch.* Charlottenburg 1896) schlägt eine Gattung sphärischer Kurven, die zu den Loxodromen in einfacher Beziehung stehen, für die Einführung in die Theorie vor. Greenhill[13] benutzt im Anschluß an Euler das einfache Pendel zur Einführung der elliptischen Funktionen durch Inversion des Legendreschen Integrals erster Gattung und entwickelt die Theorie in unmittelbarem Anschluß an bestimmte Probleme der Physik und Geometrie.

**Verzeichnis der bekanntesten Lehrbücher und Monographien, auf die zum größten Teil im vorstehenden Bericht hingewiesen wird.**

1 Legendre, Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes. 3 Bde. Paris 1825—1828

2. K H Schellbach, Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunktionen. Berlin 1864, G Reimer

3. J. Bertrand, Traité de calcul intégral, Paris 1870, Gauthier-Villars

4. L Königsberger, Die Transformation, die Multiplikation und die Modulargleichungen der elliptischen Funktionen. Leipzig 1868, B. G. Teubner.

5. L Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen. 2 Teile. Leipzig 1874, B. G. Teubner

6 Briot-Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques. 2$^e$ éd. Paris 1875, Gauthier-Villars; deutsch: Halle 1862.

7. K. Weierstraß-H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Göttingen 1883. 2 Ausg. Berlin 1893, J. Springer.

8. Ch. Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris 1885, Gauthier-Villars.

9. G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. 3 Bde. Paris 1886—1891, Gauthier-Villars.

10. A. Enneper, Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte. 2. Aufl von F. Müller Halle 1890, L. Nebert.

11. J Thomae, Abriß einer Theorie der komplexen Funktionen und der Thetafunktionen einer Veränderlichen. 3. Aufl. Halle 1890, L. Nebert.

12. F Klein-R. Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Leipzig 1890—1892, B. G. Teubner

13. A. G. Greenhill, The applications of elliptic functions London 1892, Macmillan and Co

14. A C. Dixon, The elementary properties of the elliptic functions. London 1893, Macmillan and Co.

15. E. Study, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen. Leipzig 1893, S. Hirzel.

16. J. Tannery-J. Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques 4 Bde Paris 1893—1902, Gauthier-Villars.

17. M. Krause, Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Größe. 2 Bde. Leipzig 1895—1897. B. G. Teubner.

18. O Schlömilch, Compendium der höheren Analysis. 2 Bde 5. und 4. Aufl Braunschweig 1881, 1895, Vieweg u S., 6 Aufl., bearb. von A. Kneser, 1 Band, 1923.

19. E. Pascal, Teoria delle funzioni ellitiche Mailand 1896, U. Hoepli

20 P. Appell-E Lacour, Principes de la théorie des fonctions elliptiques. Paris 1897, Gauthier-Villars

21 L Lévy, Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications Paris 1898, Gauthier-Villars.

22. B. Riemann, Elliptische Funktionen Her. von H. Stahl. Leipzig 1899, B G. Teubner

23. R. Fricke, Kurzgefaßte Vorlesungen über verschiedene Gebiete der hoheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen Leipzig 1900, B. G Teubner.

24. J Houel, Recueil de formules et de tables numériques 3e éd. Paris 1901, Gauthier-Villars.

25. A Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig 1903, B G Teubner

26. J Thomae, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. Leipzig 1905, B. G Teubner.

27. H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Lehrbuch der Algebra. Bd. 3. 2. Aufl. Braunschweig 1908, Vieweg u. S.

28. H. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen. In 5. Aufl. neubearb. von L. Maurer, Leipzig 1908, B. G. Teubner.

29. K. Boehm, Elliptische Funktionen. 2 Bde. Sammlung Schubert. Leipzig 1908—1910, W. de Gruyter u. Co.

30. E. Jahnke-F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Sammlg. math.-phys. Lehrb. Bd. 5. Leipzig 1909, B. G. Teubner.

31. H Hancock, Lectures on the theory of elliptic functions. Vol. I. New York 1910, J. Wiley and Sons.

32. M. Krause, Theorie der elliptischen Funktionen Sammlg. math-phys Lehrb Bd. 13, her. von E. Jahnke. Leipzig 1912, B G. Teubner.

33. R. Fricke, Elliptische Funktionen. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. II, 2, S. 177—348. Leipzig 1913, B. G Teubner.

34. R Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen 2 Teile Leipzig 1916, 1922, B. G Teubner.

35. H Burkhardt, Elliptische Funktionen 3. Aufl. bearbeitet von G. Faber. Berlin 1920, W. de Gruyter u. Co.

36. A. Hurwitz, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie u. elliptische Funktionen Herausgegeben von R. Courant. Berlin 1922, J. Springer.

# Kapitel XVII.

## Algebraische Funktionen und ihre Integrale.

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle a. d. S.

### § 1. Allgemeines über die algebraischen Funktionen.

Ist $f(x, y)$ eine ganze rationale und im Bereich der rationalen Funktionen von $x$ unzerlegbare Funktion von $x$ und $y$, in $x$ vom Grade $m$ und in $y$ vom Grade $n$, so wird $y$ durch die Gleichung $f = 0$ als *algebraische Funktion* von $x$ definiert. Jede rationale Funktion von $x, y$ genügt dann einer Gleichung $n$-ten Grades mit rationalen Funktionen von $x$ als Koeffizienten. Diese Gleichung ist entweder irreduzibel oder sie zerfällt in mehrere miteinander identische Gleichungen. Es sind also alle rationalen Funktionen von $x, y$ algebraische Funktionen von $x$. Die Gesamtheit dieser Funktionen nennt man *algebraisches Gebilde* oder einen durch die Gleichung $f = 0$ definierten *algebraischen Korper*. Der Körper werde mit $K$ bezeichnet.

Wir betrachten die Funktionen aus $K$ in der Umgebung einer Stelle $x = a$. Fur die Umgebung jeder solchen Stelle läßt sich $f(x, y)$ in Faktoren zerlegen, die ganze rationale Funktionen von $y$ sind mit Potenzreihen nach *ganzen* Potenzen von $x - a$ als Koeffizienten, und die sich selbst nicht weiter in derselben Art zerlegen lassen. Diese Zerlegung ist bis auf konstante Faktoren eindeutig; sie sei

$$f = f_1 f_2 \ldots f_\mu,$$

und es sei $\nu_i$ der Grad von $f_i$ in $y$ Der Faktor $f_i$, gleich Null gesetzt, liefert fur $y$ eine Entwicklung nach Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\nu_i}}$, die höchstens eine *endliche* Anzahl von negativen Potenzen enthält $(x - a)^{\frac{1}{\nu_i}}$ kann $\nu_i$ verschiedene Werte be-

sitzen, die durch Multiplikation mit einer Potenz der $\nu_i$-ten Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{\nu_i}}$ aus einem von ihnen hervorgehen. Diesen $\nu_i$ Werten von $(x-a)^{\frac{1}{\nu_i}}$ entsprechen $\nu_i$ aus dem Faktor $f_i$ entspringende Entwicklungen von $y$ für die Umgebung von $x=a$. Im ganzen bekommen wir $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\mu=n$ Entwicklungen für die Stelle $a$, von denen die zu demselben $f_i$ gehörenden ineinander übergeführt werden können dadurch, daß man $x$ den Punkt $a$ umlaufen läßt. Die $n$ so erhaltenen Entwicklungen nennt man zueinander *konjugiert*. (Reihenentwicklungen algebraischer Funktionen finden sich zuerst bei Newton, I. Newton, *Geometria analytica sive specimina artis analyticae* (1779) in *Isaaci Newtoni Opera, quae exstant omnia,* comm. S. Horsley, London, **1**, S. 391—518, 1779. Newton benutzt dabei ein nach ihm benanntes Diagramm. Diese Methode, formal die Reihenentwicklungen zu bestimmen, vervollkommnete Puiseux. Puiseux, *Recherches sur les fonctions algébriques, J. de math.* **15**, S. 365, 1850)

Setzen wir die Entwicklung, die sich aus dem Faktor $f_i$ für $y$ ergibt, in die Funktionen aus $K$ ein, so werden sie Potenzreihen von $(x-a)^{\frac{1}{\nu_i}}$, die nur eine endliche Zahl negativer Potenzen enthalten. Unter diesen gibt es immer solche, die, nach steigenden Potenzen von $(x-a)$ geordnet, mit der ersten Potenz von $(x-a)^{\frac{1}{\nu_i}}$ beginnen. Setzen wir eine derartige Funktion gleich $t$, so werden alle Funktionen aus $K$ nach *ganzen* Potenzen von $t$ entwickelbar. Setzen wir dann $t=0$, so nehmen alle Funktionen konstante Werte (einschließlich $\infty$) an. Die Gesamtheit dieser Werte nennt man eine *Stelle* $\mathfrak{p}$ *des Körpers* oder algebraischen Gebildes. Die Werte, die die Funktionen für kleine Werte von $t$ annehmen, bilden die *Umgebung der Stelle* $\mathfrak{p}$. Der Stelle $x=a$ entsprechen so, wenn $\mu$ die Zahl der Faktoren ist, in die $f$ für die Umgebung von $x=a$ zerfällt, $\mu$ verschiedene Stellen. Eine Stelle von $K$ ist also noch nicht eindeutig definiert, wenn der Wert von $x$ an dieser Stelle gegeben ist, auch noch nicht, wenn außerdem der zugehörige Wert von $y$ gegeben ist. Wohl aber ist die Stelle und ihre Umgebung vollkommen definiert durch Angabe der Entwicklungen von $x$ und $y$. Nach Weierstraß heißt die Gesamtheit der Entwicklungen der Funktionen aus $K$ nach der Hilfsgröße $t$ ein *Element des algebraischen Gebildes*. Es gilt der Satz, *daß eine endliche Zahl*

*von Elementen genügt, um sämtliche Stellen des Körpers zu erhalten.*

Im allgemeinen schreitet die Entwicklung der Hilfsgröße $t$ nach ganzen Potenzen von $x - a$ fort, so daß man $x - a = t$ setzen kann. Nur für eine endliche Zahl von Stellen schreitet die Entwicklung von $t$ nach gebrochenen Potenzen von $x - a$ fort. Solch eine Stelle heißt *singulär* (in bezug auf $x$) und, wenn die Entwicklung nach Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet, *Verzweigungsstelle der Ordnung* $\alpha - 1$. Die zu diesen Stellen gehörenden Werte von $x$ heißen auch singulär. Diese Bezeichnungen gelten nur in bezug auf $x$ als unabhängige Veränderliche, die ja bei der Definition bevorzugt ist. Eine absolut singuläre Stelle besitzt das algebraische Gebilde nicht. Es gilt noch der Satz: *Ist $a$ der Wert, den $x$ an einer singularen Stelle annimmt, so ist $x - a$ ein Faktor der Diskriminante der Gleichung $f = 0$ in bezug auf $y$.* Es gilt aber nicht das umgekehrte.

## § 2. Riemannsche Flächen.

Betrachten wir $y$ als Funktion von $x$, so gehören zu jedem Werte von $x$ stets $n$ Werte von $y$, die zum Teil einander gleich sein können. Es ist also $y$ eine *$n$-deutige* Funktion von $x$. Lassen wir $x$ in seiner Ebene einen geschlossenen Weg beschreiben, so wird, wenn dieser Weg in seinem Innern singuläre $x$-Stellen enthält, im allgemeinen unter den zu $x$ gehörenden $n$ Werten $y$ eine Permutation eintreten. Die Gesamtheit aller so zu erhaltenden Permutationen bildet eine Gruppe, die man die *Monodromiegruppe* nennt. (Ch. Hermite, *Sur les fonctions algébriques, C. R.* **32**, S. 458, 1851; A. Kneser, *Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variabeln, Math Ann* **28**, S. 125, 1887)

Riemann hat auf folgende Weise erreicht, daß $y$ als *eindeutige* Funktion aufgefaßt werden kann. (B. Riemann, *Grundlagen fur eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Große.* Inauguraldiss, Gottingen 1851; *Ges. Werke* **3**, S. 3, 1876) Es sei zunachst der Grad $n$ von $f$ in $y$ gleich 2 Wir können die Gleichung $f = 0$ dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form annehmen:

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{2p+2}), \qquad (a_i \neq a_k).$$

Man nennt in diesem Falle den Körper $K$ *hyperelliptisch* und im Falle $p = 1$ *elliptisch* Singulär sind hier die Stellen

$a_1, a_2 \ldots a_{2p+2}$, und zwar sind es Verzweigungsstellen erster Ordnung. Wir verbinden in der $x$-Ebene die Punkte $a_1, a_2; a_3, a_4; \ldots a_{2p+1}, a_{2p+2}$ durch Linien $l_1, l_2 \ldots l_{p+1}$, die sich nicht selbst und einander nicht schneiden Längs dieser Linien denken wir uns die $x$-Ebene zerschnitten. Wir legen dann zwei längs derselben Linien zerschnittene $x$-Ebenen übereinander. Ist $x = a$ ein regulärer Wert von $x$, so haben wir für $y$ zwei verschiedene Potenzreihen von $x - a$. Jede der beiden Potenzreihen setzen wir in einer der beiden $x$-Ebenen analytisch fort, wobei $x$ die Linien $l_1, l_2, \ldots l_{p+1}$ nicht überschreiten soll. Da $x$ dann nur eine gerade Zahl von Punkten $a_i$ umkreisen kann und sich dabei $y$ nicht ändert, so bekommen wir in jeder der $x$-Ebenen eine eindeutige Funktion von $x$ und die beiden Funktionen (Zweige) zusammengenommen geben uns die Funktion $y$. Verbinden wir längs der Schnitte $l_i$ die Ränder der beiden $x$-Ebenen kreuzweise, so erhalten wir eine *zusammenhängende zweiblattrige Flache*, auf der $y$ eine eindeutige Funktion der Stelle $x$ ist. Die so definierte Fläche heißt *Riemannsche Fläche*. Die Stellen $a_i$, bei deren Umlaufung man von dem einen Blatte in das andere kommt, heißen *Verzweigungs- oder Windungspunkte* (vgl. Kap. XV, § 8).

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, wo der Grad $n$ von $f$ in $y$ größer als 2 ist. Die singulären Werte von $x$ seien $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$. Es sei $a$ ein regulärer Wert von $x$. Wir verbinden $a$ mit den Punkten $a_i$ durch Linien, die sich nicht selbst und einander nicht schneiden, und zerschneiden die $x$-Ebene längs dieser Linien. Wir legen dann $n$ solcher $x$-Ebenen, die längs derselben Linien zerschnitten sind, übereinander. Für die Umgebung einer regulären Stelle $x = b$ haben wir $n$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - b$ für $y$. Jede von diesen setzen wir in einer der $n$ Ebenen analytisch fort, ohne dabei die Schnittlinien zu überschreiten. Da $x$ keinen der singulären Werte umkreisen kann, so bekommen wir in jeder der $n$ Ebenen eine eindeutige Funktion von $x$, und diese $n$ Funktionen stellen in ihrer Gesamtheit die Funktion $y$ dar. Man kann die $n$ Blätter längs der Schnittlinien so vereinigen, daß $y$ eine *stetige und eindeutige Funktion* des Ortes der so entstehenden *n-blattrigen Riemannschen Flache* wird. Die Stellen, wo mehrere Blätter der Fläche zusammenhängen, heißen *Verzweigungs- oder Windungspunkte.* Jeder Stelle der Riemannschen Fläche entspricht eine Stelle des algebraischen Gebildes und umgekehrt Ebenso wie $y$ ist jede Funktion aus $K$ auf der Fläche eindeutig und hat nur polare Unstetigkeiten, und zwar in endlicher Zahl Um-

gekehrt ist jede Funktion mit nur polaren Unstetigkeiten, die auf der Fläche eindeutig ist, eine Funktion aus $K$.

Die Riemannsche Fläche ist durch Angabe ihrer Verzweigungspunkte und deren Ordnung noch nicht bestimmt; es muß auch noch der Zusammenhang der einzelnen Funktionszweige gegeben sein. (J. Thomae, *Beitrag zur Theorie der Abelschen Funktionen*, *J. f. Math* **75**, S. 224, 1873; Hurwitz, *Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, *Math. Ann.* **39**, S. 1, 1891; derselbe, *Über die Anzahl der Riemannschen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, *Math. Ann.* **55**, S. 53, 1902.)

Ist $f(x, y)$ irreduzibel, so besteht die zugehörige Riemannsche Fläche aus einem Stück, sonst zerfällt sie in so viele untereinander nicht zusammenhängende Teile wie $f$ irreduzible Faktoren hat.

Man kann die Riemannsche Fläche durch stereographische Projektion auf eine *Kugel* abbilden. Man bekommt dann eine allseitig geschlossene $n$-blättrige Fläche. Diese darf man stetig deformieren, ohne daß sie dadurch ihre wesentliche Eigenschaft verlöre, daß $y$ eine eindeutige Funktion des Ortes der Fläche ist. Dadurch kann man der Fläche mannigfache Formen geben. Z. B. kann man die Fläche in eine *mit $p$ Henkeln versehene Kugelfläche* verwandeln, wo $p$ die weiter unten definierte Zahl ist. Diese Veranschaulichung ist zuerst veröffentlicht von Tonelli (Tonelli, *Linc. Atti* (2) **2**, S. 594, 1875 und *Linc. Rend.* (5) **4**, S. 300, 1895), war aber schon Riemann bekannt.

Es gelten für Flächen wie die hier betrachteten folgende Definitionen der *analysis situs*. Bei einer mit einem oder mehreren Rändern versehenen Fläche nennt man *Querschnitt* eine sich selbst nicht schneidende Linie, die zwei Punkte des Randes miteinander verbindet, wobei der schon gezeichnete Teil der Linie als Rand gilt. Wird eine Fläche durch jeden Querschnitt in zwei getrennte Teile zerlegt, so nennt man sie *einfach zusammenhängend*. Kann man dagegen in der Fläche $\nu$ Querschnitte zeichnen, ohne daß sie zerfällt, während sie durch $\nu + 1$ Querschnitte immer zerfällt, so nennt man die Fläche *$(\nu + 1)$-fach zusammenhängend* oder man sagt, die *Ordnung ihres Zusammenhanges ist* $\nu + 1$. Sie läßt sich dann durch $\nu$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln. Hat eine Fläche keine Begrenzung, so versieht man sie mit einem Loch, man „punktiert" die Fläche und wendet dann die gegebenen Definitionen auf sie an. Die Ordnung des Zusammenhangs einer Riemann-

schen Fläche ist immer eine *ungerade* Zahl, die man mit $2p+1$ zu bezeichnen pflegt. Die so definierte Zahl $p$ heißt das *Geschlecht* der Riemannschen Fläche und des algebraischen Körpers $K$ (bei Weierstraß *Rang*). Zwischen der Zahl $p$, der Zahl $n$ der Blätter der Riemannschen Fläche und den Ordnungen $\alpha - 1$ der Verzweigungspunkte besteht die wichtige Gleichung

$$p = \sum \frac{\alpha - 1}{2} - n + 1.$$

Ferner gilt folgender Satz: *Man kann auf einer Riemannschen Fläche, deren Geschlecht $p$ ist, $2p$ geschlossene Kurven zeichnen, ohne daß dadurch die Fläche in getrennte Teile zerlegt würde.* Diese Kurven schneiden sich zu je zweien in einem Punkt, während sie einander im übrigen nicht treffen. $2p$ solche Kurven bezeichnen wir mit $K_i$, $K_i'$ $(i = 1, 2, \ldots p)$, wobei immer $K_i$ und $K_i'$ sich in einem Punkte schneiden sollen. Man nennt auch diese Kurven *Querschnitte* oder nach Weierstraß *Kreise*. Man kann diese Querschnitte dazu benutzen, um durch $2p$ Querschnitte in der zuerst angegebenen Bedeutung die Riemannsche Fläche in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Zunächst punktiert man die Fläche, indem man ein kleines Loch anbringt. Dann nimmt man als $i$-ten Querschnitt eine Linie $C_i^1$, die von dem Loch nach einem Punkte von $K_i$ geht, und $K_i$, und als $2i$-ten Querschnitt $K_i'$. Die so gewonnene Zerschneidung heißt *kanonische* Zerschneidung. Sie läßt sich auf mannigfache Art ausführen.

Im Falle der zweiblättrigen Riemannschen Fläche kann man die Querschnitte folgendermaßen wählen. Für $K_i$ nimmt man eine geschlossene Kurve, die von den singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots a_{2p+2}$ die beiden Punkte $a_{2i-1}, a_{2i}$ einschließt, und für $K_i'$ eine geschlossene Kurve, die die Punkte $a_{2i}, a_{2i+1} \ldots a_{2p+1}$ einschließt. (F. Prym, *Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche, Züricher N. Denkschr.* **22**, S. 11, 1867.)

## § 3. Die Funktionen des Körpers.

Es sei $\mathfrak{p}$ eine Stelle des Körpers $K$ oder der Riemannschen Fläche und es sei $t$ eine solche Funktion aus $K$, daß sich alle Funktionen aus $K$ als Potenzreihen nach ganzen Potenzen von $t$ darstellen lassen Man ordnet (nach Hensel) jeder Stelle $\mathfrak{p}$ einen *Primteiler* $\mathfrak{p}$ zu, indem man definiert: eine Funktion ist durch $\mathfrak{p}^\lambda$ teilbar, wenn ihre Entwicklung nach steigenden Po-

tenzen von $t$ mit der $\lambda$-ten Potenz von $t$ beginnt. Unter $\mathfrak{p}^0$ ist dabei 1 zu verstehen. Ist $\lambda$ positiv, so sagt man, die Funktion wird an der Stelle *Null* von der Ordnung $\lambda$; ist $\lambda$ negativ, so sagt man, die Funktion wird an der Stelle *unendlich* von der Ordnung $-\lambda$. Sind $\xi$ und $\eta$ zwei Funktionen aus $K$, so nennt man den Faktor von $t^{-1}$ in der Entwicklung von $\eta d\xi$ nach Potenzen von $t$ das *Residuum des Differentials* $\eta d\xi$ für die betreffende Stelle. Im besonderen gilt: Ist $\mathfrak{p}$ eine Verzweigungsstelle der Ordnung $\alpha - 1$ in bezug auf $x$ und hat $x$ in $\mathfrak{p}$ den Wert $a$, so ist das Residuum von $\eta dx$ an der Stelle $\mathfrak{p}$ gleich dem mit $+\alpha$ multiplizierten Koeffizienten von $(x-a)^{-1}$ in der für die Umgebung von $\mathfrak{p}$ geltenden Entwicklung von $\eta$ nach steigenden Potenzen von $x - a$, wenn $a$ endlich ist, und gleich dem mit $-\alpha$ multiplizierten Koeffizienten von $x^{-1}$ in der für die Umgebung von $\mathfrak{p}$ geltenden Entwicklung von $\eta$ nach fallenden Potenzen von $x$, wenn $a$ unendlich ist. Die Werte, die eine Funktion $R$ annimmt, wenn man $y$ durch seine konjugierten Werte ersetzt, heißen mit $R$ zusammen die *n konjugierten* Werte von $R$. Ihr Produkt heißt die *Norm*, ihre Summe die *Spur* von $R$ (in bezug auf $x$).

Es gelten folgende Sätze:

*Jede Funktion aus K hat nur polare Unstetigkeiten, und diese dann natürlich nur in endlicher Zahl.* Denn unendlich viele polare Unstetigkeiten einer Funktion würden mindestens eine Häufungsstelle haben, und diese würde für die Funktion wesentlich singulär sein.

*Die Zahl der Null- und Unendlichkeitsstellen einer Funktion aus K ist endlich.*

*Jede Funktion aus K hat gleich viel Null- und Unendlichkeitsstellen,* wenn man jede dieser Stellen so oft rechnet, wie ihre Ordnung angibt.

Etwas allgemeiner kann man sagen: Jede Funktion aus $K$ nimmt jeden Wert gleich oft an. Die Zahl, die angibt, wie oft eine Funktion jeden Wert annimmt, heißt der *Grad der Funktion*.

*Die Summe aller Residuen eines Differentials des Körpers ist Null.*

Es gibt keine Funktion des Körpers, die *nur* an *p beliebig* gegebenen Stellen von der ersten Ordnung Null wird, wohl aber Funktionen, die an $p + 1$ beliebig gegebenen Stellen unendlich werden, wo $p$ das Geschlecht des Körpers bedeutet. Weierstraß definiert durch diese Eigenschaft das Geschlecht. Es gibt

aber immer Funktionen in $K$, die nur an $\frac{p+2}{2}$ oder $\frac{p+3}{2}$ speziellen Stellen unendlich werden, je nachdem $p$ gerade oder ungerade ist, und es gibt keine Funktionen geringeren Grades in $K$, wenn $K$ nicht von spezieller Beschaffenheit ist.

Betrachtet man alle Funktionen aus $K$, die nur an einer Stelle $\mathfrak{p}$ unendlich werden, und die Zahlen, die angeben, von welcher Ordnung diese Funktionen unendlich werden, so kommen unter diesen Zahlen, die ja alle positive ganze Zahlen oder Null sind, nicht *alle* ganzen positiven Zahlen vor, sondern es *fehlen genau* $p$. Diese fehlenden Zahlen sind für alle Stellen mit Ausnahme einer endlichen Zahl die Zahlen von 1 bis $p$. Die Ausnahmestellen heißen *Weierstraßpunkte*, da Weierstraß zuerst auf sie aufmerksam gemacht hat. Wenn $p = 0$ oder $p = 1$, so gibt es keine Weierstraßpunkte; wenn $p > 1$, so ist für einen hyperelliptischen Körper die Zahl der Weierstraßpunkte gleich $2(p+1)$, für einen anderen Körper aber immer größer als $2(p+1)$.

Will man eine Funktion aus $K$ charakterisieren, so kann man entweder die Unendlichkeitsstellen und die Art des Unendlichwerdens, d. h. den absteigenden Teil in der Entwicklung der Funktion nach Potenzen der Hilfsgröße $t$, angeben oder man gibt die Null- und Unendlichkeitsstellen an Die erste Methode, die Weierstraß hauptsächlich benutzt, fuhrt zu einer Art Partialbruchzerlegung, die zweite zur Zerlegung in Primteiler *Weierstraß bildet eine Funktion* $H(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, die an einer Stelle $\mathfrak{p}'$ und außerdem noch an $p$ beliebig, aber fest gegebenen Stellen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_p$ unendlich erster Ordnung wird. Um dann eine Funktion zu bestimmen, die an $\lambda$ gegebenen Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\lambda$ von erster Ordnung unendlich wird, bildet man die Funktion

$$c_1 H(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1) + c_2 H(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_2) + \cdots + c_\lambda H(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_\lambda),$$

Hierin sind die Konstanten $c_s$ nicht willkürlich, sondern müssen so bestimmt werden, daß die Funktion an den Stellen $\mathfrak{a}_i$ nicht unendlich wird. Aus der Funktion $H(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ kann man Funktionen herleiten, die außer an den Stellen $\mathfrak{a}_s$ nur an der Stelle $\mathfrak{p}'$ unendlich werden, aber von *beliebig gegebener Ordnung*. Man kann dann jede Funktion als Summe dieser Funktionen mit konstanten Koeffizienten darstellen Die Bedingungen, die zwischen den Koeffizienten bestehen müssen, damit die dargestellte Funktion an den festen Stellen $\mathfrak{a}_i$ nicht unendlich wird, fuhren zu dem *Riemann-Rochschen Satz* (siehe § 6).

Die Darstellung einer Funktion $R$ durch Primfaktoren geschieht mit Hilfe der im Anfang dieses Paragraphen definierten Primteiler, indem man für jeden zu den Null- und Unendlichkeitsstellen gehörenden Primteiler feststellt, in welcher Potenz er in $R$ enthalten ist. Da eine Funktion aus $K$ nur eine endliche Zahl von Null- und Unendlichkeitsstellen hat, so läßt sich jede Funktion in eine endliche Zahl von Primfaktoren zerlegen. Diese Zerlegung ist bis auf konstante Faktoren eindeutig. Hierdurch wird die Funktion zunächst nur beschrieben, man erhält keine arithmetische Darstellung für sie (vgl. § 12).

Man nennt (nach Hensel) das Produkt irgendwelcher Primfaktoren, jeden zu irgendeiner positiven oder negativen ganzzahligen Potenz erhoben, einen *Divisor*. Die *Summe aller Exponenten* heißt die *Ordnung* des Divisors. Da jede Funktion aus $K$ gleichviel Null- und Unendlichkeitsstellen hat, so ist sie ein Divisor der Ordnung Null. Aber es gilt nicht das Umgekehrte. Ein Divisor heißt *ganz*, wenn die Exponenten aller in ihm enthaltenen Primteiler *nicht negativ* sind. Ein Divisor heißt durch einen zweiten *teilbar*, wenn der *Quotient ganz* ist.

Unter den Divisoren sind einige von besonderer Bedeutung.

1. Das Produkt aller Verzweigungsprimteiler, *jeder in der Potenz genommen, die seine Ordnung angibt*, heißt *Verzweigungsdivisor;* er werde mit $\mathfrak{z}_x$ bezeichnet und seine Ordnung, die immer *gerade* ist, mit $w_x$. Er hängt von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen $x$ ab.

2. Es ist, wenn man den Nennerdivisor einer Funktion $R$ mit $\mathfrak{n}_R$ bezeichnet,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathfrak{z}_x \mathfrak{d}}{\mathfrak{n}_x^m \mathfrak{n}_y^{n-2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathfrak{z}_y \mathfrak{d}}{\mathfrak{n}_x^{m-2} \mathfrak{n}_y^n}.$$

Der hierdurch definierte, *immer ganze,* Divisor $\mathfrak{d}$ heißt Doppelpunktdivisor, weil er Null wird an den Stellen und nur an den Stellen, wo die Kurve $f(x, y) = 0$ mehrfache Punkte hat (vgl. § 7) Über den Doppelpunktdivisor $\mathfrak{d}$ gilt folgender wichtige Satz:

*Ist $R$ eine Funktion aus $K$ und ist, in Faktoren zerlegt,*

$$R = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{g}}{\mathfrak{n}_x^\lambda \mathfrak{n}_y^\mu},$$

*wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor ist, so laßt sich $R$ darstellen als ganze rationale Funktion von $x$, $y$ Ist $\lambda \leqq m$, $\mu \leqq n$, so ist diese*

*ganze rationale Funktion so zu wählen, daß sie in $x$ höchstens vom Grade $\lambda$ und in $y$ höchstens vom Grade $\mu$ ist.* Dieser Satz ist im wesentlichen gleichbedeutend mit dem *Noetherschen Schnittpunktsatz.* Der Noethersche Satz geht aber tiefer. (M. Noether, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen, Math. Ann.* **2**, S. 293—316, 1870, und *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen, Math. Ann.* **6**, S. 351, 1873.)

Die Hauptaufgabe besteht darin, alle Funktionen zu finden, die *Vielfache* eines gegebenen Divisors $\mathfrak{q}$ sind. Hensel und Landsberg verfahren in ihrem Buche so, daß sie zunächst alle Funktionen bestimmen, die der verlangten Bedingung genügen bis auf die Stellen, die zu einem gegebenen Werte $a$ einer Größe $x$ gehören. Dann werden die verfügbaren Konstanten so bestimmt, daß die gefundenen Funktionen auch bei Berücksichtigung der zu $x = a$ gehörenden Primteiler Vielfache von $\mathfrak{q}$ sind. Auch hier führt die genaue Betrachtung der Bedingungen, denen die Konstanten genügen müssen, zum Riemann-Rochschen Satz.

## § 4. Birationale Transformationen.

Greift man zwei beliebige Funktionen $\xi$, $\eta$ aus $K$ heraus, so besteht zwischen ihnen immer eine algebraische Gleichung, und der dadurch definierte algebraische Körper $K(\xi, \eta)$ ist in $K(x, y)$ enthalten, braucht aber nicht mit ihm identisch zu sein Ist aber $\xi$ beliebig (nicht konstant) gewählt, so kann man immer auf unendlich viele Arten $\eta$ aus $K$ so bestimmen, daß $K(\xi, \eta)$ und $K(x, y)$ miteinander identisch sind, so daß alle Funktionen aus $K(x, y)$, also auch $x$ und $y$, rationale Funktionen von $\xi$, $\eta$ werden. Da aber auch umgekehrt $\xi$ und $\eta$ rationale Funktionen von $x$, $y$ sind, so nennt man den Übergang von den Veränderlichen $x$, $y$ zu $\xi$, $\eta$ *birationale Transformation*

Geradeso wie wir zu $x$ als unabhängiger Veränderlichen eine Riemannsche Fläche konstruiert haben, können wir nun auch zu der beliebigen Größe $\xi$ als unabhängiger Veränderlichen eine Riemannsche Fläche konstruieren. Die Zahl der Blatter dieser Fläche ist gleich dem Grade $n_\xi$ von $\xi$. Jede Funktion aus $K$ genügt einer Gleichung vom Grade $n_\xi$ mit rationalen Funktionen von $\xi$ als Koeffizienten. Die Gleichung ist entweder unzerlegbar oder sie zerfällt in untereinander identische Gleichungen (vgl. § 1). Ist die Gleichung fur eine Größe $\eta$ irre-

duzibel, so ist der Körper $K(\xi, \eta)$ mit $K(x, y)$ identisch, sonst nicht. Die Größe $\eta$ heißt in diesem Falle eine primitive Größe des Körpers in bezug auf $\xi$.

Die beiden Riemannschen Flächen $R_x$ und $R_\xi$ entsprechen einander Punkt für Punkt und haben denselben Zusammenhang. Der zu $R_\xi$ gehörende Verzweigungsdivisor sei $\mathfrak{z}_\xi$, seine Ordnung $w_\xi$. $\mathfrak{z}_x$ und $\mathfrak{z}_\xi$ haben im allgemeinen keinen gemeinsamen Primteiler. Es gilt die wichtige Zerlegung

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\mathfrak{z}_x \mathfrak{n}_\xi^2}{\mathfrak{z}_\xi \mathfrak{n}_x^2}.$$

Da $dx/d\xi$ eine Funktion des Korpers ist, so ist die Ordnung des zugehörigen Divisors Null. Daraus folgt

$$2p - 2 = w_x - 2n_x = w_\xi - 2n_\xi.$$

Es haben also die beiden Flächen $R_x$ und $R_\xi$ dasselbe Geschlecht $p$, so daß $p$ birationalen Transformationen gegenüber *invariant* ist. Man ist also berechtigt, schlechtweg vom *Geschlechte des Körpers* $K$ zu sprechen.

Gibt es in $K$ eine Funktion $\xi$ ersten Grades und nehmen wir diese als unabhängige Veränderliche, so werden die Gleichungen, denen die Funktionen genügen, vom ersten Grade, die Funktionen werden also rational in $\xi$. Die Riemannsche Fläche $R_\xi$ wird einblättrig, hat also keine Verzweigungspunkte, und es wird daher das Geschlecht $p$ gleich *Null*. Da es im Körper $K$ immer Funktionen vom Grad $p + 1$ gibt, so existieren umgekehrt im Fall $p = 0$ immer Funktionen ersten Grades

Gibt es im Körper eine Funktion $\xi$ zweiten Grades, so genügen alle Funktionen Gleichungen *zweiten* Grades; wir haben also den Fall des *hyperelliptischen* Körpers. Da es immer Funktionen vom Grade $\frac{1}{2}(p + 2)$ oder $\frac{1}{2}(p + 3)$ gibt, je nachdem $p$ gerade oder ungerade ist, so sind die Körper vom Geschlechte $p = 1$ (der *elliptische* Körper) und $p = 2$ *immer hyperelliptisch.*

Man kann die birationale Transformation dazu benutzen, eine möglichst einfache Gleichung zur Definition von $K$ zu bekommen Dabei ist natürlich nicht vollkommen bestimmt, was man unter möglichst einfach verstehen soll. Ist $K$ hyperelliptisch, so wird man die Definitionsgleichung als *reine Gleichung zweiten Grades* wählen. Im allgemeinen Falle kann man die Gleichung z B. so wählen, daß sie von *moglichst niedrigem*

*Grade* ist, oder so, daß nur *Verzweigungsstellen erster Ordnung* vorkommen. Über eine weitere wichtige Vereinfachung der Gleichung durch birationale Transformation vgl. § 7.

Ferner kann man die neuen Veränderlichen $\xi$, $\eta$ so wählen, daß in der zwischen ihnen bestehenden Gleichung *möglichst wenig verfügbare* Konstanten vorkommen. Diese Konstanten nennt man die *Moduln des Körpers*. Die Zahl der Moduln ist, wenn der Körper nicht besonders eingeschränkt ist, für $p = 0$ gleich Null, für $p = 1$ gleich 1 und für $p > 1$ im hyperelliptischen Falle gleich $2p - 1$, *im allgemeinen Falle gleich* $3p - 3$.

Schließlich kann man danach fragen, ob man nicht $\xi$, $\eta$ so wählen kann, daß die zwischen $\xi$, $\eta$ bestehende Gleichung mit der Gleichung zwischen $x$, $y$ identisch wird, ob also der Körper *Transformationen in sich* zuläßt. Es ergibt sich: Ist $p = 0$, so hat $K$ $\infty^3$ Transformationen in sich, für $p = 1$ hat $K$ $\infty^1$ solche Transformationen, in allen anderen Fällen, wenn überhaupt, nur eine *endliche* Zahl. Das kommt daher, daß bei einer Transformation in sich die Weierstraßpunkte wieder in Weierstraßpunkte übergehen müssen. (H. A. Schwarz, *Über diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Größen, welche eine Schar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen, J. f. Math.* **87**, S. 139, 1879; *Ges. Abhandl.* **2**, S. 285, 1890; M. Noether, *Note über die algebraischen Kurven, welche eine Schar eindeutiger Transformationen in sich zulassen, Math. Ann.* **20**, S. 59, 1882; Nachtrag hierzu *Math. Ann.* **21**, S. 138, 1883.)

## § 5. Die Differentiale und Integrale des Körpers.

(Vgl. auch § 10.)

Ist $R$ eine Funktion des Körpers $K$, so nennt man $R\,dx$ ein Abelsches Differential und $\int R\,dx$ ein Abelsches Integral. Hierbei ist die Veränderliche $x$ bevorzugt. Es ist aber, wie schon früher angegeben, $\mathfrak{n}_x^2 \mathfrak{z}_x^{-1} dx = \mathfrak{n}_\xi^2 \mathfrak{z}_\xi^{-1} d\xi$. Schreibt man daher das Differential in der Form:

$$d\omega = \mathfrak{w}\,\frac{\mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{z}_x}\,dx = \mathfrak{w}\,\frac{\mathfrak{n}_\xi^2}{\mathfrak{z}_\xi}\,d\xi\,,$$

so ist der hierdurch definierte Divisor $\mathfrak{w}$ durch das Differential eindeutig bestimmt und *unabhängig von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen*, also bei birationalen Transformationen *invariant*. $\mathfrak{w}$ heißt der zu dem Differential $d\omega$ gehörende *Diffe-*

*rentialteiler*. Als *Ordnung* eines Differentialteilers ergibt sich, da $\mathfrak{w}\mathfrak{n}_x^2\mathfrak{z}_x^{-1}$ eine Funktion des Körpers ist und daher die Ordnung Null hat, $w_x - 2n_x = 2p - 2$.

Ist $t$ eine Funktion aus $K$, die an der Stelle $\mathfrak{p}$ von der ersten Ordnung Null wird, so läßt sich das Differential $d\omega$ in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ darstellen in der Form

$$d\omega = t^{\lambda} E(t)\, dt,$$

wo $E$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $t$ ist, die für $t = 0$ nicht verschwindet. Man sagt, das Differential wird an der Stelle $\mathfrak{p}$ von der Ordnung $\lambda$ *Null* oder von der Ordnung $-\lambda$ *unendlich*. Da die Ordnung eines Differentialteilers $2p - 2$ ist, so ist die Zahl der Nullstellen eines Differentials immer um $2p - 2$ größer als die der Unendlichkeitsstellen, wenn jede Stelle so oft gezählt wird wie ihre Ordnung angibt.

Wird ein Differential an der Stelle $\mathfrak{p}$ von der Ordnung $\nu$ unendlich, so wird das Integral, wenn $\nu = 1$, logarithmisch unendlich, wenn $\nu > 1$, unendlich von der Ordnung $\nu - 1$. Im Falle des logarithmischen Unendlichwerdens nennt man den Faktor von $\log t$ in der Entwicklung des Integrals das *Residuum des Integrals*. Es ist gleich dem Residuum des Integranden. Daher gilt auch für Integrale der Satz: *Die Summe aller Residuen eines Integrals ist Null.* Andere als die angegebenen *logarithmischen und polaren Unstetigkeiten* haben die Abelschen Integrale nicht.

Man teilt die Integrale (und Differentiale) in drei *Arten* oder *Gattungen* ein. *Erster Gattung* heißen diejenigen, die *nirgends unendlich* werden, deren zugehöriger Differentialteiler also ganz ist; *zweiter Gattung* diejenigen, die *nur polare Unstetigkeiten* haben; *dritter Gattung* diejenigen, die *logarithmisch unendlich* werden. Man rechnet auch wohl die Integrale erster Gattung zu denen zweiter Gattung und nennt dann ein Integral zweiter Gattung, das wirklich unendlich wird, ein eigentliches Integral zweiter Gattung. Diese Einteilung stammt von Riemann. (Siehe dessen Abelsche Funktionen.)

Die Integrale sind *nicht* eindeutige Funktionen der Stellen des algebraischen Gebildes oder der Stellen einer zum Körper $K$ gehörenden Riemannschen Fläche. Da aber die Differentiale eindeutig sind, so können sich die verschiedenen Werte, die ein Integral an einer Stelle annimmt, nur durch konstante Summanden unterscheiden. Diese Konstanten nennt man *Perioden* oder *Periodizitätsmoduln*. Weiteres darüber siehe § 10.

Man nennt eine Anzahl Integrale *linear unabhängig,* wenn zwischen ihnen *keine lineare homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten* besteht. Es gibt *p linear unabhängige Integrale erster Gattung.* Es lassen sich ferner *p Integrale zweiter Gattung* so auswählen, daß sich jedes Integral mit nur polaren Unstetigkeiten darstellen läßt als *Summe dieser p, mit konstanten Koeffizienten multiplizierten, Integrale, eines Integrals erster Gattung und einer Funktion des Korpers K.*

Da die Summe der Residuen eines Integrals Null ist, so gibt es kein Integral, das nur an einer Stelle logarithmisch unendlich würde. Wohl aber gibt es immer ein Integral, das an zwei beliebig gegebenen Stellen nur logarithmisch unendlich wird und sonst nirgends unendlich wird. Ein solches Integral nennt man ein *Elementarintegral dritter Gattung. Jedes Integral laßt sich als Summe von Elementarintegralen dritter Gattung und Integralen erster und zweiter Gattung darstellen.*

Die Integrale erster und zweiter Gattung verhalten sich in der Umgebung jeder Stelle von *K* wie die Funktionen aus *K*. Erweitert man den Körper *K* durch Hinzufügen aller Integrale erster und zweiter Gattung, so gilt für den neuen Körper *K'* der Satz: Es gibt Funktionen, die an beliebig gegebenen Stellen von beliebig gegebener Ordnung und sonst nirgends unendlich werden, also z. B. auch Funktionen, die nur an einer Stelle von beliebig gegebener Ordnung unendlich werden. Will man aus *K'* die Funktionen aus *K* aussondern, so hat man aus *K* die *eindeutigen* Funktionen auszuwählen. Durch die genauere Verfolgung der dazu nötigen Bedingungen läßt sich der schon erwähnte Riemann-Rochsche Satz (§ 6) beweisen.

## § 6. Der Riemann-Rochsche Satz.

Man teilt die Gesamtheit aller Divisoren eines Korpers *K* in *Klassen* ein, indem man zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse rechnet, wenn ihr Quotient eine Funktion des Körpers ist Man nennt zwei solche Divisoren *äquivalent.* Jeder Divisor gehört einer und nur einer Klasse an und jede Klasse ist durch einen in ihr enthaltenen Divisor eindeutig bestimmt. Ist q ein Divisor, so bezeichnet man die durch ihn bestimmte Klasse mit (q). Alle Divisoren einer Klasse haben dieselbe Ordnung, die auch die *Ordnung der Klasse* heißt.

Unter allen Klassen sind zwei besonders wichtig. Erstens die Klasse, die alle Divisoren enthält, die den Funktionen des

Körpers entsprechen. Sie heißt die *Hauptklasse.* Ihre Ordnung ist Null. Zweitens die Klasse, die die Differentialteiler enthält. Sie heißt die *Differential-* oder *kanonische Klasse.* Ihre Ordnung ist $2p - 2$. Die Divisoren der Differentialklasse sollen mit $\mathfrak{k}$ bezeichnet werden und die Klasse selbst mit $(\mathfrak{k})$.

Man nennt $\mu$ Divisoren einer Klasse *linear unabhängig,* wenn zwischen den Funktionen, die aus ihnen durch Division mit irgendeinem Divisor derselben Klasse hervorgehen, *keine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten* besteht. Die Zahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren einer Klasse $(\mathfrak{q})$ heißt die *Dimension der Klasse* und wird mit $\{\mathfrak{q}\}$ bezeichnet. Ist die Ordnung von $(\mathfrak{q})$ negativ, so ist $\{\mathfrak{q}\} = 0$; denn ein ganzer Divisor kann nicht von negativer Ordnung sein. Ist die Ordnung von $(\mathfrak{q})$ Null und $(\mathfrak{q})$ nicht die Hauptklasse, so ist auch $\{\mathfrak{q}\} = 0$, ist aber $(\mathfrak{q})$ die Hauptklasse, so ist $\{\mathfrak{q}\} = 1$, da die Konstanten die einzigen ganzen Divisoren der Hauptklasse sind.

Sind $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ zwei Divisoren, so nennt man die durch die Divisoren $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_2$ bestimmten Klassen $(\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2)$ und $(\mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_2)$ *Produkt und Quotient* der Klassen $(\mathfrak{q}_1)$ und $(\mathfrak{q}_2)$ und bezeichnet sie auch mit $(\mathfrak{q}_1) \cdot (\mathfrak{q}_2)$ und $(\mathfrak{q}_1)/(\mathfrak{q}_2)$. Ihre Ordnungen sind gleich Summe und Differenz der Ordnungen von $(\mathfrak{q}_1)$ und $(\mathfrak{q}_2)$. Ist im besonderen das Produkt zweier Klassen die Differentialklasse, so nennt man sie *Ergänzungsklassen.*

Es seien $(\mathfrak{q})$ und $(\mathfrak{q}')$ zwei Ergänzungsklassen und $q$ und $q$ ihre Ordnungen, dann ist

$$q + q' = 2p - 2,$$

und zwischen ihren Dimensionen $\{\mathfrak{q}\}$, $\{\mathfrak{q}'\}$ besteht die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \{\mathfrak{q}\} - \frac{q}{2} = \{\mathfrak{q}'\} - \frac{q'}{2} \qquad \text{oder}$$

$$\text{(II)} \qquad \{\mathfrak{q}\} = \left\{\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{q}}\right\} + q - p + 1,$$

da man $(\mathfrak{q}')$ auch mit $(\mathfrak{k}/\mathfrak{q})$ bezeichnen kann. Der durch diese Gleichung ausgesprochene Satz heißt der *Riemann-Rochsche Satz.* Er ist zuerst für den Fall, daß $\{\mathfrak{k}, \mathfrak{q}\} = 0$ von Riemann (*Abelsche Funktionen*) ausgesprochen und allgemein von Roch. (G Roch, *Über die Anzahl der willkurlichen Konstanten in algebraischen Funktionen, J f. Math.* **64**, S. 372, 1865.)

Dieser Satz ist einer der wichtigsten in der Theorie der algebraischen Funktionen. Es seien einige besonders wichtige Fälle hervorgehoben.

1. Es sei $\mathfrak{q}$ ein Divisor der Hauptklasse, also $\{\mathfrak{q}\} = 1$, $q = 0$. Die Ergänzungsklasse ist in diesem Falle die Differentialklasse $(\mathfrak{k})$. Der Riemann-Rochsche Satz gibt

$$\{\mathfrak{k}\} = p,$$

d. h. in Worten: *Die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale, deren Divisor ein Vielfaches einer beliebigen Funktion* $\xi$ *des Körpers* $K$ *ist, ist gleich dem Geschlechte* $p$ *des Körpers*. Nehmen wir $\xi = 1$, so ergibt sich, daß die Zahl der linear unabhängigen Differentiale (Integrale) erster Gattung gleich $p$ ist.

2. Es sei die Ordnung $q = -\nu$ negativ; dann ist $\{\mathfrak{q}\} = 0$ und also

$$\left\{\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{q}}\right\} = \nu + p - 1,$$

d. h. in Worten: *Die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale, deren Divisoren Vielfache eines beliebigen Divisors negativer Ordnung* $-\nu$ *sind, ist gleich* $\nu + p - 1$. Oder spezialisiert: Die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale, deren Nenner gleich einem gegebenen Divisor von der Ordnung $\nu$ oder ein Teiler von ihm ist, ist stets $\nu + p - 1$.

3. Als weitere Anwendung bestimmen wir die Zahl der linear unabhängigen Funktionen des Körpers, deren Nenner ein gegebener ganzer Divisor $\mathfrak{q}$ von der Ordnung $q$ oder ein Teiler von $\mathfrak{q}$ ist. Diese Anzahl ist

$$\{\mathfrak{q}\} = \{\mathfrak{q}'\} + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q'$$

oder, da $q + q' = 2p - 2$ ist,

$$\{\mathfrak{q}\} = \{\mathfrak{q}'\} + q - p + 1.$$

Ist nun $q > 2p - 2$, so ist $q'$ negativ und daher $\{\mathfrak{q}'\} = 0$, also

$$\{\mathfrak{q}\} = q - p + 1.$$

In diesem und auch nur in diesem Falle ist also die Dimension der durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Klasse allein von der Ordnung von $\mathfrak{q}$ abhängig und nicht von der speziellen Wahl des Divisors $\mathfrak{q}$. Dieser Fall tritt bei positivem $q$ nur dann *immer* ein, wenn $p = 0$ oder $p = 1$ ist. Ist $p > 1$ und ist der Divisor $\mathfrak{q}$ nicht speziell gewählt, so ist für $p < q \leq 2p - 2$, wie im vorigen Falle,

$$\{\mathfrak{q}\} = q - p + 1$$

und für $q < p$

$$\{\mathfrak{q}\} = 1.$$

Hieraus folgt auch der schon früher angegebene Satz, daß es keine Funktionen des Körpers gibt, die an $p$ beliebig gegebenen Stellen von erster Ordnung unendlich werden, wohl aber Funktionen, die an $p + 1$ beliebig gegebenen Stellen unendlich werden.

## § 7. Geometrische Deutung der den Körper $K$ definierenden Grundgleichung.

### I. Nichthomogene Koordinaten.

Die den Körper $K$ definierende Gleichung $f(x, y) = 0$ sei in $x$, $y$ vom Grade $m$, $n$. Wir können die Gleichung als *Gleichung einer Kurve* in kartesischen Koordinaten auffassen. Ist $\mathfrak{p}$ eine Stelle von $K$, so entspricht ihr ein bestimmter *Punkt der algebraischen Kurve* $f$. Aber umgekehrt können einem Punkte der Kurve $f$ verschiedene Stellen des algebraischen Körpers, also der Riemannschen Fläche entsprechen. Wenn nämlich $y$ an mehreren der an der Stelle $x = a$ übereinanderliegenden Stellen der Riemannschen Fläche $R$ denselben Wert, etwa $b$, hat, so entsprechen dem Kurvenpunkte mit den Koordinaten $a$, $b$ mehrere Stellen der Riemannschen Fläche. Die Riemannsche Fläche hat an diesen Stellen keine besondere Eigentümlichkeit. Man nennt eine solche Stelle der Kurve einen *mehrfachen Punkt*; im genaueren definiert man: Der Punkt $a, b$ ist ein *$k$-facher Kurvenpunkt*, wenn die Zählerdivisoren von $x - a$ und $y - b$ einen Divisor $k$-ter Ordnung gemeinsam haben Ist $a$ oder $b$ unendlich, so ist, wie üblich, unter $x - a$, $y - b$ zu verstehen $1/x$, $1/y$. Oder analytisch ausgedrückt: Der Kurvenpunkt $a$, $b$ heißt ein $k$-facher Punkt, wenn die Differentialquotienten von $f(x, y)$ nach $x$ und $y$ bis zur $(k-1)$-ten Ordnung einschließlich verschwinden für $x = a$, $y = b$, d h also, wenn die Entwicklung von $f(x, y)$ nach Potenzen von $x - a$, $y - b$ mit Gliedern $k$-ter Dimensionen beginnt

Der größte gemeinsame Teiler der Zählerdivisoren von $x - a$ und $y - b$ sei

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \mathfrak{p}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{p}_\varkappa^{\alpha_\varkappa},$$

wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_\varkappa$ voneinander verschiedene Primteiler sein sollen. Die *Singularität* der Kurve $f$ an der Stelle $a$, $b$ heißt dann *$\varkappa$-zweigig*; denn es entspricht jedem der Primteiler $\mathfrak{p}_s$ von $\mathfrak{q}$ eine bestimmte Stelle mit einer bestimmten Entwicklung von $x - a$ und $y - b$, so daß sich $\varkappa$ voneinander verschiedene Kurvenzweige ergeben, die durch den Punkt $a, b$ hindurchgehen Man

nennt eine gerade Linie *Tangente* an einen dieser Kurvenzweige, wenn sie einen Schnitt höherer Ordnung mit dem betreffenden Zweige im Punkte $a, b$ eingeht als jede andere Gerade.

Wir betrachten zwei Fälle etwas genauer.

1. *Ein k-facher Punkt mit getrennten Tangenten.* Die Glieder $k$-ter Dimension, mit denen die Entwicklung von $f(x, y)$ nach Potenzen von $x - a$, $y - b$ beginnen soll, seien $\varphi(x - a, y - b)$ und es habe die Gleichung $k$-ten Grades $\varphi(1, \lambda) = 0$ lauter verschiedene endliche Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Dann ergeben sich aus $f = 0$ $k$ Entwicklungen

$$y - b = \lambda_i(x - a) + \cdots, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

und jede von ihnen stellt einen durch den Punkt $a, b$ gehenden Kurvenzweig dar. Die Tangenten an diese Zweige sind durch die Gleichungen $y - b = \lambda_i(x - a)$ gegeben, also voneinander verschieden. Für $k = 2$ nennt man solch einen Punkt auch einen *Doppelpunkt.*

2. *Der Fall des zweifachen Punktes.* Es sind verschiedene Unterfälle zu unterscheiden, von denen wir nur die einfachsten berücksichtigen. Die Singularität kann ein- oder zweizweigig sein. Ist sie zweizweigig, so haben wir zwei Entwicklungen von $y - b$ nach ganzen Potenzen von $x - a$, etwa

$$y - b = \lambda_1(x - a) + \cdots, \quad y - b = \lambda_2(x - a) + \cdots.$$

Sind $\lambda_1, \lambda_2$ voneinander verschieden, so haben wir einen *Doppelpunkt,* sind sie gleich, so haben wir einen *Selbstberührungspunkt.* Ist die Singularität einzweigig, so haben wir für $y - b$ eine Entwicklung nach Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{2}}$, die aber mit der zweiten Potenz von $(x - a)^{\frac{1}{2}}$ beginnt, etwa

$$y - b = c_1(x - a) + c_2(x - a)^{\frac{3}{2}} + c_3(x - a)^2 + \cdots.$$

Ist $c_2 \neq 0$, so hat die Kurve an der Stelle $a, b$ eine *gewöhnliche Spitze.* Ist $c_2 = 0$, während $c_3 \neq 0$, so hat die Kurve an der Stelle $a, b$ eine *Schnabelspitze.*

An den mehrfachen Stellen der Kurve $f$ werden $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ beide Null. Bezeichnen wir den Nenner von $x$ mit $\mathfrak{n}_x$

und den von $y$ mit $\mathfrak{n}_\cdot$, so gilt im genaueren folgende Zerlegung (vgl. § 3)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}_x^l \mathfrak{n}_y^{m-2}}, \quad -\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{z}_y}{\mathfrak{n}_x^{l-2} \mathfrak{n}_y^m},$$

wo $\mathfrak{d}$ ein *ganzer* Divisor ist, der an den mehrfachen Stellen von $f$ und nur an diesen Null wird. $\mathfrak{d}$ heißt der *Doppelpunktdivisor* oder der *Divisor der mehrfachen Punkte.* Die Ordnung von $\mathfrak{d}$, die immer gerade ist, werde mit $2d$ bezeichnet. Jeder Doppelpunkt und jede gewöhnliche Spitze vergrößert $d$ um 1, jeder $k$-fache Punkt mit getrennten Tangenten um $\frac{1}{2}k(k-1)$. Hat also die Kurve nur $\delta$ gewöhnliche Doppelpunkte und $r$ gewöhnliche Spitzen, so ist

$$d = \delta + r.$$

Hat die Kurve nur mehrfache Punkte mit getrennten Tangenten, so ist

$$2d = \sum k(k-1).$$

Aus der Zerlegung von $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ folgt, da die Ordnung einer Funktion des Körpers Null ist,

$$2d = 2(l-1)m - w_y, \quad 2d = 2(m-1)l - w_x,$$

oder durch Einführen des Geschlechtes $p$ die symmetrische Gleichung

$$d = (l-1)(m-1) - p,$$

aus der sich nebenbei ergibt, da $p \geqq 0$, daß die Kurve höchstens $(m-1)(n-1)$ Doppelpunkte haben kann

Der Divisor $\mathfrak{d}$ ändert sich schon, wenn man auch nur statt $y$ eine neue abhängige Veränderliche einführt. Er bleibt nur ungeändert bei *linearen* ganzen oder gebrochenen Substitutionen jeder einzelnen der Veränderlichen $x$, $y$.

Eine ganze rationale Funktion von $x, y$, deren Zählerdivisor durch $\mathfrak{d}$ teilbar ist, nennt man eine *adjungierte Funktion* und die durch Nullsetzen einer solchen Funktion definierte Kurve heißt *adjungierte Kurve.* Ist im besonderen der Grad einer solchen Funktion in $x, y$ höchstens gleich $l-1$, $m-1$, so heißt sie eine *spezielle adjungierte Funktion* oder eine $\varphi$-Funktion. Schreibt man ein Differential erster Gattung in der Form

$$\varphi : (\partial f/\partial y)\, dx,$$

so ist der Zähler $\varphi$ eine $\varphi$-Funktion und es gilt auch das umgekehrte.

Man kann durch birationale Transformation erreichen, daß die neue Kurve *nur gewöhnliche Doppelpunkte,* und zwar im endlichen, hat. Dieser von M. Noether bewiesene Satz ist von Kronecker dahin erweitert, daß man die neue unabhängige Veränderliche beliebig wählen kann. (M. Noether, *Über die singulären Wertsysteme einer algebraischen Funktion und die singulären Punkte einer algebraischen Kurve, Math. Ann.* **9**, S. 166, 1876; *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen, Math. Ann.* **23**, S. 311, 1884; *Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Funktionen, Math. Ann.* **34**, S. 450, 1889; L. Kronecker, *Über die Diskriminante algebraischer Funktionen einer Variabeln, J. f. Math.* **91**, S. 301, 1881.)

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primteiler und ist $a$ der Wert, den eine Funktion $x$ des Körpers an der zugehörigen Stelle $\mathfrak{p}$ annimmt, so versteht man unter der *Idealnorm* von $\mathfrak{p}$ in bezug auf $x$ die lineare Funktion $x - a$, wenn $a$ endlich ist, sonst den Wert 1. Sie hängt natürlich von der Wahl von $x$ ab. Unter der Idealnorm irgendeines Divisors versteht man das Produkt der Idealnormen der einzelnen in dem Divisor enthaltenen Primteiler. Die Idealnorm von $\mathfrak{z}_x$ sei mit $\varDelta$ bezeichnet und die von $\mathfrak{d}$, die immer das Quadrat einer ganzen Funktion ist, mit $X^2$. Die Grade dieser ganzen Funktionen von $x$ sind $2w_x$ und $2d_x$, vorausgesetzt, daß an keiner der Stellen, die einen Beitrag zu $\mathfrak{z}_x$ und $\mathfrak{d}$ liefern, $x$ unendlich ist. Sonst treten Graderniedrigungen ein. Bezeichnet $D$ die Diskriminante von $f(x, y)$ in bezug auf $y$, so gilt die Darstellung

$$D = \varDelta X^2.$$

Nach Kronecker heißt $X$ der *außerwesentliche,* $\varDelta$ der *wesentliche Teiler der Diskriminante* $D$. In der älteren Literatur werden die ganzen Funktionen $D$, $\varDelta$, $X$ untersucht; Dedekind-Weber haben die Primteiler selbst betrachtet. Vgl die ausführliche Darstellung von Hensel-Landsberg. Dabei ist diesen dadurch eine bedeutende Vereinfachung gelungen, daß sie sich nicht auf ganze Divisoren beschränken.

## § 8. Geometrische Deutung der den Körper $K$ definierenden Grundgleichung.

### II. Homogene Koordinaten.

Es seien $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ drei linear unabhängige ganze Divisoren einer Klasse $(\mathfrak{a})$ ohne gemeinsamen Teiler. Ihre Ordnung sei $n$. Ferner sei $\mathfrak{m}^{-1}$ irgendein Divisor der Klasse $(\mathfrak{a})$. Setzen wir dann

$$x_0 = \mathfrak{m}\mathfrak{a}_0, \quad x_1 = \mathfrak{m}\mathfrak{a}_1, \quad x_2 = \mathfrak{m}\mathfrak{a}_2,$$

so sind die $x_i$ Funktionen des Körpers und es besteht zwischen ihnen eine homogene Gleichung $n$-ten Grades $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Bei passender Wahl der Divisoren $\mathfrak{a}_i$ besteht der Körper $K$ aus allen homogenen rationalen Funktionen von $x_0, x_1, x_2$. Deutet man die $x_i$ als homogene Punktkoordinaten der Ebene, so definiert $F = 0$ eine *algebraische Kurve.*

Besteht dann zwischen $x_0, x_1, x_2$ eine homogene Gleichung

$$G(x_0, x_1, x_2) = 0, \tag{1}$$

so schreibt man sie, da es auf den Faktor $\mathfrak{m}$ nicht ankommt, auch in der Form

$$G(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 0. \tag{2}$$

Umgekehrt soll eine Gleichung der Form (2) bedeuten, daß die Gleichung (1) besteht Ist ferner $h(x_0, x_1, x_2)$ eine ganze rationale homogene Funktion, so wird unter $h(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ der Zählerdivisor von $h(x_0, x_1, x_2)$ verstanden, vorausgesetzt, daß der Divisor $\mathfrak{m}^{-1}$ als ganzer Divisor gewählt ist.

Setzen wir $x_1/x_0 = x$, $x_2/x_0 = y$, so können wir $x, y$ als nicht homogene Koordinaten betrachten. Zu diesen gehört nach dem vorigen Paragraphen ein bestimmter Doppelpunktdivisor $\mathfrak{d}$. Dieser hat den Faktor $\mathfrak{a}_0^{n-1}$, der bei der jetzigen Betrachtungsweise unwesentlich ist. Man setzt daher

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a}_0^{n-1}\bar{\mathfrak{d}} \tag{3}$$

und nennt $\bar{\mathfrak{d}}$ den Doppelpunktdivisor in projektivem Sinn. Die Gleichung (3) gilt aber nur, wenn $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_1$ und ebenso $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_2$ teilerfremd sind Anderenfalls gilt die Gleichung

$$\bar{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}_0^{n-3}\mathfrak{d}}{\mathfrak{n}_x^{l-2}\mathfrak{n}_y^{m-2}}, \tag{4}$$

in der $\mathfrak{n}_x$ und $\mathfrak{n}_y$ die Nennerdivisoren von $x$ und $y$ bedeuten und $l$ und $m$ die Ordnungen von $\mathfrak{n}_y$ und $\mathfrak{n}_x$. Der Divisor $\bar{\mathfrak{d}}$ ist linearen homogenen Transformationen der Veränderlichen gegenüber invariant. Seine Ordnung ist immer gerade und sei mit $2\bar{d}$ bezeichnet. Aus (3) folgt

$$2\bar{d} = 2d - n(n-1).$$

Es gelten folgende Divisorengleichungen

$$(5) \qquad \frac{\partial F(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_0} = \bar{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{z}_{\alpha_1 : \alpha_2}, \quad \frac{\partial F(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} = \bar{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{z}_{\alpha_2 \cdot \alpha_0},$$
$$\frac{\partial F(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} = \bar{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{z}_{\alpha_0 \cdot \alpha_1}.$$

Darin bedeutet z. B. $\mathfrak{z}_{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$ den Verzweigungsdivisor, der zu der Funktion $\alpha_1/\alpha_2$ als unabhängiger Veränderlichen angehört. Durch Vergleichen der Ordnungen der Divisoren links und rechts in (5) folgt

$$(6) \qquad p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \bar{d}.$$

Über $\bar{\mathfrak{d}}$ besteht der wichtige Satz: *Eine Funktion des Körpers, die ein Vielfaches des Divisors $\bar{\mathfrak{d}}/\alpha^\nu$ ist, läßt sich als ganze homogene Funktion $\nu$-ten Grades von $x_0, x_1, x_2$ darstellen.* Man nennt eine ganze homogene Funktion $\nu$-ten Grades, deren Zähler durch $\bar{\mathfrak{d}}$ teilbar ist, eine *adjungierte Funktion* $\nu$-ten Grades und die durch Nullsetzen einer solchen Funktion definierte Kurve eine *adjungierte Kurve* $\nu$-ter Ordnung. Ist $\nu = n - 3$, so nennt man eine solche Funktion eine *spezielle adjungierte Funktion* oder eine *$\varphi$-Funktion*. Eine $\varphi$-Funktion, gleich Null gesetzt, liefert eine *$\varphi$-Kurve*. Eine solche hat mit der Grundkurve außer den mehrfachen Punkten noch $2p-2$ Punkte gemeinsam. Von besonderer Bedeutung (vgl. § 10) sind noch diejenigen adjungierten Kurven der Ordnung $2p + 2\bar{d}$, deren $2p$ von den in $\bar{\mathfrak{d}}$ enthaltenen Nullstellen verschiedene Nullstellen paarweise zusammenfallen Solcher Funktionen gibt es bis auf konstante Faktoren $2^{2p}$. Ist $\psi$ eine dieser Funktionen, so ist $\sqrt{\psi}$ eine Funktion, die sich überall wie eine Funktion aus $K$ verhält, die aber nicht eindeutig ist, sondern ihr Vorzeichen ändern kann, wenn die Stelle, von der sie abhangt, auf der Riemannschen Fläche einen geschlossenen Weg beschreibt Man nennt

$\sqrt{\psi}$ eine *Wurzelfunktion* (erster Ordnung). Das Produkt zweier solcher Funktionen heißt Wurzelfunktion zweiter Ordnung.

Es sei noch die *Aronholdsche Schreibweise für ein Differential* in homogenen Koordinaten angegeben. (Aronhold, *Berl. Sitzungsber.* 1861; ferner: *Über eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale* usw. *J. f. Math.* **61**, S. 95, 1863)

$$(7) \qquad g(x_0, x_1, x_2) \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 \end{vmatrix}}{c_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + c_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}},$$

wo $g$ eine homogene, nicht notwendig ganze, Funktion vom Grade $n-3$ sein muß. Dies Differential ist dann und nur dann von der ersten Gattung, wenn $g$ eine $\varphi$-Funktion ist. Es gibt daher $p$ linear unabhängiger solcher Funktionen. Der größte gemeinsame Teiler der Zähler dieser Funktionen ist der Doppelpunktdivisor $\bar{\mathfrak{d}}$.

Es sei $\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{g}$ der Zähler einer adjungierten Funktion $m$-ter Ordnung. Zerlegt man den ganzen Divisor $\mathfrak{g}$ irgendwie in zwei ganze Divisoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$, so werden $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ *Reste* voneinander genannt. Die charakteristische Beziehung zweier Reste $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ besteht darin, daß $\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ ein durch $\bar{\mathfrak{d}}$ teilbarer ganzer Divisor ist, der einer Klasse angehört, die eine Potenz von $(\mathfrak{a})$ ist. Zwei ganze Divisoren oder die ihnen auf der algebraischen Kurve entsprechenden Punktgruppen heißen *korresidual*, wenn sie Reste desselben Divisors $\mathfrak{s}$ sind. Es gilt dann folgender Hauptsatz: *Sind* $\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{r}'$ *korresidual in bezug auf* $\mathfrak{s}$ *und ist irgendein anderer Divisor* $\mathfrak{s}'$ *Rest von* $\mathfrak{r}$, *so ist er auch Rest von* $\mathfrak{r}'$. Der Beweis ist einfach. Bezeichnen wir nämlich durch $\mathfrak{q} \sim \mathfrak{q}'$, daß die Divisoren $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ äquivalent sind, also derselben Klasse angehören, so lauten die Voraussetzungen des Satzes $\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{r}\mathfrak{s} \sim \mathfrak{a}^{\lambda}$, $\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{r}'\mathfrak{s} \sim \mathfrak{a}^{\mu}$, $\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{r}\mathfrak{s}' \sim \mathfrak{a}^{\nu}$, wo $\lambda, \mu, \nu$ irgendwelche ganze Zahlen sind Daraus folgt aber die Behauptung in der Form

$$(\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{r}'\mathfrak{s})(\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{r}\mathfrak{s}')(\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{r}\mathfrak{s})^{-1} = \bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{r}'\mathfrak{s}' \sim \mathfrak{a}^{\mu+\nu-\lambda}.$$

Dieser Restsatz ist in der Brill-Noetherschen Theorie das Fundament der ganzen Untersuchung und wird dort durch geometrische Betrachtungen bewiesen. (Brill-Noether, *Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie* *Math. Ann* 7, S. 269, 1874)

## § 9. Geometrische Deutung der den Körper $K$ definierenden Grundgleichung.

### III. Linienkoordinaten. Plückersche Formeln.

Die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen mögen beibehalten werden. Es gelten folgende Definitionen und Sätze:

Man nennt alle Divisoren von der Form

$$c_0 \mathfrak{a}_0 + c_1 \mathfrak{a}_1 \tag{1}$$

bei konstanten $c_0$, $c_1$, eine *einfach unendliche Divisorenschar*. Ist $\mathfrak{p}$ irgendeine Stelle von $K$ und bestimmt man alle Divisoren der Schar (1), die durch den Primteiler $\mathfrak{p}$ teilbar sind, so werden diese eine bestimmte Potenz von $\mathfrak{p}$, etwa $\mathfrak{p}^{\alpha}$ gemeinsam haben. Nur für eine endliche Zahl von Stellen ist $\alpha$ von 1 verschieden. Das Produkt $\Pi \mathfrak{p}^{\alpha-1}$, erstreckt über alle Stellen von $K$, enthält also nur eine endliche Zahl von Faktoren. Es heißt der *Verzweigungsdivisor der Schar* (1) und es ist

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2} = \Pi \mathfrak{p}^{\alpha-1}.$$

Man nennt alle Divisoren, die in der Form

$$c_0 \mathfrak{a}_0 + c_1 \mathfrak{a}_1 + c_2 \mathfrak{a}_2 \tag{2}$$

enthalten sind bei konstanten $c_0$, $c_1$, $c_2$, eine *zweifach unendliche Divisorenschar*. Ist $\mathfrak{p}$ wieder ein Primteiler und bestimmt man alle Divisoren der Schar, die $\mathfrak{p}$ als Faktor haben, so haben diese eine Potenz von $\mathfrak{p}$ als größten gemeinsamen Faktor, etwa $\mathfrak{p}^{\alpha_1}$. Man nennt das Produkt

$$\mathfrak{r}_1 = \Pi \mathfrak{p}^{\alpha_1 - 1},$$

erstreckt über alle Stellen von $K$, das wieder nur eine endliche Zahl von Faktoren enthält, den *ersten Verzweigungsdivisor der Schar* (2). Bestimmt man ferner alle Divisoren der Schar (2), die den Primteiler $\mathfrak{p}$ mindestens in der Potenz $\mathfrak{p}^{\alpha_1 + 1}$ enthalten, so möge die größte Potenz von $\mathfrak{p}$, die alle diese Divisoren enthalten, die $(\alpha_1 + \alpha_2)$-te sein. Das über alle Stellen von $K$ erstreckte Produkt

$$\mathfrak{r}_2 = \Pi \mathfrak{p}^{\alpha_2 - 1}$$

enthält wieder nur eine endliche Zahl von Faktoren und heißt der *zweite Verzweigungsdivisor der Schar* (2) Die Ordnungen der Divisoren $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ seien $r_1$ und $r_2$. Diese Divisoren haben

für die durch die Gleichung $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ definierte Kurve $F$ in den einfachsten Fällen folgende geometrische Bedeutung. Hat für einen in $\mathfrak{r}_1$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{p}$ der Exponent $\alpha_1$ den kleinsten Wert 2, und ist $\alpha_2 = 1$, so hat die Kurve an der $\mathfrak{p}$ entsprechenden Stelle, die auch mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet sei, einen *Ruckkehrpunkt (Spitze)*; ist $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, so hat die Kurve in $\mathfrak{p}$ einen *Wendepunkt*, und wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, so hat sie in $\mathfrak{p}$ eine *Schnabelspitze*. Es heißt daher $\mathfrak{r}_1$ auch der *Divisor der Rückkehrpunkte* und $\mathfrak{r}_2$ der *Divisor der Wendepunkte.*

Es seien $u_0, u_1, u_2$ die homogenen Linienkoordinaten der Kurve $F$. Es ist

$$u_0 : u_1 : u_2 = \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} : \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = \mathfrak{z}_{\alpha_1 : \alpha_2} : \mathfrak{z}_{\alpha_2 : \alpha_0} : \mathfrak{z}_{\alpha_0 : \alpha_1}.$$

Zwischen $u_0, u_1, u_2$ besteht eine irreduzible homogene Gleichung, die *Gleichung von $F$ in Linienkoordinaten.* Sie sei $G(u_0, u_1, u_2) = 0$. Der Grad $k$ von $G$ heißt die *Klasse von $F$.* Es ist $k$ gleich der Ordnung der Divisoren $\mathfrak{z}_{\alpha_1 : \alpha_2}$, $\mathfrak{z}_{\alpha_2 : \alpha_0}$, $\mathfrak{z}_{\alpha_0 : \alpha_1}$, nachdem man sie von ihrem größten gemeinsamen Teiler befreit hat. Dieser ist aber gerade der Divisor $\mathfrak{r}_1$ der Rückkehrpunkte. Es ergibt sich daher die Formel

$$\text{(I)} \qquad k = w - r_1 = 2p - 2 + 2n - r_1.$$

Es gilt ferner die Zerlegung

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 \\ d^2x_0 & d^2x_1 & d^2x_2 \end{vmatrix} = \mathfrak{r}_1^2 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{m}^3,$$

wo $\mathfrak{m}^{-1}$ den gemeinsamen Nenner von $x_0, x_1, x_2$ bedeutet. Da ein Differential die Ordnung $2p - 2$ hat und ein zweifaches Differential die Ordnung $2(2p - 2)$, so ergibt sich folgende Formel für die *Ordnung $r_2$ des Divisors der Wendepunkte*

$$\text{(II)} \qquad r_2 = 3(2p - 2 + n) - 2r_1 = 3(w - n) - 2r_1.$$

Nehmen wir an, daß die Kurve an Singularitäten nur $\delta$ gewöhnliche Doppelpunkte und $r$ einfache Rückkehrpunkte hat und ferner $i$ Wendepunkte (oder Wendetangenten) und $t$ Doppeltangenten, so lassen sich die Formeln (I), (II) wegen $r_1 = r$, $r_2 = i$, $\bar{d} = \delta + r$ folgendermaßen schreiben

$$\text{(Ia)} \qquad k = 2p + 2(n - 1) - r = n(n - 1) - 2\delta - 3r,$$

$$\text{(IIa)} \qquad i = 3n(n - 2) - 6\delta - 8r.$$

Der Kurve $F$ kann man *dual* eine andere entsprechen lassen, so daß den Punkten und Tangenten von $F$ eineindeutig umgekehrt die Tangenten und Punkte der neuen Kurve entsprechen. Am einfachsten erhält man diese Kurve, indem man in der Gleichung von $F$ in Linienkoordinaten die Linienkoordinaten als Punktkoordinaten deutet. Diese Kurve nennt man *Reziprokalkurve von F*. Deren Reziprokalkurve ist wieder $F$. Die Ordnung der Reziprokalkurve ist gleich der Klasse $k$ von $F$, ihre Klasse gleich der Ordnung $n$ von $F$ Den Doppelpunkten, Wendetangenten, Rückkehrpunkten, Doppeltangenten von $F$ entsprechen Doppeltangenten, Rückkehrpunkte, Wendetangenten, Doppelpunkte der neuen Kurve. Wendet man also auf die Reziprokalkurve die Formeln Ia und IIa an, so bekommt man

$$\text{(III)} \qquad n = k(k-1) - 2t - 3i,$$

$$\text{(IV)} \qquad r = 3k(k-2) - 6t - 8i.$$

Die Formeln (I) bis (IV) heißen die *Plückerschen Formeln*, da Plücker sie zuerst in den einfachsten Fällen aufgestellt hat. (J. Plücker, *System der analytischen Geometrie*, Berlin 1835; *Theorie der algebraischen Kurven* usw., Bonn 1839.) Da außerdem beide Kurven dasselbe Geschlecht haben, so ist noch

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta - r,$$

$$p = \frac{1}{2}(k-1)(k-2) - t - i.$$

Nach derselben Methode lassen sich auch *Raumkurven* im Raume von beliebig vielen Dimensionen behandeln. (Siehe den entsprechenden Abschnitt in dem Buche von Hensel-Landsberg.) Von besonderer Wichtigkeit ist die Raumkurve im Raume von $p-1$ Dimensionen, deren homogene Koordinaten proportional sind $p$ linear unabhängigen Differentialen erster Gattung. Sie heißt die *Kurve der Differentiale erster Gattung* oder die *Hauptkurve* oder auch *Normalkurve* des Körpers $K$ Sie ist ihrer Definition nach *invariant bei allen birationalen Transformationen* des Körpers. Es gilt der wichtige Satz: *Ist der Körper K hyperelliptisch, so entsprechen jedem Punkte der Hauptkurve zwei Punkte von K und jeder Stelle von K ein Punkt der Hauptkurve. Ist K nicht hyperelliptisch, so entsprechen die Punkte der Hauptkurve und die Stellen von K einander eineindeutig.* Die Hauptkurve ist also im hyperelliptischen Fall dop-

pelt zu zählen, während sie im allgemeinen Fall keinen mehrfachen Punkt besitzt. Es sei noch der Satz angeführt: *Es gibt immer eine doppelpunktfreie Raumkurve der Art, daß die Punkte der Kurve und die Stellen von K einander eineindeutig entsprechen.*

Durch Projektion einer solchen Kurve oder auch der Hauptkurve auf eine Ebene kann man Grundkurven für den Körper $K$ finden, die nur gewöhnliche Singularitäten besitzen.

Es sei an dieser Stelle auch auf die Methode F. Kleins hingewiesen zur Darstellung der Funktionen und Integrale eines algebraischen Körpers, die zu besonders einfachen Darstellungen führt. Klein stellt das algebraische Gebilde als ein- oder mehrfach überdeckte Kurve des Gebietes von $n$ homogenen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dar von solcher Beschaffenheit, daß die $p$ Differentiale erster Gattung proportional zu $p$ ganzen algebraischen (nicht notwendig rationalen) Formen einer bestimmten Dimension werden, die keine gemeinsame Nullstelle haben. Für $n = 2$ ergibt sich die Riemannsche Fläche. Genaueres hierüber sehe man in der Arbeit von F. Klein, *Zur Theorie der Abelschen Funktionen, Math. Ann.* **36**, S. 1, 1890; F. Klein, *Riemannsche Flächen*, Autographiertes Vorlesungsheft, Göttingen 1892; *Enzykl. d. m. W.* **II** 2, S. 153.

## § 10. Die Integrale des Körpers und ihre Perioden.

Ein tieferes Eindringen in die Theorie der Abelschen Integrale ist auf zwei wesentlich verschiedenen Wegen möglich, einmal auf *transzendentem Wege* (Riemann) und zweitens auf *algebraischem Wege* (Weierstraß) Die algebraische Methode verdient insofern den Vorzug, als sie mit einfacheren und naturgemäßeren Hilfsmitteln auskommt und auch gleichzeitig Methoden zur Berechnung aller wichtigen Funktionen und Integrale liefert. Die folgende Darstellung schließt sich daher an die Weierstraßsche Darstellung an Doch soll auch der Riemannsche Weg kurz angedeutet werden (§ 11). Zur genaueren Vergleichung der beiden Methoden sehe man die betreffenden Abschnitte in dem Buche von Hensel-Landsberg und die Anzeige von O Blumenthal der mathematischen Werke von Karl Weierstraß in den *Göttinger gelehrten Anzeigen* **2** (1905)

Es gibt $p$ und nur $p$ linear unabhängige Integrale erster Gattung. $p$ solche Integrale seien bezeichnet mit $I_1, I_2, \ldots, I_p$. Die untere Grenze sei bei allen dieselbe Stelle, etwa $\mathfrak{u}$. Ferner kann man $p$ eigentliche Integrale zweiter Gattung $I_1', I_2', \ldots, I_p'$,

deren untere Grenze auch $\mathfrak{u}$ sei, so bestimmen, daß sich jedes Integral ohne logarithmische Unendlichkeitsstelle in der Form darstellen läßt

$$R + \sum_{\alpha} c_\alpha I_\alpha + \sum c_\alpha' I_\alpha',$$

wo $R$ eine Funktion des Körpers und die $c$ Konstanten sind. Es gilt der folgende Satz.

Satz I. Eine lineare homogene Form $I$ der $2p$ Integrale $I_\alpha, I_\alpha'$ mit konstanten, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten ist nie eine Funktion des Körpers. Die $2p$ Integrale bilden, wie man sagt, ein *irreduzibles System*. Es kann daher auch nicht das über einen geschlossenen Weg erstreckte Integral $I$ für jeden geschlossenen Weg Null sein

Es seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ zwei Stellen des Körpers und es seien $x, x'$ die Werte der unabhängigen Veränderlichen für diese Stellen. Dann gibt es ein von den Stellen $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ abhängendes Doppeldifferential

$$D(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = h(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')\,dx\,dx'$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Es ist $h(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ eine symmetrische Funktion der beiden Stellen $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$; $D$ ändert also sein Zeichen bei der Vertauschung von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, da $dx\,dx' = -dx'\,dx$ ist.

2. Es seien $t, t'$ zwei Größen des Körpers, von denen die erste an der Stelle $\mathfrak{p}$, die zweite an der Stelle $\mathfrak{p}'$ von der ersten Ordnung Null wird. Erhält man dann für kleine Werte von $t$ und $t'$ verschiedene Elemente des Körpers, so ist

$$D(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = P(t, t')\,dt\,dt',$$

wo $P$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $t, t'$ ist. Geben aber kleine Werte von $t$ und $t'$ dasselbe Element des Körpers, so ist

$$D(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = \left\{\frac{1}{(t-t')^2} + P(t, t')\right\} dt\,dt',$$

wo wieder $P$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $t, t'$ ist.

3. Das allgemeine Differential mit den Eigenschaften 1 und 2. hat die Form

$$\sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta}\, dI_\alpha(\mathfrak{p})\, dI_\alpha(\mathfrak{p}') + D(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'),$$

wo die $s_{\alpha\beta}$ Konstanten sind, die der Bedingung genügen $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$

4. Da $D$ als Funktion von $\mathfrak{p}$ ein Differential zweiter Gattung mit nur einer Unendlichkeitsstelle, nämlich $\mathfrak{p}'$ ist, so läßt es sich als lineare Funktion der $2p$ Differentiale $dI_\alpha(\mathfrak{p})$, $dI_\alpha'(\mathfrak{p})$ darstellen, vermehrt um das Differential einer rationalen Funktion. Durch passende Wahl der vorkommenden Funktionen kann man erreichen, daß diese Darstellung die Form hat

$$D = h(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')\,dx\,dx' = \frac{dH(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')}{dx}\,dx\,dx' - \sum_{\alpha=1}^{p} dI_\alpha(\mathfrak{p})\,dI_\alpha'(\mathfrak{p}'),$$

wo $H$ eine rationale Funktion von $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ ist, und zwar bei passender Wahl der Integrale $I_\alpha, I_\alpha'$ die Weierstraßsche $H$-Funktion (§ 3, S. 856).

Hieraus folgt wegen 1.

$$h(\mathfrak{p}', \mathfrak{p})\,dx\,dx' = \frac{dH(\mathfrak{p}', \mathfrak{p})}{dx'}\,dx\,dx' - \sum_{\alpha=1}^{p} dI_\alpha'(\mathfrak{p})\,dI_\alpha(\mathfrak{p}')$$

und wegen $h(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = h(\mathfrak{p}', \mathfrak{p})$

$$\frac{dH(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')}{dx} - \frac{dH(\mathfrak{p}', \mathfrak{p})}{dx'} = \sum_{\alpha=1}^{p} \left\{ \frac{dI_\alpha(\mathfrak{p})}{dx}\frac{dI_\alpha'(\mathfrak{p}')}{dx'} - \frac{dI_\alpha'(\mathfrak{p})}{dx}\frac{dI_\alpha(\mathfrak{p}')}{dx'} \right\}.$$

5. Es ist, wie aus 2. und 4. folgt, wenn $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{p}_2$ verschieden ist,

$$d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2} = dx \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} h(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')\,dx'$$

ein Elementardifferential dritter Gattung mit den beiden Unendlichkeitsstellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ und den Residuen $-1, +1$ und, wenn $\mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{p}_2$ zusammenfällt, ein Differential erster Gattung. Für dies Differential gilt, wie aus 1. unter Berücksichtigung der Singularität des Differentials folgt, folgender wichtige *Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument:*

Satz II. Schneiden einander die Integrationswege $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ $n$-mal öfter in positivem Sinne als in negativem, so ist

$$\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2} - \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2} = 2n\pi i,$$

was man auch so ausdrückt, daß man sagt, das *Integral* $\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}$ *gestattet die Vertauschung von Parameter und Argument.*

Dabei läßt sich das Schneiden in positivem Sinne rein arithmetisch definieren. Dieser Satz bleibt bestehen, wenn einer oder beide Integrationswege geschlossen sind.

Das allgemeine Elementarintegral dritter Gattung mit den beiden Unendlichkeitsstellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$, das die Vertauschung von Parameter und Argument gestattet, ist von der Form

$$\int_{q_1}^{q_2} d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2} + \sum s_{\alpha\beta} \int_{q_1}^{q_2} dI_\alpha \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} dI_\beta,$$

wo die Konstanten $s_{\alpha\beta}$ der Bedingung genügen $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$. Hieraus und aus 5. folgt:

Gestattet ein Integral dritter Gattung die Vertauschung von Parameter und Argument, so ist sein Integrand, als Funktion der Unstetigkeitsstellen betrachtet, ein Integral zweiter Gattung. Hängt also der Integrand eines Integrals dritter Gattung algebraisch von den Unstetigkeitsstellen ab, so gestattet das Integral nie die Vertauschung von Parameter und Argument. Durch Differentiation eines Elementarintegrals dritter Gattung nach seinem Parameter bekommt man ein Integral zweiter Gattung.

### Die Perioden (Periodizitätsmoduln)

Eine geschlossene reguläre Kurve innerhalb des algebraischen Gebildes, die sich nicht selbst schneidet, heißt nach Weierstraß ein *Kreis*. Man kann sich einen solchen Kreis am besten auf einer Riemannschen Fläche veranschaulichen. Weierstraß benutzt indessen dies Hilfsmittel nicht. Es sei $K_1$ irgendein Kreis. Ein über $K_1$ erstrecktes Abelsches Integral heißt ein *vollständiges Integral* oder eine *Periode (Periodizitätsmodul)* des Integrals. Die zu $K_1$ gehörenden Perioden der $2p$ Integrale $I_\alpha, I_\alpha'$ seien

$$\omega_{11}, \omega_{21}, \ldots, \omega_{p1}; \ \eta_{11}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{p1}.$$

$K_1$ sei so gewählt, daß diese Perioden nicht alle Null sind, was nach Satz I immer geht

Wir betrachten die Funktion

$$\Omega_1(\mathfrak{p}) = \int_{K_1} dx' \int_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{p}} \frac{dH(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')}{dx'}\, dx, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{u}$ die untere Grenze der Integrale $I_\alpha$, $I_\alpha'$ sei. Nach 4. ist

$$\Omega_1(\mathfrak{p}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \{\omega_{\alpha 1} I_\alpha'(\mathfrak{p}) - \eta_{\alpha 1} I_\alpha(\mathfrak{p})\}, \tag{2}$$

also ein Integral zweiter Gattung und sicher nicht identisch Null. Aus der Darstellung (1) und aus Satz II folgt unter Benutzung der Formeln in 4., daß $\Omega_1(\mathfrak{p})$ sich nicht ändert, wenn $\mathfrak{p}$ einen geschlossenen Weg beschreibt, der $K_1$ gar nicht oder eine gerade Zahl von Malen schneidet, daß aber $\Omega_1(\mathfrak{p})$ um $2\pi i$ zunimmt, wenn $\mathfrak{p}$ einen geschlossenen Weg beschreibt, der $K_1$ einmal in positivem Sinne schneidet. (Bei passender Definition des positiven Sinnes.) Da aber $\Omega_1$ nach Satz I und der Darstellung 2. nicht für alle Kreise die Periode Null haben kann, so gibt es sicher einen Kreis $K_1'$, der den Kreis $K_1$ nur einmal schneidet, und für den nicht alle Perioden der $2p$ Integrale $I_\alpha$, $I_\alpha'$ Null sind

Es läßt sich weiter mit Hilfe von Satz I und II zeigen, daß es $p$ Kreispaare $K_\alpha$, $K_\alpha'$ von folgender Beschaffenheit gibt:

Die Kreise eines Paares haben einen Punkt gemeinsam, während die Kreise verschiedener Paare einander nicht schneiden.

Die zu den Kreisen $K_\alpha$, $K_\alpha'$ gehörenden Perioden der Integrale $I_\beta$, $I_\beta'$ mögen mit $\omega_{\beta\alpha}$, $\omega_{\beta\alpha}'$ und $\eta_{\beta\alpha}$, $\eta_{\beta\alpha}'$ bezeichnet werden. Sie heißen *Fundamentalperioden*. Aus Satz II folgt, indem man als Integrationswege $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ irgend zwei Kreise $K_\alpha$, $K_\alpha'$ wählt, mit Benutzung der Gleichungen in 4

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (\eta_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\gamma}\eta_{\alpha\beta}) = 0,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (\eta_{\alpha\beta}'\omega_{\alpha\gamma}' - \omega_{\alpha\beta}'\eta_{\alpha\gamma}') = 0,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (\eta_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\gamma}' - \omega_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\gamma}') = \begin{cases} 0 & \text{für } \beta \neq \gamma \\ 2\pi i & \text{für } \beta = \gamma \end{cases}.$$

Diese Gleichungen geben die *Periodenrelationen in der Weierstraßschen Form.*

Bezeichnet man das System von $(2p)^2$ Elementen

$$\left(\begin{array}{c|c} \omega_{\alpha\beta} & \omega_{\alpha\beta}' \\ \hline \eta_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta}' \end{array}\right)$$

kurz mit $T$, ferner das Einheitssystem aus $p^2$ Elementen mit $e$ und das System

$$\begin{pmatrix} 0 & -e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mathsf{E}$, so lassen sich die Periodenrelationen in der Form schreiben

$$\bar{T}\mathsf{E}T = -\frac{\pi i}{2}\mathsf{E}. \tag{3}$$

Da $\mathsf{E}^2 = -E$ ist, wenn $E$ das Einheitssystem von $(2p)^2$ Elementen ist, so folgt hieraus, daß auch

$$T\mathsf{E}\bar{T} = -\frac{\pi i}{2}\mathsf{E}.$$

Schreibt man die in dieser Formel zusammengefaßten $(2p)^2$ Gleichungen einzeln hin, so bekommt man die *Riemannsche Form der Periodenrelationen*, von denen folgende besonders wichtig sind, da sie nur Perioden von Integralen erster Gattung enthalten:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}(\omega_{\beta\alpha}\omega'_{\gamma\alpha} - \omega_{\gamma\alpha}\omega'_{\beta\alpha}) = 0.$$

Die Kreise $K_\alpha, K_\alpha'$ lassen sich auf unendlich verschiedene Arten wählen, ohne daß sie ihre wesentlichen Eigenschaften verlieren. Sind $\bar{K}_\beta$, $\bar{K}_\beta'$ solche anderen Kreise und sind $\bar{\omega}_{\alpha\beta}, \bar{\omega}'_{\alpha\beta}$; $\bar{\eta}_{\alpha\beta}, \bar{\eta}'_{\alpha\beta}$ die zugehörigen Perioden, so besteht zwischen ihnen, wenn $T_1$ das System

$$\left(\begin{array}{c|c} \bar{\omega}_{\alpha\beta} & \bar{\omega}'_{\alpha\beta} \\ \hline \bar{\eta}_{\alpha\beta} & \bar{\eta}'_{\alpha\beta} \end{array}\right)$$

bezeichnet, die Gleichung

$$TC = T_1,$$

wo $C$ ein ganzzahliges System mit der Determinante 1 bedeutet, das der Bedingung

$$\bar{C}\mathsf{E}C = \mathsf{E}$$

genügt. Man sagt, die ursprünglichen Perioden hängen mit den neuen zusammen durch eine *lineare Transformation*.

Aus (3) folgt, daß die Determinante des Systems $T$ von Null verschieden ist Daher sind die $p$ Kreispaare und die zugehörigen $2p$ Periodensysteme voneinander unabhängig. Daraus folgt, daß jeder andere Kreis sich auf die $p$ Kreispaare zurückführen läßt, und daß jeder Kreis, der keinen der $2p$ Kreise $K_\alpha$, $K_\alpha'$ schneidet, das algebraische Gebilde oder die Riemannsche Fläche in zwei getrennte Teile zerlegt. Damit sind die

bereits in § 2 angegebenen Riemannschen Sätze aus der analysis situs über die Riemannsche Fläche arithmetisch bewiesen.

Es gelten ferner folgende Sätze:

Ein Integral mit $p$ einfachen Polen ist stets und eindeutig durch seine $2p$ Perioden bestimmt.

Man kann ein Integral zweiter Gattung immer so normieren, daß es nur für einen der $2p$ Kreise eine von Null verschiedene Periode hat.

Die $2p$ Periodensysteme der $p$ Integrale erster Gattung sind voneinander unabhängig.

Es gibt kein Integral erster Gattung, dessen zu irgend $p$ sich nicht schneidenden Kreisen $K_\alpha$, $K_\alpha'$ gehörende Perioden sämtlich Null sind.

Daher kann man durch lineare Transformation neue $p$ linear unabhängige Integrale erster Gattung so wählen, daß ihr Periodensystem die *kanonische Form* annimmt

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1p} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \tau_{p1} & \tau_{p2} & \ldots & \tau_{pp}. \end{matrix}$$

Zufolge der Periodenrelationen ist $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$.

Die mit den imaginären Bestandteilen der $\tau_{\alpha\beta}$ gebildete quadratische Form ist positiv definit.

Zerschneidet man das algebraische Gebilde oder eine der zugehörigen Riemannschen Flächen längs der Kreise $K_\alpha$, $K_\alpha'$, so werden auf der zerschnittenen Fläche die Integrale erster und zweiter Gattung eindeutige Funktionen. Die Werte, die ein Integral in zwei unmittelbar nebeneinander, aber auf verschiedenen Seiten eines Kreises $K_\alpha$, ($K_\alpha'$) liegenden Punkten annimmt, unterscheiden sich um eine Konstante, nämlich um die zu dem Kreise $K_\alpha'$, ($K_\alpha$) gehörende Periode Hieraus, aber auch schon aus dem früheren folgt, daß die verschiedenen Werte eines Integrals erster oder zweiter Gattung an einer Stelle sich um Größen unterscheiden, die aus den Fundamentalperioden des Integrals linear mit ganzzahligen Koeffizienten zusammengesetzt sind.

Zerschneiden wir das algebraische Gebilde längs der Kreise $K_\alpha$, $K_\alpha'$ und außerdem langs einer zwei Stellen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ verbindenden Linie $\sigma$, die die Kreise $K_\alpha$, $K_\alpha'$ nicht schneidet, so wird

in dem so zerschnittenen Gebilde das Elementarintegral dritter Gattung mit den Unendlichkeitsstellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ eindeutig. An den Kreisen verhält sich das Integral wie die Integrale erster und zweiter Gattung. Außerdem hat es noch die Periode $2\pi i$, um die es zunimmt, wenn die Linie $\sigma$ einmal in passendem Sinne überschritten wird.

## § 11. Die Riemannsche Methode.

Während Weierstraß zunächst die Integrale algebraisch definiert und dann mit Hilfe des Satzes von Vertauschung von Parameter und Argument bei Integralen dritter Gattung die Zusammenhangsverhältnisse des algebraischen Gebildes und die Periodeneigenschaften der Abelschen Integrale auf rein arithmetischem Wege herleitet, geht Riemann den umgekehrten Weg. Er bestimmt zunächst auf geometrischem Wege die Zusammenhangsverhältnisse der Riemannschen Fläche und beweist dabei die in § 2 angegebenen Sätze über die Zerschneidung der Riemannschen Fläche. Dann beweist er die Existenz der Integrale mit Hilfe des sog Dirichletschen Prinzips, dessen Gültigkeit allerdings erst von Hilbert bewiesen ist. (D. Hilbert, *Über das Dirichletsche Prinzip, Jahresber. d. deutschen Math. Vereinigung* 8, S. 184, 1900.) Die Periodenrelationen und die weiteren Sätze über die Integrale beweist er dadurch, daß er passend gewählte Integrale über die Begrenzung der in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelten Riemannschen Fläche ausrechnet.

## § 12. Die Primfunktionen.

Wie in § 10 seien $2p$ $\Omega$-Funktionen durch die Gleichungen

$$\Omega_\alpha(\mathfrak{p}) = \int\limits_{K_\alpha} dx' \int\limits_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{p}} \frac{dH(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')}{dx'}\, dx,$$

$$\Omega_\alpha'(\mathfrak{p}) = \int\limits_{K_{\alpha'}} dx' \int\limits_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{p}} \frac{dH(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')}{dx}\, dx$$

definiert. Dies sind, wie wir in § 10 sahen, Integrale zweiter Gattung mit der einen Periode $2\pi i$. Setzen wir daher

$$E_\alpha = e^{\Omega(\mathfrak{p})}, \qquad E_\alpha' = e^{\Omega_{\alpha'}(\mathfrak{p})},$$

so sind dies eindeutige transzendente Funktionen, die nirgends verschwinden, an den Unendlichkeitsstellen von $H(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ wesentlich singulär sind und an der Stelle $\mathfrak{u}$ gleich 1 werden. Die Funktionen heißen *nichtverschwindende E-Funktionen.* Weiter betrachtet Weierstraß noch $\Omega$-Funktionen, die definiert sind durch die Gleichung

$$\Omega(\mathfrak{p}; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_0) = \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_1} dx' \int_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{p}} \frac{dH(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')}{dx}\, dx.$$

Eine solche Funktion wird an den Stellen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_0$ unendlich wie $\lg t$ und $-\lg t$ und hat sonst nur Pole Ferner hat die Funktion nur die Periode $2\pi i$. Setzt man nach Weierstraß

$$E(\mathfrak{p}; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_0) = e^{\Omega(\mathfrak{p}; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_0)},$$

so ist dies eine eindeutige transzendente Funktion des algebraischen Gebildes, und zwar eine *Primfunktion,* da sie nur die einfache Nullstelle $\mathfrak{p}_1$ und den einfachen Pol $\mathfrak{p}_0$ hat. Es besteht der wichtige Satz: *Jede Funktion des Körpers läßt sich als Produkt solcher Primfunktionen darstellen.* Die nicht verschwindenden $E$-Funktionen spielen dabei die Rolle der Einheiten. Ferner ist auch jedes Abelsche Integral durch $E$-Funktionen darstellbar.

Statt der von Weierstraß benutzten Primfunktionen kann man auch andere einführen, z. B. die $E$-Funktionen, die F. Schottky (*Über eine spezielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes ungeändert bleibt, J. f Math.* **101**, S 242, 1887) für einen besonderen Fall und F. Klein (*Zur Theorie der Abelschen Funktionen, Math Ann.* **36**, S. 11, 1890) für den allgemeinen Fall definiert.

## § 13. Das Abelsche Theorem.

Das Abelsche Theorem kann in seiner allgemeinsten Fassung folgendermaßen ausgesprochen werden:

Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_r$ die Nullstellen und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_r$ die Unendlichkeitsstellen einer Funktion $x$ des Körpers Ferner sei $d\omega$ ein Abelsches Differential. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{b}_1} d\omega + \int_{\mathfrak{a}_2}^{\mathfrak{b}_2} d\omega + \cdots + \int_{\mathfrak{a}_r}^{\mathfrak{b}_r} d\omega \equiv \int_0^{\infty} R(x)\, dx,$$

wo $R(x)$ eine rationale Funktion von $x$ ist und wo das Kongruenzzeichen $\equiv$ hier und auch im folgenden bedeutet, daß die Gleichung nur gelten soll bis auf Perioden des links stehenden Integrals. Gilt umgekehrt für alle Abelschen Differentiale eine solche Beziehung, so gibt es eine Funktion des Körpers, die nur an den Stellen $\mathfrak{a}_i$ Null und an den Stellen $\mathfrak{b}_i$ unendlich wird. Es genügt schon, wenn die Beziehung für alle Differentiale erster Gattung besteht.

Das Abelsche Theorem gibt also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Divisor der Hauptklasse angehört. Der Beweis dieses äußerst wichtigen Satzes ist höchst einfach. Man sehe darüber N. H. Abel, *Werke*, herausgegeben von L. Sylow und S. Lie, 1, S. 145, 444, 515, Christiania 1881. Weierstraß beweist den Satz dadurch, daß er die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufstellt, daß ein Produkt von $E$-Funktionen eine Funktion des Körpers ist.

Für die Integrale der verschiedenen Gattungen spezialisiert, lautet das Theorem folgendermaßen:

1. Es sei $d\omega$ ein Differential erster Gattung. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{b}_1} d\omega + \int_{\mathfrak{a}_2}^{\mathfrak{b}_2} d\omega + \cdots + \int_{\mathfrak{a}_r}^{\mathfrak{b}_r} d\omega \equiv 0,$$

und zwar ist bei passender Wahl der Integrationswege die links stehende Summe *gleich* Null (nicht nur bis auf eine Periode) für *alle* Differentiale erster Gattung.

2. Es sei $d\omega$ ein Differential zweiter Gattung mit der einen, und zwar $(\mu+1)$-fachen, Unendlichkeitsstelle $\mathfrak{q}$ und es sei $\mathfrak{q}$ ein $\alpha$-facher Verzweigungspunkt in bezug auf $x$. Dann ist, wenn wir den Wert von $x$ an der Stelle $\mathfrak{q}$ mit $q$ bezeichnen,

$$\int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{b}_1} d\omega + \int_{\mathfrak{a}_2}^{\mathfrak{b}_2} d\omega + \cdots + \int_{\mathfrak{a}_r}^{\mathfrak{b}_r} d\omega \equiv g\left(\frac{1}{q}\right),$$

wo $g(1/q)$ eine ganze rationale Funktion von $1/q$ ist, deren Grad gleich der größten in $\mu/\alpha$ enthaltenen ganzen Zahl ist, und deren Koeffizienten durch die des Hauptteiles der Entwicklung von $d\omega$ in der Umgebung von $\mathfrak{q}$ bestimmt sind.

3. Es sei $d\omega$ ein Elementardifferential dritter Gattung mit den beiden Unendlichkeitsstellen $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ und den Residuen $-1$,

$+1$. Ferner seien $q_1, q_2$ die Werte von $x$ an den Stellen $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{b}_1} d\omega + \int_{\mathfrak{a}_2}^{\mathfrak{b}_2} d\omega + \cdots + \int_{\mathfrak{a}_r}^{\mathfrak{b}_r} d\omega \equiv \lg \frac{q_2}{q_1}.$$

Das Abelsche Theorem läßt sich auch noch in einer anderen, für die Anwendungen wichtigeren Form aussprechen, wobei wir uns auf die Integrale erster Gattung beschränken.

*Jede Summe von Integralen erster Gattung läßt sich darstellen als Summe von $p$ Integralen erster Gattung mit gegebenen unteren Grenzen. Die oberen Grenzen bestimmen sich algebraisch.* Ist nämlich

$$\int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{b}_1} dI_\alpha + \int_{\mathfrak{a}_2}^{\mathfrak{b}_2} dI_\alpha + \cdots + \int_{\mathfrak{a}_r}^{\mathfrak{b}_r} dI_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots p)$$

die gegebene Summe und sind $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_p$ die gegebenen unteren Grenzen, so kann man immer eine Funktion des Körpers finden, die ein Vielfaches des Divisors

$$\frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_r}{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_r} \frac{1}{\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_p} = \mathfrak{q}$$

ist. Die $p$ Nullstellen, die diese Funktion außer den $\mathfrak{a}_i$ noch hat, seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_p$. Dann ist nach dem Abelschen Theorem, und zwar für alle Integrale erster Gattung,

$$\int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{b}_1} dI_\alpha + \int_{\mathfrak{a}_2}^{\mathfrak{b}_2} dI_\alpha + \cdots + \int_{\mathfrak{a}_r}^{\mathfrak{b}_r} dI_\alpha \equiv \int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{p}_1} dI_\alpha + \int_{\mathfrak{q}_2}^{\mathfrak{p}_2} dI_\alpha + \cdots + \int_{\mathfrak{q}_p}^{\mathfrak{p}_p} dI_\alpha.$$

Die Stellen $\mathfrak{p}_i$ sind im allgemeinen *eindeutig* bestimmt, da der Divisor $\mathfrak{q}$ von der Ordnung $p$ ist und daher die Dimension seiner Klasse im allgemeinen gleich 1 ist. (Vgl § 6.)

## § 14. Das Umkehrproblem.

Es sei zunächst das Geschlecht $p$ des Körpers gleich 1, der Körper also elliptisch. Es sei $\mathfrak{a}$ eine feste und $\mathfrak{p}$ eine veränderliche Stelle des Körpers und es sei

$$\int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{p}} dI = u$$

das Integral erster Gattung. Dies Integral hat zwei voneinander unabhängige Perioden $2\omega$, $2\omega'$. Betrachtet man die Funktionen des Körpers als Funktionen des Integrals $u$, so werden sie eindeutige doppeltperiodische Funktionen von $u$ mit den beiden Grundperioden $2\omega$, $2\omega'$. Es sind dies die sogenannten *elliptischen Funktionen*. Man sagt auch, die algebraischen Funktionen eines Körpers vom Geschlechte 1 werden durch elliptische Funktionen *uniformisiert*.

Es sei $p > 1$. Ist $I$ ein Integral erster Gattung und würde man wieder setzen

$$\int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{p}} dI = u$$

und würde man wieder die Funktionen des Körpers als Funktionen des Integrals $u$ auffassen, so würde man Funktionen einer Veränderlichen erhalten, die mehr als zwei linear unabhängige Perioden haben, die also nach einem Satze der Funktionentheorie unendlich vieldeutig und daher nicht die naturgemäße Verallgemeinerung der elliptischen Funktionen sind. Erst Jacobi gelang es, das Umkehrproblem der Integrale erster Gattung so zu formulieren, daß es als naturgemäße Verallgemeinerung der Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung erscheint, nämlich folgendermaßen:

Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_p$ $p$ feste und $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_p$ $p$ veränderliche Stellen. Dann sind nach dem Abelschen Theorem die Summen

$$\int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{p}_1} dI_\alpha + \int_{\mathfrak{a}_2}^{\mathfrak{p}_2} dI_\alpha + \cdots + \int_{\mathfrak{a}_p}^{\mathfrak{p}_p} dI_\alpha = u_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots p)$$

durch die $p$ Stellen $\mathfrak{p}_i$ bis auf zusammengehörige Perioden eindeutig bestimmt, vorausgesetzt, daß der Integrationsweg eines jeden Integrals in allen Summen derselbe ist *Das Jacobische Problem ist nun, die rationalen symmetrischen Funktionen der $p$ Stellen $\mathfrak{p}_i$ als Funktionen der Integralsummen $u_\alpha$ darzustellen* Es zeigt sich, daß die Funktionen, die man so erhält, eindeutige $2p$-fach periodische Funktionen der $p$ Veränderlichen $u_\alpha$ sind, die im endlichen überall den Charakter rationaler Funktionen haben. Es sind dies die sogenannten *Abelschen Funktionen* von $p$ Veränderlichen, jedoch nicht die allgemeinsten.

Die Lösung dieses Umkehrproblems gaben zuerst Göpel und Rosenhain für den Fall $p = 2$, und zwar dadurch, daß es ihnen gelang, die Thetafunktionen einer Veränderlichen, durch die sich ja die elliptischen Funktionen so einfach darstellen lassen, zu verallgemeinern und *Thetafunktionen von zwei Veränderlichen* herzustellen. Mit deren Hilfe konnten sie dann die Abelschen Funktionen von zwei Veränderlichen darstellen. (A. Göpel, *Theoria transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis, J. f. Math.* **35**, S. 277, 1847 (deutsch in Ostwalds Klassikern Nr. 67); *Auszug mehrerer Schreiben des Dr. Rosenhain an Herrn Prof. Jacobi über die hyperelliptischen Transcendenten, J. f. Math.* **40**, S. 319, 1850; G. Rosenhain, *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultraelliptiques de la première classe, Mém. sav. étrang.* **11**, 1851 (deutsch in Ostwalds Klass. Nr. 65).)

Das allgemeine Problem ist zuerst von Riemann und von Weierstraß gelöst. Riemann verallgemeinerte die Methode von Göpel und Rosenhain. Er definierte Thetafunktionen von $p$ Veränderlichen, stellte durch diese die Abelschen Funktionen dar und zeigte, was aus diesen wird, wenn man ihre Argumente durch Summen von $p$ Integralen erster Gattung ersetzt. Ausführlicheres hierüber sehe man im nächsten Kapitel.

Weierstraß dagegen geht von den Differentialgleichungen

$$dI_\alpha(\mathfrak{p}_1) + dI_\alpha(\mathfrak{p}_2) + \cdots + dI_\alpha(\mathfrak{p}_p) = du_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots p)$$

aus. Er zeigt, daß sich diese Gleichungen so integrieren lassen, daß die symmetrischen Funktionen der $p$ Stellen $\mathfrak{p}_i$ Abelsche Funktionen der Größen $u_i$ werden. Dabei wird er ganz naturgemäß zu einfacheren Funktionen geführt, durch die sich die Abelschen Funktionen in einfacher Weise darstellen lassen. Diese einfachen Funktionen sind nichts anderes als die Thetafunktionen. Die Schönheit der Weierstraßschen Behandlung des Umkehrproblems besteht in der naturgemaßen Einführung der Thetafunktionen. Man sehe den betreffenden Abschnitt in den *Werken*, Bd. IV

Man kann die elliptischen Funktionen noch in anderer Weise verallgemeinern als durch die Abelschen Funktionen. Es lassen sich die Funktionen eines algebraischen Körpers vom Geschlechte $p = 1$ als elliptische Funktionen einer Veränderlichen $u$ darstellen. Man kann versuchen auch die Funktionen eines algebraischen Körpers vom Geschlechte $p > 1$ durch Funk-

tionen einer Veränderlichen darzustellen, die eindeutig sind und im endlichen überall den Charakter rationaler Funktionen haben. Man kann also versuchen, wie man sagt, auch diese Funktionen zu uniformisieren. Das gelingt mit Hilfe der *automorphen Funktionen.* Vgl. Kap. XIX.

### Lehrbücher und Monographien.

A. Brill und M. Noether, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. *Jahresber der Deutschen Math-Vereinigung* 3, Berlin 1894.

W. Wirtinger, Algebraische Funktionen und ihre Integrale. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* II B. 2, 1901.

K. Hensel, Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* II C. 5, 1921.

B. Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen. *Werke,* 2. Aufl. S. 90. Leipzig 1892.

C. Neumann, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. 2 Aufl. Leipzig 1884.

H. Stahl, Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig 1896.

P. Appell und E. Goursat, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Paris 1895

A. Clebsch und P. Gordan, Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig 1866.

F. Klein, Autographierte Vorlesungen über Riemannsche Flächen. Göttingen 1892—93.

K. Weierstraß, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten. *Werke* 4, Berlin 1902—03.

H. F. Baker, Abel's theorem and the allied theory including the theory of the thetafunctions Cambridge 1897.

H. Hancock, Report of the British Association, S. 560, 1898

L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. (Festschrift für Kummer.) *J. f Math* 92, S. 1, 1882.

R. Dedekind und H. Weber, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen *J. f Math.,* 92, S. 181, 1882.

H Weber, Lehrbuch der Algebra. Bd. 3, S 623 ff., Braunschweig 1908.

K. Hensel und G. Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln. Leipzig 1902.

F. Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie, Geometrie auf einer Kurve, Riemannsche Flachen, Abelsche Integrale Deutsch von E Löffler. Leipzig und Berlin 1921

H W E Jung, Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen Berlin und Leipzig 1923.

# Kapitel XVIII.

## Die Thetafunktionen und die Abelschen Funktionen.

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle a. d. S.

### § 1. Die Funktion $\vartheta(u)$.

Es sei

$$\chi(n) = \sum_{kl=1}^{p} n_k n_l \tau_{kl}, \qquad (\tau_{kl}, \tau_{lk})$$

eine quadratische Form der $p$ Veränderlichen $n_1, n_2, \ldots, n_p$. Ferner sei gesetzt

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \vartheta(u) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_p} \exp\left(\pi i \chi(n) + 2\pi i \sum_{k=1} u_k n_k\right),$$

wo in der Summe die $n_k$ unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen durchlaufen sollen.[1]) Die rechts stehende Summe *konvergiert* dann und nur dann absolut, *wenn die mit den imaginären Bestandteilen der $\tau_{kl}$ gebildete quadratische Form positiv definit ist.* Sie konvergiert dann für jeden endlichen Wert der Größen $u$. Die dadurch definierte Funktion dieser Größen heißt *Thetafunktion.* Über Thetafunktionen von einer Veränderlichen vgl. Kap. XVI. Thetafunktionen von mehr als einer Veränderlichen sind zuerst eingeführt von Göpel und Rosenhain (siehe Kap. XVII, § 14), und zwar solche von zwei Veränderlichen. Thetafunktionen von beliebig vielen Veränderlichen sind aufgestellt von Weierstraß (1849) *Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale. Werke* **1**, S. 111, Berlin 1894 und von Riemann (1857), *Theorie der Abelschen Funktionen. Werke*, 2. Aufl., S. 127, Leipzig 1892.

Die durch (1) und (2) definierte Thetafunktion hat folgende Eigenschaften:

---

1) Hier und in der Folge ist, um den Bau der Formel besser erkennen zu lassen, $\exp(u)$ für $e^u$ gesetzt.

1. *Sie ist eine ganze transzendente Funktion ihrer Argumente $u$.*

2. *Sie genügt den Gleichungen*

$$\vartheta(u_1, \cdots, u_k + 1, \cdots, u_p) = \vartheta(u_1, \cdots, u_k, \cdots, u_p),$$

$$\vartheta(u_1 + \tau_{1l}, u_2 + \tau_{2l}, \cdots, u_p + \tau_{pl}) = e^{-\pi i \tau_{ll} - 2\pi i u_l}\vartheta(u),$$

woraus allgemeiner folgt, wenn man bei ganzzahligen $h, g$ setzt

$$\omega_k = h_k + \sum_{l=1}^{p} g_l \tau_{kl},$$

$$\vartheta(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, \cdots, u_p + \omega_p) = \vartheta(u + \omega)$$
$$= \exp\left(-\pi i \chi(g) - 2\pi i \sum g_l u_l\right)\vartheta(u)$$

3. *Durch die Eigenschaften 1. und 2. ist die Funktion bis auf einen von den $\tau_{kl}$ abhängenden Faktor bestimmt.*

4. *Sie genügt den Differentialgleichungen*

$$4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{kk}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_k^2}, \quad 2\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{kl}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_k \partial v_l}.$$

5. *Sie ist durch die Eigenschaften 1., 2., 4. bis auf einen auch von den $\tau_{kl}$ unabhängigen Faktor bestimmt.*

Die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Größen $\tau_{kl}$ heißen *Parameter der Thetafunktionen.* Sie sind bis auf die durch die Konvergenzbedingung gegebenen Ungleichungen willkürlich. Die $p$ Größen in einer Spalte des Systems

$$(1, \tau) = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1p} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \tau_{p1} & \tau_{p2} & \cdots & \tau_{pp} \end{matrix}\right\}$$

heißen ein *zusammengehöriges Periodensystem* oder kurz eine *Periode der Thetafunktion.* Ebenso heißen $p$ Großen, die man aus dem System $(1, \tau)$ dadurch erhält, daß man die mit ganzen Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_p; g_1, g_2, \ldots, g_p$ multiplizierten Spalten zueinander addiert, ein zusammengehöriges Periodensystem oder eine Periode. Deutet man die reellen und imaginären Teile der Veränderlichen $u$ als rechtwinklige Punktkoordinaten in einem Raume von $2p$ Dimensionen, so entspricht dem Größengebiete

$$u_1 = t_1 + \sum_l s_l \tau_{1l}, \cdots, u_p = t_p + \sum_l s_l \tau_{pl},$$
$$(0 \leqq t_l < 1, \ 0 \leqq s_l < 1)$$

ein Parallelotop oder Rechtkant des Raumes, das *Periodenrechtkant* heißt. Nennt man zwei *Größensysteme* $u, u'$, *deren Differenz eine Periode ist, einander kongruent* ($\equiv$), so gibt es zu jedem Wertsystem $u$ ein ihm kongruentes, dessen zugehöriger Punkt im Periodenrechtkant liegt.

Die $p$ Gleichungen

$$\vartheta(u_1 - e_{11}, u_2 - e_{12}, \cdots, u_p - e_{1p}) = 0,$$
$$\vartheta(u_1 - e_{21}, u_2 - e_{22}, \cdots, u_p - e_{2p}) = 0,$$
$$\vartheta(u_1 - e_{p1}, u_2 - e_{p2}, \cdots, u_p - e_{pp}) = 0$$

haben $p!$ inkongruente Lösungen bei willkürlich gegebenen Werten der Konstanten $e$. (Poincaré, *Sur les fonctions abéliennes. C. R.* **92**, S. 958, 1881 und *Sur les fonctions* $\Theta$. *Bull. Sc. Math.* **11**, S. 129, 1883. Für die Summe der Lösungen gelten die Gleichungen (Poincaré, *Sur les fonctions abéliennes. Am. J.* 8, S. 289, 1886):

$$\sum u_1 = (p-1)! \sum_l e_{l1}, \cdots \sum u_p = (p-1)! \sum_l e_{lp}.$$

## § 2. Die Funktionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u)$.

Sind $c_1, c_2, \cdots, c_p$ irgend $p$ Größen, so lassen sich *reelle* Größen $h_1, h_2, \cdots, h_p; g_1, g_2, \cdots, g_p$ immer eindeutig so bestimmen, daß die Gleichungen bestehen:

$$c_k = h_k + \sum_l g_l \tau_{kl}.$$

Das so bestimmte System

$$\begin{bmatrix} g_1, g_2, \cdots, g_p \\ h_1, h_2, \cdots, h_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

heißt die *Periodencharakteristik der Größen* $c_k$. Man definiert eine *allgemeine Thetafunktion* durch die Gleichung

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1, & g_2, & \cdots, & g_p \\ h_1, & h_2, & \cdots, & h_p \end{bmatrix}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)$$
$$= \exp\left(\pi i \chi(g) + 2\pi i \sum_k g_k(u_k + h_k)\right)\vartheta(u + c)$$

Das System $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ heißt die *Charakteristik* dieser Thetafunktion Die in § 1 definierte Thetafunktion hat die Charakteristik 0, nämlich die, in der alle Zahlen $g, h$ Null sind. Wegen der Periodizitätseigenschaft der Funktion $\vartheta(u)$ genügt es, die Zahlen $g$ und $h$ zwischen 0 und 1 anzunehmen. Von den Charakteristiken

$$\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \cdots, g_p \\ h_1, h_2, \cdots, h_p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1', g_2', \cdots, g_p' \\ h_1', h_2', \cdots, h_p' \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} g + g' \\ h + h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_1', g_2 + g_2', \cdots, g_p + g_p' \\ h_1 + h_1', h_2 + h_2', \cdots, h_p + h_p' \end{bmatrix}$$

heißt die dritte die Summe der beiden ersten.

Die hier definierten Funktionen sind zuerst aufgestellt von Prym (F. Prym, *Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie.* S. 25, Leipzig 1882). Mit ihnen im wesentlichen identisch sind die Weierstraßschen Funktionen $\Theta(u_1, u_2, \cdots, u_p; \mu, \nu)$. (F. Schottky, *Abriß einer Theorie der Abelschen Funktionen von drei Variabeln.* S. 1. Leipzig 1880.) Die Funktionen $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)$ haben folgende Eigenschaften:

1. *Sie sind ganze transzendente Funktionen der* $u_1, u_2, \ldots, u_p$.
2. *Es ist*

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_1, \cdots, u_k + 1, \cdots, u_p) = e^{2 g_k \pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u), \tag{1}$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_1 + \tau_{1k}, \cdots, u_p + \tau_{pk}) = e^{-\pi i(\tau_{kk} + 2u_k + 2h_k)}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u), \tag{2}$$

oder allgemeiner, wenn $\omega$ die durch die Gleichungen

$$\omega_l = h_l' + \sum_k g_k' \tau_{lk} \tag{3}$$

mit ganzzahligen $g', h'$ definierte Periode bedeutet,

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u + \omega) \tag{4}$$
$$= \exp\left(-\pi i \chi(g') - 2\pi i \sum g_k' u_k + 2\pi i \sum (h_k' g_k - h_k g_k')\right)\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u).$$

3. *Durch die Eigenschaften 1. und 2. ist die Funktion bis auf einen in den $u$ konstanten Faktor bestimmt*, der noch von den Parametern $\tau_{kl}$ abhängen kann.

4. Sie genügt den Differentialgleichungen

$$4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{kk}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u_k^2}, \quad 2\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{kl}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u_k \partial u_l}.$$

5. *Durch die Eigenschaften 1, 2., 4. ist sie bis auf einen auch von den $\tau_{kl}$ unabhängigen Faktor bestimmt.*

Bedeutet $\omega$ das Größensystem (3) mit reellen, aber nicht notwendig ganzzahligen $g'$, $h'$, so gibt den Zusammenhang zwischen zwei Funktionen mit verschiedener Charakteristik die Gleichung

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u+\omega) = \exp\left(-\pi i \chi(g) - 2\pi i \sum g_k'(u_k + h_k + h_k')\right) \vartheta\begin{bmatrix} g+g' \\ h+h' \end{bmatrix}(u).$$

Im besonderen ergibt sich hieraus und aus (4), wenn die $g'$, $h'$ *ganze* Zahlen sind, also $\omega$ eine Periode ist,

$$\vartheta\begin{bmatrix} g+g' \\ h+h' \end{bmatrix}(u) = \exp\left(2\pi i \sum g_k h_k'\right) \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u) \tag{5}$$

und ferner

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(-u_1, \cdots, -u_p) = \vartheta\begin{bmatrix} -g \\ -h \end{bmatrix}(u_1, \cdots, u_p). \tag{6}$$

## § 3. Thetafunktionen höherer Ordnung.

Die bisher betrachteten Thetafunktionen heißen *Thetafunktionen erster Ordnung*. Solche höherer Ordnung werden in folgender Weise definiert:

Eine ganze transzendente Funktion $\Theta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ heißt eine *Thetafunktion $n$-ter Ordnung mit der Charakteristik* $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$, wenn sie den Gleichungen genügt

$$\Theta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_1 \cdots u_k + 1, \cdots u_p) = e^{2 g_k \pi i}\, \Theta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u),$$

$$\Theta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u_1 + \tau_{1k}, u_2 + \tau_{2k}, \cdots, u_p + \tau_{pk})$$
$$= \exp\left(-\pi i n \tau_{kk} - 2\pi i n u_k - 2\pi i h_k\right) \Theta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u).$$

Eine Thetafunktion $n$-ter Ordnung ist z. B. das Produkt von $n$ Thetafunktionen 1. Ordnung, und ihre Charakteristik ist gleich der Summe der Charakteristiken der Faktoren. Die Theta $n$-ter Ordnung haben ähnliche Eigenschaften wie diejenigen 1. Ordnung. Man kann z. B. die Thetafunktion $n$-ter Ordnung mit der Charakteristik $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ geradeso durch die Thetafunktion $n$-ter Ordnung mit der Charakteristik $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ausdrücken wie $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)$ durch $\vartheta(u)$.

Außerdem gelten folgende Sätze: Es gibt unendlich viele Thetafunktionen $n$-ter Ordnung mit gegebener Charakteristik $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$. Aber zwischen je $n^p + 1$ solchen Funktionen besteht eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten. *Es lassen sich also alle diese Funktionen durch $n^p$ geeignet gewählte linear und homogen ausdrücken.* Die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\Theta_{n_1}(u_1 - e_{11}, u_2 - e_{12}, \cdots, u_p - e_{1p}) = 0, \\
&\Theta_{n_2}(u_1 - e_{21}, u_2 - e_{22}, \cdots, u_p - e_{2p}) = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\Theta_{n_p}(u_1 - e_{p1}, u_2 - e_{p2}, \cdots, u_p - e_{pp}) = 0,
\end{aligned}$$

in denen $\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_{n_p}$ beliebige Thetafunktionen der Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sind und in denen die $e$ beliebige Konstanten sind, haben

$$N = n_1 n_2 \cdots n_p \cdot p!$$

inkongruente Lösungen (Poincaré, *Sur les fonctions $\Theta$ Bull. Sc. math.* **11**, S. 129, 1883.) Für die Summe der $N$ Lösungen gelten die Gleichungen (W Wirtinger, *Zur Theorie der allgemeinen Thetafunktionen Wiener Anz.* **32**, S. 58, 1895; *Zur Theorie der 2n-fach periodischen Funktionen*, 2 Abh., *Monatsh. f Math.* 7, S 1, 1896). Für die Summe der Lösungen gilt

$$\begin{aligned}
&\sum u_1 = n_1 n_2 \cdots n_p (p-1)! \sum_k e_{k1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\sum u_p = n_1 n_2 \cdots n_p (p-1)! \sum_k e_{kp}.
\end{aligned}$$

## § 4. Die Abelschen Funktionen.

Eine eindeutige Funktion $f(v_1, v_2, \cdots, v_p) = f(v)$ von $p$ Veränderlichen $v_1, v_2, \ldots, v_p$, die im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Funktion hat, heißt eine *Abelsche Funktion*, wenn sie $2p$-fach periodisch ist, d. h. wenn es $p$ linear und ganzzahlig unabhängige Größensysteme

$$(1) \qquad \omega_{1k}, \omega_{2k}, \ldots, \omega_{pk}, \qquad (k = 1, 2, \cdots, 2_p)$$

gibt, so daß

$$f(v_1 + \omega_{1k}, v_2 + \omega_{2k}, \cdots, v_p + \omega_{pk}) = f(v_1, v_2, \cdots, v_p).$$

Man nennt je $p$ Größen $\omega_{1k}, \omega_{2k}, \ldots, \omega_{pk}$ ein *zusammengehöriges Periodensystem* oder kurz eine *Periode* der Funktion $f(v)$. Sind $n_1, n_2, \ldots, n_{2p}$ ganze Zahlen und setzt man

$$(2) \qquad \omega_k = n_1 \omega_{k1} + n_2 \omega_{k2} + \cdots n_{2p} \omega_{k,2p}, \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

so ist auch

$$f(v_1 + \omega_1, v_2 + \omega_2, \cdots, v_p + \omega_p) = f(v_1, v_2, \cdots, v_p).$$

Man nennt daher auch die Größen $\omega_k$ eine Periode von $f(v)$. Eine Abelsche Funktion hat daher unendlich viele Perioden, aber es lassen sich die Größen $\omega_{kl}$ so wählen, daß sich alle Perioden in der Form (2) mit ganzzahligen $n$ darstellen lassen. Man nennt ein solches Periodensystem *primitiv*. Ist (1) ein primitives Periodensystem, so ist $(\omega'_{kl})$ dann und nur dann auch primitiv, wenn es aus dem System $(\omega_{kl})$ durch eine lineare ganzzahlige unimodulare Substitution hervorgeht

Deutet man den reellen und imaginären Teil der Veränderlichen als rechtwinklige Koordinaten in einem Raume von $2p$ Dimensionen, so entspricht der Gesamtheit der durch

$$v_1 = \sum_{l=1}^{2p} t_l \omega_{1l}, \cdots, v_p = \sum_{l=1}^{2p} t_l \omega_{pl}, \qquad 0 \leqq t_l < 1$$

gegebenen Stellen ein Rechtkant, das *Periodenrechtkant* heißt. Man nennt zwei Wertsysteme $v$ und $v'$ und ebenso die ihnen im Raume von $2p$ Dimensionen entsprechenden Stellen einander *kongruent* $(v \equiv v')$, wenn sich das System $v$ von dem System $v'$ nur um eine Periode unterscheidet. Zu jedem Wertsystem $v$ gibt es ein und nur ein ihm kongruentes, dessen zugehörige Stelle im Periodenrechtkant liegt Man bekommt alle Werte

einer Abelschen Funktion, wenn man die $v$ auf das Periodenrechtkant beschränkt, da ja eine solche Funktion an kongruenten Stellen denselben Wert hat.

Alle Abelschen Funktionen, die die $\omega_{kl}$ zu Perioden (nicht notwendig als primitive) haben, rechnet man zu einer *Klasse*. Es gelten folgende allgemeine Sätze:

Die Ableitung einer Abelschen Funktion ist eine Abelsche Funktion derselben Klasse.

Zu jeder Abelschen Funktion $f_1(v)$ kann man $p - 1$ Funktionen $f_2(v), f_3(v), \ldots, f_p(v)$ derselben Klasse so bestimmen, daß ihre Funktionaldeterminante nicht identisch Null ist. Die Gleichungen

$$f_1(v) = s_1, \; f_2(v) = s_2, \; \cdots, \; f_p(v) = s_p$$

haben dann, wenn die $s$ nicht speziell gewählt sind, nur eine endliche Zahl inkongruenter Lösungen. Diese Zahl ist unabhängig von der Wahl der Größen $s$, vorausgesetzt, daß diese nicht singulär sind. Diese Zahl sei $m$.

Ist $f(v)$ irgendeine neue Funktion derselben Klasse, so genügt sie einer algebraischen Gleichung vom Grade $m$, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $f_1(v), f_2(v), \ldots, f_p(v)$ sind. Diese Gleichung ist entweder unzerlegbar oder zerfällt in mehrere miteinander identische Gleichungen.

Ist die Gleichung $m$-ten Grades, der $f(v)$ genügt, unzerlegbar, so lassen sich alle Funktionen der Klasse rational ausdrücken durch die $p + 1$ Funktionen $f(v), f_1(v), \ldots, f_p(v)$. *Die Funktionen der Klasse bilden daher einen algebraischen Körper von $p$ unabhängigen Veränderlichen*

Die Größen $v$ sind in diesem Körper Integrale erster Gattung von totalen Differentialen. Beschränkt man die $p$ unabhängigen Veränderlichen durch $p - 1$ algebraische Gleichungen, so geht der Körper über in einen Körper *einer* Veränderlichen und die $v$ werden linear unabhängige Integrale erster Gattung dieses Körpers. Der Körper ist also von einem Geschlechte $q \geqq p$. Die Perioden dieser Integrale sind die Größen $\omega_{kl}$ und es bestehen daher zwischen diesen gewisse Gleichungen, die sich aus den Riemannschen Gleichungen für die Perioden der Integrale erster Gattung ergeben (vgl. Kap XVII § 10). Durch eine lineare Transformation der Veränderlichen kann man zufolge dieser Gleichungen erreichen, daß das primitive Periodensystem folgende Gestalt hat

$$\begin{matrix} \frac{1}{e_1} & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ 0 & \frac{1}{e_2} & \cdots & 0 & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{e_p} & a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{pp} \end{matrix}.$$

Dabei sind die $e$ ganze Zahlen (und zwar $e_1 = 1$) der Art, daß $e_{\lambda+1}$ durch $e_\lambda$ teilbar ist. Ferner ist $a_{kl} = a_{lk}$ und die mit den imaginären Bestandteilen der $a_{kl}$ gebildete quadratische Form ist positiv definit Hieraus folgt dann weiter:

*Die Abelschen Funktionen lassen sich rational durch Thetafunktionen ausdrucken.* Z. B. ist der Quotient zweier Thetafunktionen $n$-ter Ordnung mit derselben Charakteristik und mit denselben Perioden eine Abelsche Funktion.

*Jede Abelsche Funktion läßt sich als Quotient von zwei ganzen transzendenten Funktionen darstellen.*

*Eine Abelsche Funktion ist nie eine ganze transzendente Funktion.*

Da sich jede Abelsche Funktion durch Thetafunktionen ausdrücken läßt, so bekommt man alle Abelschen Funktionen, wenn man sich auf solche Klassen Abelscher Funktionen beschränkt, deren primitives Periodensystem durch lineare Transformation der Veränderlichen auf die Form $(1, \tau)$ des § 1 gebracht werden kann, deren Perioden also den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{p} (\omega_{l\lambda}\,\omega_{m,k+p} - \omega_{l,k+p}\,\omega_{mk}) = 0$$

genügen.

Ferner gilt noch der Satz: *Jede Abelsche Funktion besitzt ein algebraisches Additionstheorem.*

Die Sätze dieses Paragraphen stammen von Weierstraß (1880) K. Weierstraß, *Untersuchungen über die 2r-fach periodischen Funktionen von r Veränderlichen. Werke* **2**, S. 125, 1895.

## § 5. Die Transformation der Thetafunktionen. Multiplikation. Teilung. Komplexe Multiplikation.

Es sei

$$(1)\qquad (\omega_{lk}), \qquad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \cdots, p \\ k = 1, 2, \cdots, 2p \end{pmatrix}$$

ein primitives Periodensystem von Abelschen Funktionen der $p$ Veränderlichen $v$, das den Gleichungen

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{p} (\omega_{lk}\omega_{m,k+p} - \omega_{l,k+p}\omega_{mk}) = 0$$

genügt. Führt man statt der Veränderlichen $v$ neue, $u$, durch die lineare Substitution

$$v_l = \sum_{k=1}^{p} \omega_{lk} u_k$$

ein, so erhalten wir Abelsche Funktionen, für die man als primitives Periodensystem das System $(1, \tau)$ des § 1 nehmen kann, wenn die $\tau$ durch die Gleichungen

$$\omega_{l,p+k} = \sum_{m=1}^{p} \omega_{lm}\tau_{mk}$$

bestimmt werden. Es ist wegen der Gleichungen (2) $\tau_{kl} = \tau_{lk}$. Ferner nehmen wir an, daß die $\omega_{kl}$ so gewählt sind, daß die aus den imaginären Bestandteilen der $\tau$ gebildete quadratische Form positiv definit ist. Dann sind durch das Periodensystem $(1, \tau)$ Thetafunktionen bestimmt, wie in § 1 auseinander gesetzt ist.

Führt man statt der Perioden $\omega$ andere durch die linearen Gleichungen

$$(3)\qquad \omega_{kl} = \sum_{m=1}^{2p} c_{ml}\omega'_{km}$$

ein, wo die $c$ ganze Zahlen sind, und sollen die $\omega'$ denselben Bedingungen genügen wie die $\omega$, so muß im allgemeinen das Koeffizientensystem $(c)$ den Gleichungen

$$(4)\qquad \sum_{m=1}^{p} (c_{km}c_{l,m+p} - c_{lm}c_{k,m+p}) \quad \begin{cases} = 0 & \text{für } l \neq k \\ = n & \text{für } l = k \end{cases}$$

genügen und außerdem die Determinante $|c|$ positiv sein. Nur wenn die $\omega$ außer den Gleichungen (2) noch anderen genügen, brauchen die Gleichungen (4) nicht zu bestehen. Man nennt dann das Periodensystem $(\omega)$ singulär. (Humbert, *Sur les fonctions Abéliennes singulières. J. de Math.* (5) **5**, S. 233, 1899 und (5) **6**, S. 279, 1900 und auch dessen Arbeiten in den *C. R.* 1898, 1899.) Diesen Fall schließen wir aus.

Die Determinante $|c|$ hat den Wert $n^p$. Ist $n = 1$, so heißt die Transformation *linear*.

Man kann wieder neue Veränderliche $u'$ durch die Gleichungen

$$v_l = \sum_{k=1}^{p} \omega'_{lk} u_k'$$

einführen, so daß die Abelschen Funktionen der $v$ übergehen in Funktionen der $u'$ mit den Perioden $(1, \tau')$, wo die $\tau'$ durch die Gleichungen

$$\omega'_{l,k+p} = \sum_{m=1}^{p} \omega'_{lm} \tau'_{mk}$$

definiert sind. Zu dem Periodensystem gehören wieder Thetafunktionen.

Den Übergang von den Thetafunktionen mit den Moduln $\tau$ zu den mit denen Moduln $\tau'$ nennt man *Transformation der Thetafunktionen.* Die Zahl $n$, deren $p$-te Potenz gleich der Determinante $|c|$ ist, heißt der *Grad* oder die *Ordnung der Transformation* Ist $n = 1$, so heißt die Transformation *linear*. Hat das ursprüngliche Periodenrechtkant der $\omega$ den Inhalt $\Pi$, so hat das neue der $\omega'$ den Inhalt $n^{-p}\Pi$. Zwischen den Moduln $\tau$ und $\tau'$ der ursprünglichen und der transformierten Thetafunktionen bestehen folgende bilineare Gleichungen

$$\sum_l c_{ml}\tau_{lk} + \sum_{l,r} c_{p+r,l}\tau'_{mr}\tau_{lk} = c_{m,p+k} + \sum_r c_{p+r,p+k}\tau'_{mr}.$$

Die transformierten Theta sind bis auf einen nur von der Transformation abhängenden Exponentialfaktor Thetafunktionen $n$-ter Ordnung, wenn man sie als Funktionen der ursprünglichen Veränderlichen $u$ und Moduln $\tau$ auffaßt, und lassen sich daher ganz und rational durch die urspünglichen Theta ausdrücken. Die Koeffizienten hängen bei dieser Darstellung bis auf einen gemeinsamen Faktor algebraisch von den Nullwerten der ursprünglichen Theta ab.

Sind $T$ und $S$ zwei Transformationen der Ordnungen $n$ und $m$, so ist $nm$ die Ordnung der aus ihnen zusammengesetzten Transformation $TS$.

Betrachtet man die Funktionen mit den Veränderlichen $v'$ und den Moduln $\omega'$ als die ursprünglichen und die Theta mit den Veränderlichen $v$ und den Moduln $\omega$ als die neuen, so nennt man den Übergang von den einen zu den anderen auch eine Transformation. Man nennt sie die *inverse* der früheren und bezeichnet sie mit $T^{-1}$, wenn die frühere $T$ genannt war. Die Transformationsgleichungen ergeben sich durch Auflösen der Gleichungen (3) in der Form

$$\omega'_{kl} = \sum_{m=1}^{2p} c'_{ml}\omega_{km},$$

wo die $c'$ nun nicht mehr ganze Zahlen sein werden. Es ist praktisch, auch solche Transformationen zuzulassen. Die neuen Funktionen sind dann nicht rational durch die früheren auszudrucken, sondern algebraische Funktionen von ihnen. Die Transformation $TT^{-1}$ laßt alles ungeändert und heißt die *identische Transformation*. Da ihre Ordnung gleich 1 ist, so ist die Ordnung von $T^{-1}$ gleich $n^{-1}$. Ist $T$ linear ganzzahlig, so gilt dasselbe von $T^{-1}$. Durch Zusammensetzen von Transformationen der beiden hier betrachteten Arten kann man die allgemeinsten Transformationen erhalten.

Ist das System $(c)$ im besonderen von der Beschaffenheit, daß in der Diagonale überall $n$ steht und an allen anderen Stellen 0, so lauten die Beziehungen zwischen den $v, \tau$ und den $v', \tau'$

$$v_\alpha' = n_\alpha v_\alpha, \quad \tau = \tau'.$$

Die so definierte Transformation heißt *Multiplikation*, die inverse *Teilung*.

Die *linearen ganzzahligen* Transformationen lassen sich aus einer endlichen Zahl $\frac{1}{2}p(3p+1)$ von *elementaren* Transformationen zusammensetzen

Man nennt zwei Transformationen, die sich sich nur durch eine lineare ganzzahlige Transformation unterscheiden, *äquivalent*. Es gibt nur eine endliche Zahl nichtäquivalenter ganzzahliger Transformationen einer gegebenen Ordnung.

Es sei $f(v)$ eine Abelsche Funktion mit den Perioden (1). Man kann sich fragen, ob es Konstante $m_1, m_2, \ldots, m_p$ gibt,

so daß die Perioden von $f(v)$ auch Perioden von $f(m_1 v_1, m_2 v_2, \ldots, m_p v_p)$ sind. Es muß dann ganze Zahlen $c$ geben, so daß die Gleichungen bestehen

$$(5) \qquad m_\mu \omega_{\mu\alpha} = \sum_{\beta=1}^{2p} c_{\alpha\beta} \omega_{\mu\beta}.$$

Diese Gleichungen sind entweder identisch erfüllt für beliebige $\omega$. Dann haben wir die gewöhnliche Multiplikation. Oder die Gleichungen sind nicht identisch erfüllt. Dann müssen die $\omega$ gewissen Gleichungen genügen. Der Übergang von den Funktionen $f(v)$ zu den Funktionen $f(mv)$ heißt in diesem Falle *komplexe Multiplikation*, da die Faktoren $m$ sich als imaginäre Zahlen ergeben. Durch die Gleichungen (5) wird eine Transformation der Thetafunktionen definiert. Diese hat die Eigenschaft, daß die ursprünglichen Moduln $\tau$ und die neuen $\tau'$ miteinander identisch sind. Man nennt eine solche Transformation eine *prinzipale*. Bezeichnet man die charakteristische Determinante des Transformationssystems $(c)$ mit $|c - z|$, so gilt für die komplexe Multiplikation folgender grundlegende Satz:

*Zu einer Transformation* $(c)$ *gibt es dann und nur dann Thetafunktionen, für die sie eine komplexe Multiplikation darstellt, wenn ihre charakteristische Determinante* $|c - z|$ *in lauter lineare Elementarteiler zerfällt und nur für solche Werte von* $z$ *verschwindet, deren absoluter Betrag gleich der Quadratwurzel aus dem Transformationsgrade ist.* (Dieser Satz ist zuerst bewiesen von G. Frobenius, *Über die prinzipale Transformation der Thetafunktionen mehrerer Variabeln. J. f. Math.* **95**, S. 264, 1883)

## § 6. Thetafunktionen mit zweiteiliger Charakteristik. Charakteristikentheorie.

Wie sich aus den Formeln (1), (2), § 2 ergibt, die auch für Thetafunktionen höherer Ordnung gelten, ist eine Thetafunktion dann und nur dann eine *gerade* oder *ungerade* Funktion ihrer Argumente, wenn ihre Charakteristik aus *Hälften ganzer Zahlen* besteht. Man nennt eine solche Charakteristik zweiteilig. Von besonderer Wichtigkeit sind *Theta erster Ordnung mit zweiteiliger Charakteristik*. Da zwei Theta, deren Charakteristiken sich um ganze Zahlen unterscheiden, nicht wesentlich verschieden sind (siehe (7), § 2), so genügt es, den einzelnen Zahlen in der Charakteristik den Wert 0 und $\frac{1}{2}$ beizulegen. Daher

gibt es nur eine endliche Zahl, nämlich $2^{2p}$ *Thetafunktionen erster Ordnung mit zweiteiliger Charakteristik.* Von diesen sind $\frac{1}{2}(2^{2p}+2^p)$ *gerade* und $\frac{1}{2}(2^{2p}-2^p)$ *ungerade.* Man pflegt in der Bezeichnung der zweiteiligen Charakteristiken den Nenner 2 fortzulassen. Die Zahlen einer solchen Charakteristik

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p' \end{bmatrix}$$

haben also den Wert 0 oder 1. Zu jeder solchen Charakteristik $[\varepsilon]$ gehört eine bestimmte Thetafunktion erster Ordnung, die mit $\vartheta_{[\varepsilon]}(u)$ oder $\vartheta_\varepsilon(u)$ bezeichnet wird. Daher heißt eine solche Charakteristik *Thetacharakteristik* (Th. Ch.). Man nennt eine Th. Ch. *a gerade oder ungerade, jenachdem* $\vartheta_a$ *gerade oder ungerade ist.* Es ist eine Th. Ch. $[\varepsilon]$ gerade oder ungerade, jenachdem $\sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\alpha'$ gerade oder ungerade ist.

Durch die Th. Ch. $[\varepsilon]$ wird auch eine bestimmte halbe Periode definiert, nämlich

$$\frac{1}{2}\varepsilon_k' + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p}\varepsilon_l \tau_{kl}, \qquad (k=1,2,\cdots,p).$$

Man kann daher $[\varepsilon]$ auch als *Periodencharakteristik* (P. Ch.) auffassen. Man bezeichnet auch die P. Ch. kurz mit einem Buchstaben und die zugehörige Halbperiode mit demselben Buchstaben. Unter den P. Ch. ist eine ausgezeichnet, nämlich diejenige, die aus lauter Nullen besteht. Diese wird mit 0 bezeichnet. Die zu ihr gehörende Halbperiode ist gleichzeitig Ganzperiode, was bei keiner anderen P. Ch. der Fall ist.

Sind $a, b, c, \ldots$ irgendwelche Charakteristiken, so bezeichnet man ihre Summe mit $abc\cdots$. Bei dieser Zusammensetzung gilt das assoziative und das kommutative Gesetz. Es ist $aa=a^2=0$ und die Null spielt die Rolle der Einheit.

Ist $a$ eine Th. Ch. und $\alpha$ eine P. Ch., so ist bis auf einen konstanten Faktor $\vartheta_a(u+\alpha)$ gleich $\vartheta_{a\alpha}(u)$ (vgl. § 2). Man sagt, die Halbperiode $\alpha$ führt $\vartheta_a$ in $\vartheta_{a\alpha}$ über. *Es ist also die Summe einer Th. Ch. und einer P. Ch. eine Th. Ch.* Sind ferner $a, b$ Th. Ch., so gibt es eine bestimmte Halbperiode, die $\vartheta_a$ in $\vartheta_b$ überführt. Die zu dieser gehörende P. Ch. ist $ab$. *Es ist also die Summe zweier Th. Ch. eine P. Ch. Dagegen ist die Summe zweier P. Ch. wieder als P. Ch. aufzufassen.* Sind ferner

$a, b, c$ irgend drei Th. Ch., so ist $bc$ eine P. Ch., also $a(bc) = abc$ eine Th. Ch.

Aus den $2^{2p}$ Thetafunktionen mit zweiteiliger Charakteristik lassen sich auf mannigfache Weise Abelsche Funktionen bilden, und zwar lassen sich alle Abelschen Funktionen mit denselben Perioden rational durch die Theta ausdrücken. Im besonderen gilt: Der Quotient

$$\frac{\vartheta_{a_1}(u)\vartheta_{a_2}(u)\cdots}{\vartheta_{b_1}(u)\vartheta_{b_2}(u)\cdots}$$

ist dann und nur dann eine Abelsche Funktion, wenn Zähler und Nenner gleich viel Faktoren enthalten und wenn die Summe aller Th. Ch. die P. Ch. 0 ergibt. So sind z. B.

$$\frac{\vartheta_a^2(u)}{\vartheta_b^2(u)}, \quad \frac{\vartheta_a(u)\vartheta_b(u)}{\vartheta_c(u)\,\vartheta_{abc}(u)}$$

Abelsche Funktionen.

Sind $\alpha, \beta$ zwei P. Ch., so hängt es nur von $\alpha, \beta$ ab, ob die Abelsche Funktion

$$\frac{\vartheta_{a\alpha}\,\vartheta_{a\beta}}{\vartheta_a\,\vartheta_{a\alpha\beta}}$$

eine *gerade* oder *ungerade* Funktion ist. Im ersten Fall nennt man die beiden Halbperioden $\alpha, \beta$ *syzygetisch*, im anderen *azygetisch*. Die Bezeichnung stammt von Frobenius. (Siehe die Literaturangabe weiter unten.) Das Zeichen $(\alpha \mid \beta)$ bedeutet $+1$ oder $-1$, je nachdem $\alpha, \beta$ syzygetisch oder azygetisch sind. Für dies Zeichen gelten die Rechenregeln

$$(\alpha \mid \beta) = (\beta \mid \alpha), \quad (\alpha\beta \mid \gamma) = (\alpha \mid \gamma)(\beta \mid \gamma).$$

Die Halbperiode 0 und nur diese ist zu allen anderen syzygetisch.

Man nennt ferner drei Th. Ch. $a, b, c$ und ebenso die zugehörigen Thetafunktionen *syzygetisch* oder *azygetisch*, je nachdem die Abelsche Funktion

$$\frac{\vartheta_a\,\vartheta_b}{\vartheta_c\,\vartheta_{abc}}$$

*gerade* oder *ungerade* ist

Sind $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ $n$ P. Ch., so nennt man sie *unabhängig*, wenn die aus ihnen durch Zusammensetzung zu bildenden $2^n$ P. Ch. alle voneinander verschieden sind. Diese $2^n$ P. Ch. bilden dann eine Abelsche Gruppe vom Grade $2^n$. Man nennt $n$ die *Ordnung* der Gruppe. Die P. Ch. $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ bilden eine *Basis*

der Gruppe. Die Ordnung $n$ einer solchen Gruppe ist höchstens $2p$. Ist $n = 2p$, so sind in der Gruppe alle P. Ch. enthalten.

Sind die P. Ch. $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ voneinander unabhängig, so haben die Gleichungen

$$(\omega \mid \varkappa_1) = \varepsilon_1, \ (\omega \mid \varkappa_2) = \varepsilon_2, \ \ldots, \ (\omega \mid \varkappa_n) = \varepsilon_n,$$

wo alle $\varepsilon$ gleich $+1$ oder $-1$ sind, bei gegebenen $\varepsilon$ genau $2^{2p-n}$ Lösungen $\omega$.

Genügen die P. Ch. $\varkappa$ den Gleichungen $(\varkappa_l \mid \varkappa_m) = +1$, so sind alle P. K. der durch die $\varkappa$ definierten Gruppe zueinander syzygetisch. Für eine solche Gruppe ist die Ordnung $n \leqq p$. Ist $n = p$, so heißt eine derartige Gruppe eine *Göpelsche Gruppe*.

Genügen $n$ P. Ch. $\varkappa$ den Gleichungen $(\varkappa_l \mid \varkappa_m) = -1$, so nennt man sie eine *azygetische Reihe*. (Es sind aber nicht je zwei P. Ch. der durch die Reihe definierten Gruppe azygetisch.) Ist die Summe $\varkappa_1 \varkappa_2 \cdot \cdot \varkappa_n = 0$, so nennt man die Reihe *geschlossen*, sonst *ungeschlossen* Für eine ungeschlossene azygetische Reihe ist $n \leqq 2p$, für eine geschlossene $n \leqq 2p + 1$. Die P. Ch. einer ungeschlossenen Reihe sind immer unabhängig.

Man kann mit diesen Sätzen eine übersichtliche Bezeichnung für die Theta und für die P. Ch. herleiten. Ist nämlich $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{2p}$ eine ungeschlossene azygetische Reihe, so kann man immer eine Th Ch. $a$ so finden, daß die $2p + 1$ Th. Ch. $a$, $a\varkappa_1, a\varkappa_2, \ldots, a\varkappa_{2p}$ alle gleichen Charakter haben, d. h., daß sie entweder alle gerade oder alle ungerade sind. Diese bezeichnen wir mit den Zahlen von 1 bis $2p + 1$. Irgendeine Kombination einer geraden Anzahl dieser Zahlen ist dann gleich einer Kombination der P. Ch. $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{2p}$, also gleich einer P. Ch. Man erhält so jede P. Ch mit Ausnahme der 0. Dagegen ist eine Kombination einer ungeraden Anzahl der Zahlen von 1 bis $2p + 1$ eine Th. K. Bezeichnet $l$ die Zahl der in einer solchen Kombination enthaltenen Zahlen, so gibt folgende Tabelle darüber Aufschluß, wann die entsprechende Th. Ch gerade oder ungerade ist.

(I) $p \equiv 0$ oder $1 \pmod 4$;

$l \equiv 1 \pmod 4$, die Th Ch. ist gerade,

$l \equiv 3 \pmod 4$, die Th. Ch. ist ungerade;

(II) $p \equiv 2$ oder 3 (mod 4);

$l \equiv 1$ (mod 4), die Th. Ch. ist ungerade,

$l \equiv 3$ (mod 4), die Th. Ch. ist gerade.

Man bekommt auf diese Weise alle Th. Ch.

Beispiele: $p = 1$. Hier ist $2p + 1 = 3$. Man hat die drei geraden Funktionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ und die ungerade $\vartheta_{123}$. Die von 0 verschiedenen 3 P. Ch. sind zu bezeichnen mit 12, 13, 23.

$p = 2$. Es ist $2p + 1 = 5$. Man hat zunächst 5 ungerade Funktionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_3, \vartheta_5$ und dann 10 gerade Funktionen $\vartheta_{123}, \vartheta_{124}, \ldots, \vartheta_{345}$ und schließlich noch eine ungerade Funktion $\vartheta_{12345}$. Die 15 von Null verschiedenen P. Ch. werden dargestellt durch die Ziffern von 1 bis 5 zu je zweien und vieren. Die Bezeichnung wird etwas übersichtlicher, wenn man setzt $12345 = 6$. Dann werden die ungeraden Th. Ch. durch die Zahlen 1, 2, ..., 6 dargestellt, die geraden Th. Ch. durch die Kombinationen dieser Zahlen zu je dreien. Man bekommt so jede gerade Th. Ch. zweimal, und zwar enthalten zwei Kombinationen, die dieselbe Th. Ch. bezeichnen, zusammen alle Zahlen von 1 bis 6. Die von 0 verschiedenen P. Ch. werden durch die Kombinationen der Zahlen 1 bis 6 zu je zweien bezeichnet.

Th. Ch. kommen für Thetafunktionen mehrerer Veränderlichen zuerst vor bei Weierstraß, *Zur Theorie der Abelschen Funktionen, Werke* **1**, S. 133, 1894. Systematisch behandelt sind die Th. Ch. zuerst von Prym, der auch die P. Ch. zuerst einführt. F. Prym, *Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblattrigen Flache, Zuricher N Denkschr* **22**, 1867; *Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie,* Leipzig 1882. Vgl. zu der hier gegebenen Darstellung besonders G Frobenius, *Über das Additionstheorem der Thetafunktionen mehrerer Variabeln, J. f. Math.* **89**, S. 185, 1880; *Über Gruppen von Thetacharakteristiken, J. f. Math.* **96**, S. 81, 1884 und F. Schottky, *Zur Theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln, J. f. Math.* **102**, S 304, 1888. Eine genaue historische Darstellung findet man bei Brill-Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in alterer und neuerer Zeit, Jahresber d. D. Math.-Vereinigung* **3**, S 471, 1894. Dort findet man auch die Literatur zusammengestellt

Wie schon erwähnt, sind auch Thetafunktionen höherer Ordnung dann und nur dann gerade oder ungerade Funktionen, wenn die Charakteristik zweiteilig ist. Über die Zahl der linear unabhängigen Theta $n$-ter Ordnung mit zweiteiliger Charakteristik gilt folgender Satz, in dem $g$ die Zahl der linear unabhängigen geraden und $u$ die der ungeraden Funktionen bedeutet:

*Ist $n$ gerade, so ist für Funktionen mit der Charakteristik* 0

$$g = \frac{1}{2}(n^p + 2^p), \quad u = \frac{1}{2}(n^p - 2^p),$$

*für Funktionen mit von* 0 *verschiedener Charakteristik*

$$g = \frac{1}{2}n^p, \qquad u = \frac{1}{2}n^p.$$

*Ist $n$ ungerade, so ist für Funktionen mit gerader Charakteristik*

$$g = \frac{1}{2}(n^p + 1), \quad u = \frac{1}{2}(n^p - 1),$$

*für Funktionen mit ungerader Charakteristik*

$$g = \frac{1}{2}(n^p - 1), \quad u = \frac{1}{2}(n^p + 1).$$

## § 7. Thetarelationen.

Ist $a$ irgendeine zweiteilige Th. Ch., so läßt sie sich auf mannigfache Weise in $r$ zweiteilige Th. Ch. zerlegen. *Ist eine dieser Zerlegungen $a = a_1 a_2 \ldots a_r$, so ist das Produkt*

$$\vartheta_{a_1}(u)\, \vartheta_{a_2}(u) \ldots \vartheta_{a_r}(u)$$

*aus Thetafunktionen erster Ordnung eine Thetafunktion $r$-ter Ordnung mit der Charakteristik $a$.* Jeder Zerlegung von $a$ in $r$ Th. Ch. entspricht so eine Thetafunktion $r$-ter Ordnung mit der Charakteristik $a$. Zwischen diesen bestehen nach dem Schluß von § 6 lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Alle Gleichungen zwischen den Theta erster Ordnung mit zweiteiliger Charakteristik sind von dieser Form. Hat man eine solche Gleichung, so kann man daraus durch folgende zwei Prozesse neue Gleichungen herleiten. Einmal dadurch, daß man die Argumente um eine *halbe Periode* vermehrt; dann dadurch, daß man eine *lineare Transformation* anwendet, und in der entstehenden Glei-

chung, die ja identisch gilt, die neuen Argumente und Moduln durch die alten ersetzt. Die Gleichungen zwischen den Theta lassen sich formal einfacher darstellen, wenn man nach F. Klein (*Über hyperelliptische Sigmafunktionen*, 1. Abh., *Math. Ann.* **27**, S. 431, 1886; 2. Abh., *Math. Ann.* **32**, S. 351, 1888; *Zur Theorie der Abelschen Funktionen*, *Math. Ann.* **36**, S. 79, 1890) statt der Thetafunktionen die sich von ihnen durch konstante Faktoren unterscheidenden Sigmafunktionen einführt.

Z. B. besteht zwischen je $2^p + 1$ Thetaquadraten eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten. Es lassen sich also die Thetaquadrate linear durch $2^p$ linear unabhängige ausdrücken. Solche $2^p$ unabhängige Funktionen sind z. B. die Quadrate von $2^p$ Theta, deren Charakteristiken eine Göpelsche Gruppe bilden. Für $p = 2$ sind also von den $2^{2p} = 16$ Thetaquadraten $2^p = 4$ linear unabhängig. Deutet man 4 linear unabhängige der 16 Thetaquadrate als *homogene Raumkoordinaten* und läßt die beiden Argumente der Theta variieren, so erhält man im Raume eine Fläche. Es ist die sogenannte *Kummersche Fläche*. Sie ist *von vierter Ordnung* und hat *16 Doppelpunkte*, die man erhält, wenn man die Argumente gleich einer der Halbperioden (einschließlich der Periode 0) setzt. Setzt man irgendeins der 16 Thetaquadrate gleich Null, so wird dadurch, weil es eine lineare homogene Funktion der Koordinaten ist, eine Ebene definiert. Zwischen den so definierten 16 Ebenen und den 16 Doppelpunkten besteht folgende Beziehung: *In jeder der Ebenen liegen 6 Doppelpunkte und durch jeden Doppelpunkt gehen 6 Ebenen.*

*Das Additionstheorem der Thetafunktionen* wird durch die *Riemannsche Thetaformel* gegeben, allerdings in spezieller Form: Bestehen zwischen den $4p$ Argumenten $u$ und $v$ die Gleichungen

$$2v^{(1)} = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)},$$

$$2v^{(2)} = u^{(1)} + u^{(2)} - u^{(3)} - u^{(4)},$$

$$2v^{(3)} = u^{(1)} - u^{(2)} + u^{(3)} - u^{(4)},$$

$$2v^{(4)} = u^{(1)} - u^{(2)} - u^{(3)} - u^{(4)},$$

bedeuten $a, b$ irgend zwei fest gewählte Th. Ch. und durchläuft $\alpha$ alle $2^{2p}$ Th. Ch., so ist jede der $2^{2p}$ Funktionen

$$\vartheta_{ab\alpha}(u^{(1)})\,\vartheta_{a\alpha}(u^{(2)})\,\vartheta_{b\alpha}(u^{(3)})\,\vartheta_{\alpha}(u^{(4)})$$

linear und homogen mit konstanten Koeffizienten durch die Funktionen

$$\vartheta_{a b \alpha}(v^{(1)})\, \vartheta_{a \alpha}(v^{(2)})\, \vartheta_{b \alpha}(v^{(3)})\, \vartheta_{\alpha}(v^{(4)})$$

ausdrückbar und umgekehrt. Jede solche Formel heißt Riemannsche Thetaformel.

Über die Herleitung dieser Formel sehe man Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen*, Kap. II und III, wo ganz allgemeine Methoden zur Herleitung von Gleichungen zwischen Thetafunktionen gegeben sind; außerdem Kap. VII, wo auch genaue Literaturangaben.

Das durch die Riemannsche Formel gegebene Additionstheorem der Theta läßt sich auf die Abelschen Funktionen mit denselben Perioden übertragen, da diese ja durch die Theta rational ausdrückbar sind. Durch Spezialisieren der Argumente lassen sich mannigfache Gleichungen aus der Riemannschen Thetaformel herleiten.

Wie man die Thetafunktionen mit zweiteiliger Charakteristik besonders betrachtet, so hat man auch Theta untersucht, deren Charakteristiken $r$-tel ganzer Zahlen sind. (Krazer, *Lehrbuch d. Thetaf.*, Kap. VIII.)

## § 8. Auflösen der Thetarelationen.

Wie schon in § 4 angegeben, rechnet man alle Abelschen Funktionen von $p$ Veränderlichen mit denselben Perioden in eine Klasse. Sie bilden einen algebraischen Körper von $p$ unabhängigen Veränderlichen, und zwar einen sehr speziellen. Es ist eine *Hauptaufgabe der Theorie der Abelschen Funktionen, diesen Korper algebraisch zu definieren.* Diese Aufgabe ist bisher nicht allgemein gelöst. Da man alle Abelschen Funktionen rational durch Thetafunktionen ausdrücken kann, so kommt die Aufgabe darauf hinaus, die Thetarelationen aufzulösen

1. *Die Riemannschen Theta.* Es sei $K$ ein algebraischer Körper vom Geschlechte $p$. In ihm seien $v_1, v_2, \ldots, v_p$ $p$ linear unabhängige Integrale erster Gattung, die so gewählt seien, daß ihr Periodensystem die kanonische Form $(1, \tau)$ hat Die $\tau$ sind dann so beschaffen, daß es Thetafunktionen mit dem Periodensystem $(1, \tau)$ gibt Diese Theta heißen *Riemannsche Thetafunktionen* Da der allgemeinste Körper des Geschlechtes $p$ von

$3p-3$ Moduln abhängt, so hängen auch die Riemannschen Theta von $3p-3$ Parametern ab. Sie sind also spezielle Theta, da die allgemeinsten Theta von den $\frac{1}{2}p(p+1)$, nur durch Ungleichheiten beschränkten, Moduln $\tau$ abhängen. Für $p=2$ und $p=3$ ist

$$3p-3=\frac{1}{2}p(p+1),$$

aber für $p>3$ ist

$$\frac{1}{2}p(p+1)>3p-3.$$

Es müssen daher zwischen den Moduln der Riemannschen Theta für $p>3$ Gleichungen bestehen. Die Bestimmung dieser Gleichungen ist im Falle $p=4$ F. Schottky gelungen. (*J. f. Math.* **102**, S 304, 1888.) In diesem Falle ist

$$\frac{1}{2}p(p+1)-(3p-3)=1,$$

so daß *eine* Gleichung die Riemannschen Theta von vier Veränderlichen charakterisiert. Bedeutet $\varkappa$ irgendeine P. Ch. einer syzygetischen Gruppe vom Grade 8 und der Ordnung 3, so gibt es immer drei Theta $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ von der Art, daß die 24 Funktionen $\vartheta_{1\varkappa}, \vartheta_{2\varkappa}, \vartheta_{3\varkappa}$ alle gerade sind. Bezeichnet man die Werte, die die drei Produkte $\prod\limits_{(k)}\vartheta_{i\varkappa}$, $(i=1, 2, 3)$ für die Nullwerte der Argumente annehmen, mit $r_1, r_2, r_3$, so hat die Gleichung, die die Riemannschen Theta von vier Veränderlichen charakterisiert, die Form

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}=0.$$

Solcher Gleichungen gibt es sehr viele, aber eine von ihnen zieht alle anderen nach sich. Für $p>4$ sind Gleichungen zwischen den Nullwerten der Riemannschen Theta hergeleitet von F. Schottky und H W. E. Jung. (F. Schottky und H Jung, *Neue Sätze über Symmetralfunktionen und die Abelschen Funktionen der Riemannschen Theorie, Berliner Sitzungsber,* 1. Mitteilung, S. 282, 1909; 2. Mitteilung, S 732, 1909; 3 Mitteilung, S 1002, 1912.)

Ist der Körper $K$ im besonderen *hyperelliptisch*, so heißen die zugehörigen Theta hyperelliptisch; sie sind für $p>2$ noch

spezieller als die Riemannschen, da sie nur von $2p-1$ Parametern abhängen. Diese Thetafunktionen werden dadurch charakterisiert, daß gewisse unter ihnen bei der Entwicklung nach Potenzen ihrer Argumente mit Gliedern höherer Dimension beginnen.

Es sei $\mathfrak{a}$ eine feste Stelle des Körpers $K$ und es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_p$ $p$ veränderliche Stellen. Setzt man dann für die Argumente $u$ der Abelschen Funktionen, deren Periodensystem mit dem der Integrale erster Gattung $v$ des Körpers $K$ identisch ist,

$$u_i = \int\limits_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{p}_1} dv_i + \int\limits_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{p}_2} dv_i + \cdots + \int\limits_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{p}_p} dv_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

so bleiben die Argumente willkürlich veränderlich und die Abelschen Funktionen werden zu symmetrischen rationalen Funktionen der $p$ Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_p$. Genaueres siehe im nächsten Paragraphen.

2. *Die allgemeinsten Theta* kann man aus den Riemannschen erhalten. Es sei nämlich $K$ ein algebraischer Körper vom Geschlechte $q > p$. Dieser habe die Eigenschaft, daß $p$ von den $q$ Integralen erster Gattung nur $2p$ primitive Perioden haben. Die übrigen $q-p$ Integrale lassen sich dann so wählen, daß sie nur $2(q-p)$ primitive Perioden haben. (H. Poincaré, *Sur les fonctions Abéliennes*, *Am. Journ.* 8, S. 289, 1886.) Die zu $K$ gehörenden Riemannschen Theta zerfallen dann nach einer passenden Transformation in das Produkt eines Theta von $p$ Veränderlichen und eines von $q-p$ Veränderlichen. Die so erhaltenen Theta von $p$ Veränderlichen sind bei passender Wahl von $K$ allgemein. (W. Wirtinger, *Untersuchungen uber Thetafunktionen*, Leipzig 1895.)

Eine einfache Methode, die aber für beliebiges $p$ nicht die allgemeinsten Theta liefert, einen Körper $K$ vom Geschlechte $q > p$ der angegebenen Art zu bekommen, ist folgende. Man adjungiere zu einem Körper $k$ vom Geschlechte $q-p$ eine algebraische Funktion, so daß der entstehende Körper $K$ vom Geschlechte $q$ wird. Unter den $q$ Integralen erster Gattung von $K$ sind dann die $q-p$ Integrale erster Gattung von $k$ enthalten und, da diese nur $2(q-p)$ primitive Perioden haben, so gibt es $p$ andere, die nur $2p$ primitive Perioden haben. Diese sind dadurch charakterisiert, daß die Relativspur ihrer Integranden in bezug auf den Körper $k$ gleich Null ist (F. Schottky, *Ber-*

*liner Sitzungsber.*, S. 522, 1904; H. W. E. Jung, *Berliner Sitzungsber.*, S. 1381, 1904).

Eingehend behandelt ist nur der Fall, daß der Körper $K$ aus $k$ durch Adjunktion der Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion des Körpers $k$ entsteht. (F. Schottky, *J. f. Math.* **106**, S. 199, 1890; W. Wirtinger, *Thetafunkt.*, 1895. Es werde die Funktion, deren Quadratwurzel zu $k$ adjungiert wird, an $2n$ Stellen von ungerader Ordnung Null und im übrigen nur von gerader Ordnung Null und unendlich. Ist $k$ der allgemeine Körper vom Geschlechte $\tau$, ist ferner $\tau + \sigma$ das Geschlecht von $K$, so ist $\sigma = \tau + n - 1$ und die Zahl der Parameter ist $3\tau - 3 + n$. Die Zahl der Parameter ist gleich der Zahl $\frac{1}{2}\sigma(\sigma + 1)$ der Parameter, von denen die allgemeinen Theta von $\sigma$ Veränderlichen abhängen (abgesehen von den Fällen $\sigma = 1$, $\sigma = 2$), nur in folgenden drei Fällen

$$\sigma = 3, \quad n = 3, \quad \tau = 1,$$
$$\sigma = 4, \quad n = 2, \quad \tau = 3,$$
$$\sigma = 5, \quad n = 0, \quad \tau = 6.$$

Diese Fälle sind behandelt von Schottky, Jung und Wirtinger. (Siehe den Enz.-Artikel von Krazer und Wirtinger, S. 845.)

## § 9 Die Riemannschen Theta. Das Umkehrproblem.

Es sei $K$ ein algebraischer Körper vom Geschlechte $p$ und es seien $v_1, v_2, \ldots, v_p$ unabhängige Integrale erster Gattung, und zwar seien sie so gewählt, daß ihr Periodensystem die kanonische Form $(1, \tau)$ hat. Die zu diesem Periodensystem gehörenden Theta erster Ordnung mit zweiteiliger Charakteristik mögen mit $\vartheta(u)$ bezeichnet werden. Es seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ zwei Stellen von $K$. Setzt man

$$u_i = \int_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}'} dv_i - e_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

wo die $e$ gegebene Konstanten bedeuten, so wird jedes $\vartheta(u)$ eine Funktion der Stelle $\mathfrak{p}$ mit folgenden Eigenschaften. Sie

verhält sich überall wie eine rationale Funktion. Durchläuft $\mathfrak{p}$ eine geschlossene Kurve, so ändert sich $\vartheta(u)$ höchstens um einen Exponentialfaktor. $\vartheta(u)$ hat als Funktion von $\mathfrak{p}$, wenn es nicht identisch verschwindet, genau $p$ Nullstellen. Wäre $\vartheta(u)$ von der $n$-ten Ordnung, so würde die Zahl der Nullstellen $np$ sein. Die $p$ Nullstellen von $\vartheta(u)$ seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_p$. Es bestehen dann die Kongruenzen

$$e_i \equiv \sum_{k=1}^{p} \int_{\mathfrak{p}'}^{\mathfrak{p}_k} dv_i + k_i,$$

wo die Größen $k$ die von den Parametern $e_\alpha$ und von den Stellen $\mathfrak{p}_\alpha$ unabhängigen *Riemannschen Konstanten* sind.

Es kann sehr wohl eintreten, daß die Parameter $e$ solche Werte haben, daß die Funktion $\vartheta(u)$ *identisch verschwindet.* Von den Sätzen über das identische Verschwinden der Thetafunktionen, die von Riemann herrühren, sei nur folgender angeführt (vgl. Christoffel, *Vollständige Theorie der Riemannschen Thetafunktionen, Math. Ann.* **54**, S. 347, 1901).

Die Funktion

$$\vartheta\left(\int_{\mathfrak{p}'}^{\mathfrak{p}} dv - \sum_{k=1}^{p} \int_{\mathfrak{p}'}^{\mathfrak{p}_k} dv - k\right)$$

verschwindet, aufgefaßt als Funktion der Stelle $\mathfrak{p}$:

1. wenn die durch den Divisor $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_p$ definierte Klasse $(\mathfrak{p}_\alpha)$ die Dimension 1 hat, an den Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_p$;
2. wenn die Klasse $(\mathfrak{p}_\alpha)$ von der Dimension $s + 1$ ist, identisch, und zwar zugleich mit allen Ableitungen 1., 2., .., $(s-1)$-ter, aber nicht $s$-ter Ordnung.

Wir betrachten die zu $K$ gehörenden Riemannschen Theta erster Ordnung mit zweiteiliger Charakteristik. Wir setzen zunächst

$$u_i = \int_{\mathfrak{p}'}^{\mathfrak{p}} dv_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Es wird dann jeder Quotient $\vartheta_a^2(u)/\vartheta_b^2(u)$ eine Funktion des Körpers $K$, und zwar sowohl als Funktion der Stelle $\mathfrak{p}$ wie auch der Stelle $\mathfrak{p}'$. Diese Funktion wird, wenn der Körper $K$

nicht von besonderer Beschaffenheit ist, nicht identisch Null oder unendlich. Sie wird daher an $p$ Stellen von der zweiten Ordnung Null und an $p$ Stellen von der zweiten Ordnung unendlich. Sind $x, y$ zwei Größen aus $K$, durch die sich alle anderen rational ausdrücken, so kann man jeden solchen Quotienten in die Form:

$$\frac{\vartheta_a^2(u)}{\vartheta_b^2(u)} = c_{ab}\frac{\psi_a}{\psi_b}$$

bringen, wo die $c$ Konstante sind und die $\psi$ ganze rationale Funktionen von $x, y$; es werden dann die $\psi$ adjungierte Funktionen, die außer an den ihnen allen gemeinsamen (dem Doppelpunktdivisor entsprechenden) Stellen noch an $p$ Stellen von der zweiten Ordnung Null werden. Die Funktionen $\sqrt{\psi}$ sind also Wurzelfunktionen. (Vgl. Kap. XVII, § 8.) Durch diese Bedingung sind die $2^{2p}$ Funktionen $\psi$ *in ihrer Gesamtheit eindeutig* bis auf konstante Faktoren bestimmt. Die Funktionen $\psi$ sind symmetrische Funktionen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$. Ist $\vartheta_a$ eine ungerade Funktion, so zerfällt die entsprechende Funktion $\psi_a$. Es wird nämlich:

$$\psi_a = l_a \varphi_a(\mathfrak{p})\varphi_a(\mathfrak{p}')\,.$$

Dabei bedeutet $l_a$ eine Funktion, die für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ verschwindet, $\varphi_a(\mathfrak{p})$ eine $\varphi$-Funktion, die nur von $(\mathfrak{p})$ abhängt, und $\varphi_a(\mathfrak{p}')$ dieselbe Funktion von $\mathfrak{p}'$.

*Das Umkehrproblem.* Setzt man in die Funktionen $\vartheta$ statt der Argumente $u$

$$(1) \qquad u_i = \int_{\mathfrak{p}_1'}^{\mathfrak{p}_1} dv_i + \int_{\mathfrak{p}_2'}^{\mathfrak{p}_2} dv_i + \cdots + \int_{\mathfrak{p}_p'}^{\mathfrak{p}_p} dv_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

so werden die Quotienten $\vartheta_a^2(u)/\vartheta_b^2(u)$ rationale symmetrische Funktionen der Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_p$. Diese lassen sich algebraisch bestimmen. Ist das geschehen, so ist damit die *Auflösung der Thetarelationen für die Riemannschen Theta* geleistet. (Vgl. § 8.) Das *Jacobische Umkehrproblem* besteht nun darin, aus den Gleichungen (1) bei gegebenen Werten der $u$ und gegebenen Stellen $\mathfrak{p}_\alpha'$ die Stellen $\mathfrak{p}_\alpha$ zu bestimmen. Dazu stelle man $p$ Quotienten $\vartheta_a^2(u)/\vartheta_b^2(u)$ als Funktionen der $\mathfrak{p}_\alpha$ und $\mathfrak{p}_\alpha'$ dar. In den $p$ so erhaltenen Gleichungen

$$\frac{\vartheta_a^2(u)}{\vartheta_b^2(u)} = R_{ab}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$$

ist dann alles außer den $p$ Stellen $\mathfrak{p}_\alpha$ bekannt und es lassen sich daher die gesuchten Stellen algebraisch berechnen.

## Lehrbücher und Monographien.

Über Lehrbücher und Monographien sehe man die Literaturangabe am Ende von Kapitel XVII, S. 888. Außerdem seien angegeben:

A. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen,* Leipzig 1903.

A. Krazer und W. Wirtinger, *Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen. Enz. d. math. Wissenschaften* II B 7. Leipzig 1921.

Dort sind auch ausführliche Literaturangaben.

# Kapitel XIX.

## Automorphe Funktionen unter Einschluß der elliptischen Modulfunktionen.

Von *Robert Fricke* in Braunschweig.

### § 1. Begriff der automorphen Funktionen.

Wir verstehen unter $\zeta = \xi + i\eta$ eine komplexe Variabele. Auf diese üben wir eine Reihe *linearer Transformationen* oder *Substitutionen*

$$(1)\qquad \zeta' = \frac{\alpha_1\zeta + \beta_1}{\gamma_1\zeta + \delta_1},\quad \zeta'' = \frac{\alpha_2\zeta + \beta_2}{\gamma_2\zeta + \delta_2},\quad \zeta''' = \frac{\alpha_3\zeta + \beta_3}{\gamma_3\zeta + \delta_3},\ \cdots$$

aus, deren *Determinanten* $(\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i)$ von 0 verschieden seien. Abgekürzt wollen wir diese Substitutionen durch die Symbole

$$(2)\qquad \zeta' = V_1(\zeta),\quad \zeta'' = V_2(\zeta),\quad \zeta''' = V_3(\zeta),\ \cdots$$

bezeichnen.

Wir bezeichnen weiter mit $z = \varphi(\zeta)$ *eine analytische Funktion von* $\zeta$, *welche ihren Wert behält, wenn man für das Argument* $\zeta$ *irgend eines jener* $\zeta^{(i)} = V_i(\zeta)$ *substituiert*

$$(3)\qquad \varphi(\zeta^{(i)}) = \varphi(V_i(\zeta)) = \varphi\left(\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right) = \varphi(\zeta);$$

eine solche Funktion $\varphi(\zeta)$ nennen wir mit Klein (*Gött. Nachr.* 1890, Nr. 4, *Ges. math. Abh*, 2, S. 549) eine „*automorphe Funktion*“. Wir betrachten weiterhin nur *eindeutige* automorphe Funktionen, zu denen insbesondere auch die *elliptischen Modulfunktionen* gehören.

Sind $V_i$ und $V_k$ irgend zwei von den Substitutionen (2), zu denen $\varphi(\zeta)$ gehört, so folgt aus (3) unmittelbar

$$(4)\qquad \varphi\{V_i(V_k(\zeta))\} = \varphi(V_k(\zeta)) = \varphi(\zeta).$$

Nun berechnen wir aber für die aus den Substitutionen $V_i$ und $V_k$ zusammengesetzte Substitution $V_i(V_k(\zeta))$, die wir abgekürzt durch das Symbol $V_i \cdot V_k$ oder $V_i V_k$ bezeichnen wollen:

$$(5) \qquad V_i V_k(\zeta) = \frac{(\alpha_i \alpha_k + \beta_i \gamma_k)\zeta + (\alpha_i \beta_k + \beta_i \delta_k)}{(\gamma_i \alpha_k + \delta_i \gamma_k)\zeta + (\gamma_i \beta_k + \delta_i \delta_k)};$$

$V_i V_k$ ist somit wieder eine lineare Substitution und die Determinante der letzteren

$$(\alpha_i \alpha_k + \beta_i \gamma_k)(\gamma_i \beta_k + \delta_i \delta_k) - (\alpha_i \beta_k + \beta_i \delta_k)(\gamma_i \alpha_k + \delta_i \gamma_k)$$
$$= (\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i)(\alpha_k \delta_k - \beta_k \gamma_k)$$

ist als Produkt der Determinanten von $V_i$ und $V_k$ wieder von 0 verschieden. Geben wir die einzelne Substitution $V_i$ durch Nennung ihrer Koeffizienten etwa in der Gestalt

$$V_i = \begin{pmatrix} \alpha_i, & \beta_i \\ \gamma_i, & \delta_i \end{pmatrix},$$

so stellt sich das in (5) zum Ausdruck kommende Gesetz über die Zusammensetzung zweier Substitutionen $V_i$, $V_k$ zu einer neuen so dar

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} \alpha_i, & \beta_i \\ \gamma_i, & \delta_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_k, & \beta_k \\ \gamma_k, & \delta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i \alpha_k + \beta_i \gamma_k, & \alpha_i \beta_k + \beta_i \delta_k \\ \gamma_i \alpha_k + \delta_i \gamma_k, & \gamma_i \beta_k + \delta_i \delta_k \end{pmatrix}.$$

Gleichung (4) liefert den Satz: *Transformieren die Substitutionen $V_i$ und $V_k$ die Funktion $\varphi(\zeta)$ in sich, so gilt dasselbe von der aus $V_i$ und $V_k$ zusammengesetzten Substitution $V_i V_k$.*

Wir wollen uns nun den *Begriff der Gesamtheit aller Substitutionen V bilden, welche unsere fragliche Funktion $\varphi(\zeta)$ in sich transformieren.* Zu dieser Gesamtheit wird stets die sogenannte *identische Substitution* $V_0 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ gehören, welche wir auch, da stets $V_0 V = V$ ist, symbolisch durch 1 bezeichnen Es wird ferner mit der einzelnen Substitution $V_i$ die *inverse Substitution* $V_i' = \begin{pmatrix} \delta_i, & -\beta_i \\ -\gamma_i, & \alpha_i \end{pmatrix}$, welche durch Auflösung von $\zeta^{(i)} = V_i(\zeta)$ nach $\zeta$ gewonnen wird, jener Gesamtheit angehören; denn aus

$$\varphi(\zeta^{(i)}) = \varphi\left(\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right) = \varphi(\zeta)$$

folgt, indem man rechts $\zeta$ durch $\zeta^{(i)}$ ausdrückt, sofort

$$\varphi(\zeta^{(i)}) = \left(\frac{\delta_i \zeta^{(i)} - \beta_i}{-\gamma_i \zeta^{(i)} + \alpha_i}\right).$$

Diese zu $V_i$ inverse Substitution $V_i'$ befriedigt die Gleichung: $V_i' \cdot V_i = V_0 = 1$ und wird demnach symbolisch auch durch $V_i^{-1}$ bezeichnet. Vor allem folgern wir aus dem der Gleichung (4) entnommenen Satze, daß, wenn $V_i$ und $V_k$ zwei Substitutionen unserer Gesamtheit sind, auch die durch ihre Kombination entspringende Substitution $V_i V_k$ dieser Gesamtheit angehört. Mit Rücksicht auf die in Kap. III, § 1 (S. 173) aufgezählten charakteristischen Eigenschaften einer Gruppe folgern wir: *Die gesamten linearen Substitutionen $V$, welche unsere automorphe Funktion $\varphi(\zeta)$ in sich transformieren, bilden eine „Gruppe“.* Jene Eigenschaften sind nämlich, abgesehen vom „assoziativen“ Gesetze

$$V_i(V_k V_l) = (V_i V_k) V_l, \tag{7}$$

in den voraufgehenden Zeilen bereits alle dargelegt; das Gesetz (7) aber zeigt man durch direkte Rechnung. Die Theorie der automorphen Funktionen wird man hiernach auf eine *Theorie der Gruppen linearer $\zeta$-Substitutionen* zu gründen haben. Zur abkürzenden Bezeichnung einer solchen Gruppe wollen wir das Symbol $\Gamma$ benutzen.

Über die Geschichte der automorphen Funktionen folgen unten weitere Angaben. Ausführlich ist die Theorie dieser Funktionen in dem Werke dargestellt *„Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“* von R. Fricke und F. Klein **1** (1897), **2**. 1901 bis 1912, Leipzig (Teubner); dieses Werk wird in der Folge mit *„Aut.“* zitiert. Die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, welche wie bemerkt eine besondere Art automorpher Funktionen darstellen, ist ausführlich behandelt in dem Werke „F. Klein, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*“, ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke, **1** (1890), **2** (1892), Leipzig (Teubner); dieses Werk wird weiterhin mit *„Mod.“* zitiert.

## § 2. Die linearen $\zeta$-Substitutionen als Kreisverwandtschaften.

Die komplexe Variabele $\zeta$ schreiben wir unter Trennung ihres reellen und imaginären Bestandteiles $\zeta = \xi + i\eta$ und legen ihrer geometrischen Deutung eine *Ebene* oder, wenn wir die Besonderheit des Punktes $\zeta = \infty$ aufheben wollen, eine *Kugel* zugrunde (vgl. Kap. XV, § 1). Durch die einzelne Substitution

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \tag{1}$$

wird, falls wir $\zeta$ und $\zeta'$ in derselben Ebene deuten, *eine umkehrbar eindeutige und durchweg konforme Abbildung der $\zeta$-Ebene auf sich selbst* dargestellt.

Der besondere Charakter dieser Abbildung besteht nun darin, *daß sich bei derselben die Kreise der $\zeta$-Ebene stets wieder in Kreise transformieren;* dabei sind die Geraden als Kreise mit unendlich großem Radius immer mitgemeint.

Um dies zu zeigen, nehmen wir erstlich an, daß $\gamma = 0$ sei, wo alsdann (wegen Nichtverschwindens der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$) notwendig $\alpha$ und $\delta$ von 0 verschieden sind. Setzen wir $\frac{\alpha}{\delta} = \alpha'$ und $\frac{\beta}{\delta} = \beta'$, so handelt es sich um die Substitution

$$\zeta' = \alpha'\zeta + \beta'. \tag{2}$$

Wir schreiben, unter $|\alpha'|$ den absoluten Betrag und unter $\vartheta$ die Amplitude von $\alpha'$ verstanden, $\alpha' = |\alpha'| e^{\vartheta i}$ und können die Substitution (2) in der Gestalt $V_1 V_2 V_3$ aus folgenden drei Substitutionen zusammensetzen

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1, & \beta' \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} e^{\vartheta i}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} |\alpha'|, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

$V_1$ bedeutet eine Translation oder Parallelverschiebung der $\zeta$-Ebene, wobei der Nullpunkt an die Stelle $\zeta = \beta'$ rückt; $V_2$ bedeutet eine Drehung der $\zeta$-Ebene um den Nullpunkt durch den Winkel $\vartheta$; endlich bedeutet $V_3$ eine Ähnlichkeitstransformation mit festbleibenden Punkten $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$. In der Tat stellen sich diese Transformationen, wenn wir noch unter Trennung des Reellen vom Imaginären $\beta' = b_1 + ib_2$ schreiben, in den rechtwinkligen Koordinaten $\xi$, $\eta$ wie folgt dar

$$(V_1) \qquad \xi' = \xi + b_1, \quad \eta' = \eta + b_2,$$

$$(V_2) \qquad \xi' = \xi \cos\vartheta - \eta \sin\vartheta, \quad \eta' = \xi \sin\vartheta + \eta \cos\vartheta,$$

$$(V_3) \qquad \xi' = |\alpha'|\, \xi, \quad \eta' = |\alpha'|\, \eta.$$

Da jede dieser Transformationen die Kreise der $\zeta$-Ebene wieder in die Kreise überführt, so gilt dies auch von der aus ihnen zusammengesetzten Substitution (2).

Verschwindet $\gamma$ nicht, so können wir die Substitution (1) in die Gestalt setzen:

$$\zeta' = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2\zeta + \gamma\delta} + \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Schreiben wir zur Abkürzung:

$$\frac{\gamma^2}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \alpha', \quad \frac{\gamma\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \beta', \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \beta'',$$

so sind die Größen $\alpha'$, $\beta'$, $\beta''$ jedenfalls endlich, und $\alpha'$ ist von 0 verschieden. Unsere Substitution schreibt sich:

$$\zeta' = \frac{-1}{\alpha'\zeta + \beta'} + \beta''$$

und ist somit in der Gestalt $V_1' V_2' V_3'$ aus den drei folgenden Substitutionen herstellbar:

$$V_1' = \begin{pmatrix} 1, & \beta'' \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2' = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3' = \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

$V_1'$ und $V_3'$ sind Substitutionen der Gestalt (2). $V_2'$ liefert für die Koordinaten $\xi$, $\eta$:

$$\xi = \frac{-\xi'}{\xi'^2 + \eta'^2}, \quad \eta = \frac{\eta'}{\xi'^2 + \eta'^2},$$

so daß durch $V_2'$ der Kreis:

$$a(\xi^2 + \eta^2) + 2b\xi + 2c\eta + d = 0$$

in:

$$d(\xi'^2 + \eta'^2) - 2b\xi' + 2c\eta' + a = 0,$$

d. h. in der Tat wieder in einen Kreis transformiert wird. Die fragliche Eigenschaft der Substitutionen (1) ist also allgemein bewiesen.

Nach Moebius, *Leipz. Abh.* 2 oder *Werke* 2 bezeichnet man die winkeltreuen Abbildungen einer Ebene auf sich selbst, bei denen Kreise immer wieder in Kreise übergehen, als „*Kreisverwandtschaften*“, und zwar unterscheidet man zwei Arten derselben, je nachdem bei der Abbildung des einzelnen Winkels die Schenkel desselben ihre gegenseitige Lage behalten oder umgelegt erscheinen. Unsere $\zeta$-Substitutionen (1) gehoren zu den Kreisverwandtschaften der ersten Art [1]) Eine einzelne Kreisver-

---

1) Zugleich erschöpfen sie dieselben. Vergleiche die ausführliche auf projektiv-geometrische Entwicklungen gegründete Theorie der $\zeta$-Substitutionen in „*Aut*“ 1, 3 ff. und *Repert.* 2, Kap. II, § 5.

wandtschaft der zweiten Art ist z. B. durch den Übergang von $\zeta = \xi + i\eta$ zum konjugiert komplexen Werte $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$ gegeben; denn diese Transformation stellt die symmetrische Umformung oder Spiegelung der $\zeta$-Ebene an der reellen Achse dar. Weitere solche Kreisverwandtschaften zweiter Art[1]) gewinnen wir, wenn wir die eben genannte Transformation von $\zeta$ in $\zeta' = \bar{\zeta}$ mit allen Substitutionen (1) kombinieren:

$$\zeta' = \frac{\alpha\bar{\zeta} + \beta}{\gamma\bar{\zeta} + \delta}. \tag{3}$$

Wir wollen diese Substitutionen symbolisch durch $\zeta' = \overline{V}(\zeta)$ bezeichnen und als *„$\zeta$-Substitutionen zweiter Art"* den bisherigen anreihen, welche letztere dann genauer als *„$\zeta$-Substitutionen erster Art"* zu bezeichnen sind.

Wie man leicht feststellt, gilt folgender Satz: *Die Kombinierung zweier Substitutionen verschiedener Arten liefert eine Substitution zweiter Art, diejenige zweier Substitutionen derselben Art aber ergibt stets eine Substitution erster Art.*

## § 3. Einteilung der $\zeta$-Substitutionen erster Art und geometrische Deutung derselben.

Die vier Koeffizienten einer Substitution $V$ können ohne wesentliche Änderung der letzteren mit einem gemeinsamen Faktor versehen werden. Dieser kann so bestimmt werden, daß die Determinante der Substitution in der neuen weiterhin zu benutzenden Schreibweise gleich 1 wird:

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{1}$$

Die Substitution heißt dann *„unimodular"*. Die Schreibweise ist noch zweideutig; denn man kann, ohne die Forderung, die Determinante sei gleich 1, zu stören, die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ noch einem gleichzeitigen Zeichenwechsel unterziehen.

Schließen wir bei der nächsten Betrachtung die identische Substitution 1 aus, so gilt der Satz: *Jede Substitution $V$ hat zwei sich selbst entsprechende Punkte, die als „Fixpunkte" bezeichnet werden sollen.* Setzt man nämlich $\zeta' = \zeta$ in (1) ein, so ergibt sich zur Bestimmung von $\zeta$ die nicht-identische quadratische Gleichung:

$$\gamma\zeta^2 + (\delta - \alpha)\zeta - \beta = 0. \tag{2}$$

---

1) Und zwar wieder deren Gesamtheit.

Die Diskriminante dieser Gleichung $(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma$ rechnet sich mit Hilfe der zweiten Gleichung (1) auf $(\alpha + \delta)^2 - 4$ um: *Die beiden Fixpunkte fallen stets und nur dann zusammen, wenn:*

$$\alpha + \delta = \pm 2$$

*ist.*

Um die durch (1) vermittelte Abbildung der $\zeta$-Ebene auf sich selbst genauer zu versinnlichen, *nehmen wir erstlich $\gamma = 0$ an.* Dann sind $\alpha$ und $\delta$ von 0 verschieden, und man hat:

$$\delta = \alpha^{-1}.$$

Die Substitution hat die Gestalt:

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\delta} \quad \text{oder einfacher} \quad \zeta' = \alpha^2\zeta + \alpha\beta,$$

ihre Fixpunkte liegen bei:

$$(3) \qquad \zeta_1 = \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha^2} \quad \text{und} \quad \zeta_2 = \infty.$$

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

I. Es sei $\alpha^2 = 1$, so daß wir (nötigenfalls nach Zeichenwechsel der Koeffizienten) $\alpha = 1$ setzen dürfen. Die Substitution hat die Gestalt:

$$(4) \qquad \zeta' = \zeta + \beta$$

und heißt *„parabolisch"*, sie stellt eine Translation der $\zeta$-Ebene dar, bei welcher insbesondere der Punkt $\zeta = 0$ in den Punkt $\zeta' = \beta$ übergeht. *Wir denken uns diese Transformation der Anschaulichkeit halber durch eine wirkliche Verschiebung der $\zeta$-Ebene in sich hergestellt.* Ziehen wir zur Geraden von 0 nach $\beta$ die gesamte Schar der parallelen Geraden, so wird sich die einzelne dieser Geraden in sich verschieben: Wir wollen diese Geraden als die *„Bahnlinien"* oder *„Bahnkurven"* der Substitution bezeichnen; die zu ihnen senkrechten Geraden, welche ineinander übergeführt werden, mögen die *„Niveaulinien"* oder *„Niveaukurven"* der Substitution heißen.

II. Ist $\alpha^2$ nicht gleich 1, so wollen wir:

$$\alpha^2 = m = |m| \cdot e^{\vartheta i}$$

setzen und $m$ als *„Multiplikator"* der Substitution bezeichnen.

Mit Hilfe des im Endlichen gelegenen Fixpunktes $\zeta_1$ rechnet sich die Substitution $\zeta' = \alpha^2 \zeta + \alpha\beta$ um auf die Gestalt:

$$(5) \qquad \zeta' - \zeta_1 = m(\zeta - \zeta_1),$$

womit die Bezeichnung von $m$ als „Multiplikator" sich rechtfertigt. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. Die Amplitude $\vartheta$ verschwinde, so daß $m = |m|$ reell und positiv ist; die Substitution heißt „*hyperbolisch*" und stellt eine Ähnlichkeitstransformation der $\zeta$-Ebene mit dem Zentrum $\zeta_1$ dar. Wir denken uns auch diese Transformation durch eine stetige Deformation der $\zeta$-Ebene in sich vollzogen, wobei wir zu dem in Fig. 1 dargestellten Bilde kommen; die vom Zentrum $\zeta_1$ ausstrahlenden Geraden liefern die „*Bahnkurven*" (in der Figur mit Pfeilen versehen, welche mittels ihrer Richtung den Fall $|m| > 1$ versinnlichen); die orthogonale Schar der konzentrischen Kreise um $\zeta_1$ liefert die „*Niveaulinien*"

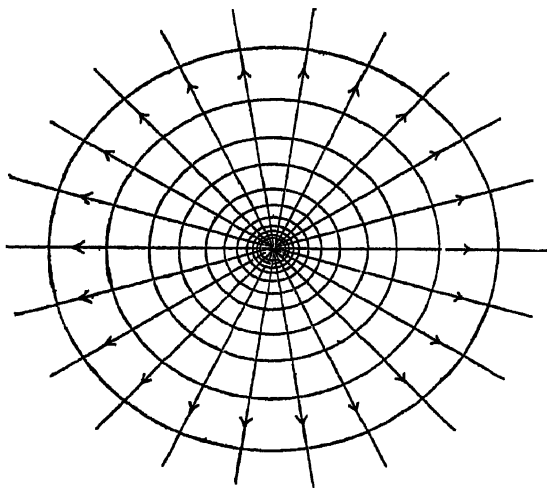
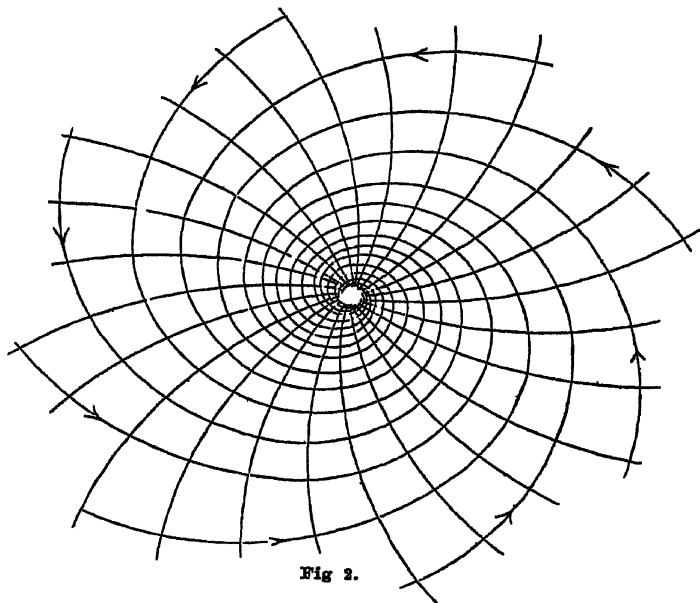



Fig. 1.

2. Der absolute Betrag $|m|$ ist gleich 1, so daß $m = e^{\vartheta i}$ gilt, die Substitution heißt „*elliptisch*" und stellt eine Drehung der $\zeta$-Ebene um den Punkt $\zeta_1$ dar. Jetzt sind die Kreise der Fig. 1 die *Bahnkurven*, die Geraden aber liefern die *Niveaulinien*.

3. Ist endlich weder $\vartheta = 0$ noch $|m| = 1$, so können wir die Substitution aus der zu $|m|$ gehörenden hyperbolischen Substitution und der zu $\vartheta$ gehörenden elliptischen zusammensetzen. Die zugehörige Deformation der Ebene in sich, welche aus den beiden unter 1 und 2 betrachteten Verschiebungen zusammengesetzt erscheint, ist durch Fig. 2 bezeichnet, wobei als Beispiel $|m| < 1$ gewählt wurde. Die mit Pfeilen versehenen *Bahnkurven* sind *logarithmische Spiralen*, desgleichen die ihnen ortho-

gonalen *Niveaulinien*. Auf der $\zeta$-Kugel werden für den Fall, daß man $\zeta_1 = 0$ und also dem zweiten Fixpunkte $\zeta_2 = \infty$ diametral nimmt, die Kurven dieser beiden Scharen sogen. „*Loxodromen*"; unsere Substitution trägt dieserhalb den Namen einer „*loxodromischen*".

Fig 2.

Den vorstehenden Betrachtungen kommt allgemeine Bedeutung zu, d. h sie bleiben im wesentlichen gültig, *wenn wir jetzt zweitens $\gamma$ als von 0 verschieden annehmen.* Durch Losung der Gleichung (2) findet man die beiden Fixpunkte im Endlichen bei:

$$\zeta_1, \zeta_2 = \frac{1}{2\gamma}\left(\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}\right) \tag{6}$$

gelegen Wir unterscheiden folgende Fälle:

I Es sei $\alpha + \delta = \pm 2$ und also etwa $\alpha + \delta = 2$; die Fixpunkte fallen bei:

$$\zeta_2 = \zeta_1 = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \tag{7}$$

zusammen Führen wir nun statt $\zeta$ die Variabele:

(8) $$Z = U(\zeta) = \frac{1}{\zeta - \zeta_1}$$

ein, so wird sich unsere Substitution (1) in eine Substitution:

(9) $$Z' = \frac{\alpha' Z + \beta'}{\gamma' Z + \delta'}$$

zwischen $Z$ und $Z' = U(\zeta')$ umrechnen, deren beide Fixpunkte an der dem Punkte $\zeta_1$ entsprechenden Stelle $Z = \infty$ zusammen-

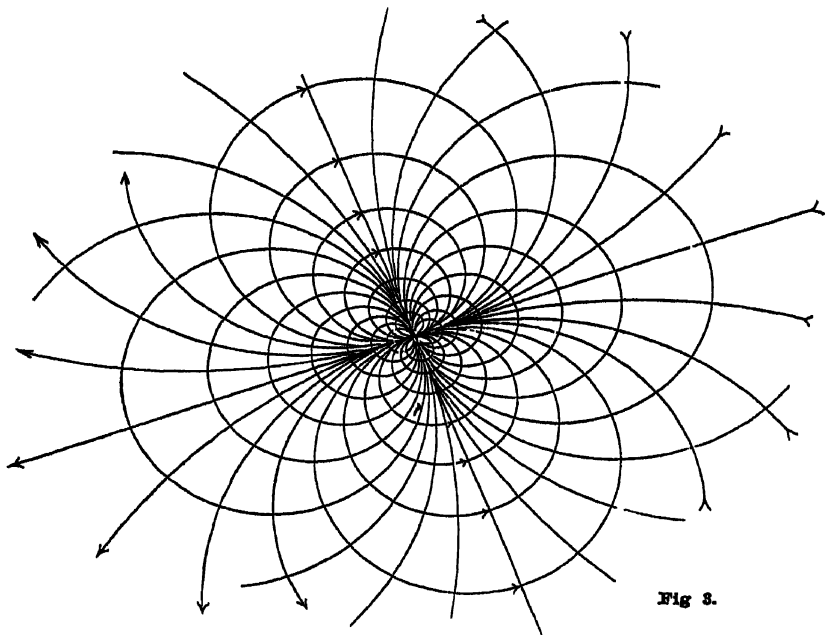



Fig 3.

fallen. Wir haben somit in (9) notwendig $\gamma' = 0$ und $\alpha' = \delta'$, so daß die Substitution eine parabolische ist, indem sie die Gestalt:

$$Z' = Z + \beta'$$

annimmt. Fur $\beta'$ berechnet man übrigens leicht den Wert $\beta' = \gamma$. Unsere ursprüngliche Substitution mit $\alpha + \delta = \pm 2$ bzw. $\alpha + \delta = 2$, für welche wir durch Rückgang zu $\zeta$ die *Normalform*

(10) $$\frac{1}{\zeta' - \zeta_1} = \frac{1}{\zeta - \zeta_1} + \gamma$$

herstellen, nennen wir gleichfalls *„parabolisch"*. Wollen wir die durch sie gelieferte Transformation der $\zeta$-Ebene wieder unter

dem Bilde einer stetigen Deformation dieser Ebene in sich fassen, so stellen wir zunächst in der $Z$-Ebene die Bahn- und Niveaugeraden für die Substitution $Z' = Z + \gamma$ her und nehmen hiervon das kreisverwandte Abbild auf die $\zeta$-Ebene vermöge der zu $U$ inversen Substitution $\zeta = U^{-1}(Z)$. Das entspringende Bild liefert Fig. 3, wo die Bahnkurven eine erste Schar sich in $\zeta_1$ berührender Kreise sind und die zugehörige orthogonale Kreisschar die Niveaulinien liefert.

II. Ist $\alpha + \delta$ weder $= +2$ noch $= -2$, so sind die beiden Fixpunkte $\zeta_1, \zeta_2$ voneinander verschieden. Führen wir an Stelle von $\zeta$ die Variabele:

$$Z = U(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} \tag{11}$$

ein, so rechnet sich unsere Substitution (1) in eine Substitution (9) zwischen $Z$ und $Z' = U(\zeta')$ um, deren Fixpunkte den Werten $\zeta = \zeta_1$ und $\zeta = \zeta_2$ entsprechend bei $Z = 0$ und $Z = \infty$ gelegen sind Es gilt demnach $\beta' = 0$, $\gamma' = 0$ und wir gelangen, indem wir $\frac{\alpha'}{\delta'} = m$ setzen, zu einer Substitution $Z' = mZ$ der Gestalt (5). Je nachdem die letztere hyperbolisch, elliptisch oder loxodromisch ist, nennen wir auch unsere zunächst vorgelegte $\zeta$-Substitution *„hyperbolisch"*, *„elliptisch"* oder *„loxodromisch."* Die Substitution nimmt übrigens bei Rückgang zu $\zeta$ die *Normalform* an:

$$\frac{\zeta' - \zeta_1}{\zeta' - \zeta_2} = m \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2}. \tag{12}$$

Um den *„Multiplikator"* $m$ durch die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Substitution in ihrer ursprünglichen Gestalt (1) darzustellen, beachte man, daß $\zeta = \infty$ den Wert $\zeta' = \frac{\alpha}{\gamma}$ liefert. Durch Eintragung in (12) folgt mit Rücksicht auf (6):

$$m = \frac{\alpha - \gamma\zeta_1}{\alpha - \gamma\zeta_2} = \left(\frac{\alpha + \delta - \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2}\right)^2. \tag{13}$$

Zur geometrischen Deutung unserer Substitution benutzen wir dieselben Vorstellungen wie bisher und zeichnen zunächst im hyperbolischen und elliptischen Falle nach Vorschrift der an Gleichung (5) angeschlossenen Betrachtung in der $Z$-Ebene die vom Nullpunkt ausstrahlenden Geraden (die „Kreisschar" durch die Punkte $Z = 0$ und $Z = \infty$) sowie die konzentrischen Kreise

um $Z = 0$. Dieses Bild ist dann kreisverwandt mittels der zu (11) inversen Substitution $\zeta = U^{-1}(Z)$ auf die $\zeta$-Ebene zu übertragen. Wir gelangen zum Bilde der Fig. 4, in welcher die mit Pfeilen versehenen Kreise durch die Fixpunkte $\zeta_1, \zeta_2$ im hyperbolischen Falle die Bahnkurven, die ihnen orthogonalen Kreise die Niveaulinien ergeben, während im elliptischen Falle die beiden Kreisscharen ihre Rolle tauschen. Im loxodromischen Falle werden, wie Fig. 5 andeutet, Bahnkurven und Niveaulinien von zwei zueinander orthogonalen Scharen von „Doppelspiralen" geliefert

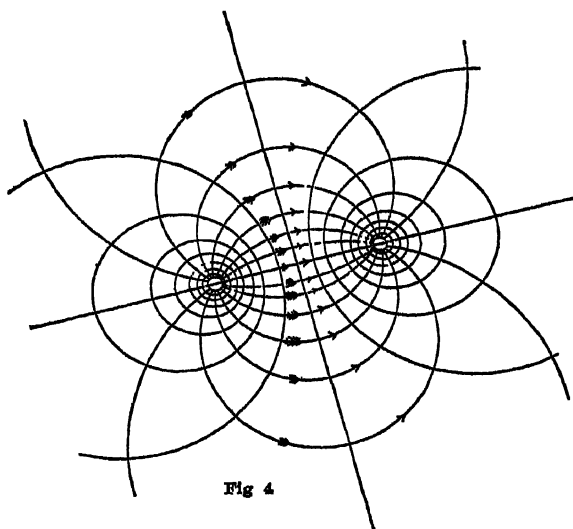



Fig 4

Nach (13) hängt der Multiplikator $m$ allein von der Summe $(\alpha + \delta)$ ab, die die *„Invariante"* der Substitution heißt, und man findet umgekehrt, indem man $m = |m| \cdot e^{\vartheta i}$ setzt, leicht:

$$\pm(\alpha + \delta) = \tag{14}$$
$$\left(\sqrt{|m|} + \frac{1}{\sqrt{|m|}}\right)\cos\frac{\vartheta}{2} + i\left(\sqrt{|m|} - \frac{1}{\sqrt{|m|}}\right)\sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Diskutieren wir diese Gleichung und erinnern uns, daß bei den parabolischen Substitutionen $\alpha + \delta = \pm 2$ vorlag, so folgt: *Die elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Substitutionen sind durch reelle Werte von $(\alpha + \delta)$ charakterisiert, und zwar liegt eine elliptische, parabolische oder hyperbolische Substitution vor, je nachdem $(\alpha + \delta)$ absolut $< 2$, $= 2$ oder $> 2$ ist; für die loxodromischen Substitutionen ist ein nicht-reeller Wert von $(\alpha + \delta)$ charakteristisch.* Dieser Satz gilt auch für die oben vorweg betrachteten Substitutionen mit $\gamma = 0$, wie man mit Rücksicht auf die hier zutreffende Gleichung $\delta = \alpha^{-1}$ leicht zeigt.[1])

1) Die Benennungen der Substitutionen, wie wir sie hier be-

## § 4. Die Spiegelungen oder Inversionen an Kreisen.

Von den Substitutionen zweiter Art:

$$(1)\qquad \zeta' = \frac{\alpha\bar{\zeta} + \beta}{\gamma\bar{\zeta} + \delta},$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

betrachten wir nur diejenigen, bei denen $\delta$ und $\alpha$ konjugiert komplex sind, und $\beta$ sowie $\gamma$ rein imaginäre Werte haben.[1]) Schreiben wir unter Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2,$$
$$\beta = \beta_1 + i\beta_2, \ldots$$

so wird es sich also um die Substitutionen handeln:

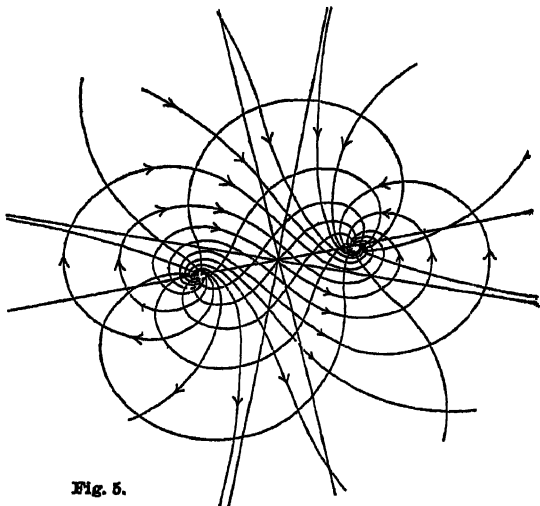



Fig. 5.

$$(2)\qquad \zeta' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\bar{\zeta} + i\beta_2}{i\gamma_2\bar{\zeta} + (\alpha_1 - i\alpha_2)}, \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2\gamma_2 = 1.$$

Fragen wir nach den Fixpunkten dieser Substitution, so haben wir $\zeta' = \zeta$ in (2) einzutragen und ausführlich:

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta$$

zu schreiben. Es ergibt sich der Satz: *Bei der Substitution* (2) *bleiben alle und nur die Punkte der Peripherie des Kreises:*

$$(3)\qquad \gamma_2(\xi^2 + \eta^2) - 2\alpha_2\xi + 2\alpha_1\eta - \beta_2 = 0$$

*fest, der für* $\gamma_2 \gtrless 0$ *mit dem Radius* $|\gamma_2^{-1}|$ *um* $\zeta = \frac{\alpha_2 - i\alpha_1}{\gamma_2}$ *beschrieben ist und für* $\gamma_2 = 0$ *in eine Gerade ausartet.*

---

nutzen, ist von Klein eingeführt; vgl. *Math. Ann.* **14**, 123 (1878) und **21**, 173 (1882). Die Namen „hyperbolisch“, „elliptisch“ und „parabolisch“ hängen mit der projektiven Bedeutung unserer Substitutionen zusammen, worüber „*Aut.*“, **1**, Einleitung, zu vergleichen ist.

1) Über weitere Ausführungen betreffs der Substitutionen zweiter Art vgl. man „*Mod.*“, **1**, 196 ff.

Die Gleichung dieser Geraden schreiben wir:

$$(4)\qquad \alpha_2 \xi - \alpha_1 \eta + \tfrac{1}{2}\beta_2 = 0.$$

Liegt dieser Fall $\gamma_2 = 0$ vor, so berechnen wir aus (2):

$$\xi' = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\,\xi + 2\alpha_1\alpha_2\eta - \alpha_2\beta_2,$$
$$\eta' = 2\alpha_1\alpha_2\xi - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\,\eta + \alpha_1\beta_2,$$

woraus sich mit Rücksicht auf $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ leicht ergibt:

$$\alpha_2\xi' - \alpha_1\eta' + \tfrac{1}{2}\beta_2 = -(\alpha_2\xi - \alpha_1\eta + \tfrac{1}{2}\beta_2).$$

Unsere winkeltreue Abbildung der $\zeta$-Ebene auf sich selbst ist demnach eine Kollineation, und also wird die einzelne gegen die festbleibende Gerade (4) senkrecht verlaufende Gerade in sich selbst übergehen. Die letzte Gleichung besagt, daß je zwei einander entsprechende Punkte $\zeta$ und $\zeta'$ zu beiden Seiten der Geraden (4) in gleicher Entfernung liegen: *Die vorliegende Substitution bedeutet eine symmetrische Umformung der $\zeta$-Ebene oder, wie wir kurz sagen wollen, eine „Spiegelung" der $\zeta$-Ebene an der Geraden* (4).

Ist $\gamma_2 \gtrless 0$, so entspricht dem Mittelpunkte $\zeta = \dfrac{\alpha_2 - i\alpha_1}{\gamma_2}$ des Kreises (3) der Punkt $\zeta' = \infty$, und umgekehrt liefert $\zeta = \infty$ als entsprechenden Punkt $\zeta'$ jenen Kreismittelpunkt. Die einzelne Gerade durch den Kreismittelpunkt wird also durch die Substitution (2) in sich selbst transformiert; die beiden Schnittpunkte derselben mit dem Kreise (3) bleiben fest, und der Mittelpunkt und der Punkt $\zeta = \infty$ tauschen sich aus. Wegen Festbleibens jedes Peripheriepunktes wird dabei auf dem einzelnen vom Mittelpunkte ausziehenden Strahle der zwischen Mittelpunkt und Peripherie gelegene Teil mit dem äußeren bis $\infty$ reichenden Teile ausgetauscht werden. Weiter folgt aus (2):

$$\left(\zeta' - \frac{\alpha_2 - i\alpha_1}{\gamma_2}\right)\left(\bar{\zeta} - \frac{\alpha_2 + i\alpha_1}{\gamma_2}\right) = \frac{1}{\gamma_2^2}$$

oder also bei Übergang zu den absoluten Beträgen:

$$\left|\zeta' - \frac{\alpha_2 - i\alpha_1}{\gamma_2}\right| \cdot \left|\zeta - \frac{\alpha_2 - i\alpha_1}{\gamma_2}\right| = \frac{1}{\gamma_2^2}.$$

Das Produkt der Abstände zweier entsprechender Punkte $\zeta$ und $\zeta'$ vom Mittelpunkte des Kreises (3) ist also gleich dem

Quadrate des Radius. *Unsere Substitution* (2) *ist somit die „Transformation durch reziproke Radien“ am Kreise* (3), *die wir auch kurz als „Inversion“ oder „Spiegelung“ an diesem Kreise bezeichnen.* (*Repert.*, **2**, Kap. II, § 5, S. 42.)

## § 5. Einführung der durch Substitutionen zweiter Art erweiterten Gruppen.

In § 1 wurden wir zum Begriff einer Gruppe $\Gamma$ geführt, welche aus den $\zeta$-Substitutionen erster Art:

$$V_0 = 1,\ V_1,\ V_2,\ V_3, \ldots,$$

deren Anzahl endlich oder unendlich groß sein mag, zusammengesetzt war. Zwischendurch haben wir die Substitutionen der zweiten Art $\overline{V}$ kennen gelernt und zeigen durch Rechnung leicht, daß für irgendwelche Substitutionen der ersten oder zweiten Art das assoziative Gesetz (7) S. 917 seine Gültigkeit behält, womit nach Kap. III, § 1 (S. 173) die Möglichkeit der Bildung von Gruppen aus Substitutionen erster und zweiter Art feststeht.

Eine solche Gruppe, $\overline{\Gamma}$ genannt, sei vorgelegt; sie bestehe aus folgenden Substitutionen:

$$(1) \qquad \begin{cases} V_0 = 1,\ V_1,\ V_2,\ V_3, \ldots \\ \overline{V}_0,\ \overline{V}_1,\ \overline{V}_2,\ \overline{V}_3, \ldots \end{cases}$$

Die erste Zeile enthält hier alle in $\overline{\Gamma}$ vorkommenden Substitutionen erster Art Da zwei unter ihnen, kombiniert, stets wieder eine Substitution erster Art liefern, so werden die in der ersten Zeile (1) stehenden Substitutionen eine in $\overline{\Gamma}$ enthaltene Untergruppe zusammensetzen, die wir $\Gamma$ nennen.

Für solche Untergruppen sind die in Kap. III § 2 entwickelten Sätze maßgeblich. Man wolle zunächst die Substitutionen von $\Gamma$ der Reihe nach mit $\overline{V}_0$ zu $\overline{V}_0$, $V_1\overline{V}_0$, $V_2\overline{V}_0, \ldots$ kombinieren, wobei wir ein symbolisch durch das Produkt $\Gamma\overline{V}_0$ zu bezeichnendes System von Substitutionen gewinnen. Alle diese Substitutionen gehören der zweiten Zeile (1) an, da sie von der zweiten Art sind und $\overline{\Gamma}$ angehören. Zugleich gewinnen wir hierbei jede Substitution der zweiten Zeile (1); denn kombinieren wir irgend ein $\overline{V}_s$ mit der in $\overline{\Gamma}$ enthaltenen zu $\overline{V}_0$ inversen Substitution $\overline{V}_0^{-1}$, so entspringt eine Substitution erster

Art $\overline{V}_i\overline{V}_0^{-1}$, die, als in $\overline{\Gamma}$ enthalten, in der ersten Zeile (1) steht und etwa $V_i$ heißen mag. Aus $\overline{V}_i\overline{V}_0^{-1} = V_i$ folgt dann in der Tat durch Zusatz von $\overline{V}_0$ mit Rücksicht auf das assoziative Gesetz $\overline{V}_i = V_i\overline{V}_0$. Das System $\Gamma\overline{V}_0$ erschöpft demnach die zweite Zeile (1), so daß wir die Gesamtgruppe $\overline{\Gamma}$ mittels der in Kap. III § 2 eingeführten symbolischen Schreibweise als Summe:

$$\overline{\Gamma} = \Gamma + \Gamma\overline{V}_0$$

darstellen können. Da die rechte Seite zweigliedrig ist, so heißt nach der a. a. O. erklärten Bezeichnung $\Gamma$ *eine Untergruppe des Index* 2 in $\overline{\Gamma}$.

Ist $U$ irgend eine Substitution erster oder zweiter Art von $\overline{\Gamma}$, so bilde man alle Substitutionen:

$$U^{-1}V_0U = 1, \quad U^{-1}V_1U, \quad U^{-1}V_2U, \ldots,$$

die wir in dem Symbol $U^{-1}\Gamma U$ zusammenfassen. Sie werden nach Kap. III, § 2, S. 184 eine mit $\Gamma$ „gleichberechtigte" Untergruppe in $\overline{\Gamma}$ liefern. Indessen wird die einzelne Substitution $U^{-1}V_iU$, mag $U$ erster oder zweiter Art sein, stets wieder der ersten Art angehören:

$$U^{-1}V_iU = V_k.$$

Auch gewinnen wir hierbei alle Substitutionen der ersten Zeile (1) wieder; denn um ein beliebiges $V_k$ zu erreichen, hat man an $V_i = UV_kU^{-1}$ anzuknüpfen. Es geht hieraus hervor, daß $U^{-1}\Gamma U$ stets wieder die Gruppe $\Gamma$ selbst ist: *Die in der Gruppe $\overline{\Gamma}$ enthaltenen Substitutionen erster Art bilden eine „ausgezeichnete" Untergruppe des Index „zwei"*.

Vorstehende Betrachtung kehren wir teilweise um. Es sei $\Gamma$ irgend eine Gruppe aus Substitutionen erster Art, und $\overline{V}_0$ bedeute eine Spiegelung. Aus § 4 folgt, daß die einmalige Wiederholung von $\overline{V}_0$ zur identischen Substitution führt $\overline{V}_0^2 = 1$. Es gelte die Voraussetzung, daß die durch $\overline{V}_0$ transformierte Gruppe $\overline{V}_0^{-1}\Gamma\overline{V}_0$ wieder mit $\Gamma$ identisch sei (vgl. Kap. III § 2, S. 184), daß also $\Gamma$ durch $\overline{V}_0$ in sich transformiert werde; für die Substitutionen von $\Gamma$, welche $1, V_1, V_2, \ldots$ heißen, gelte somit der Voraussetzung zufolge allemal:

$$\overline{V}_0^{-1}V_k\overline{V}_0 = V_l$$

Man bilde nun die gesamten Substitutionen $\overline{V_0}$, $V_1\overline{V_0}$, $V_2\overline{V_0}, \ldots$ Für die Kombination von zweien unter ihnen gilt, da

$$\overline{V_0}^{-1} = \overline{V_0}$$

ist:

$$(V_i\overline{V_0})(V_k\overline{V_0}) = V_i(\overline{V_0}^{-1}V_k\overline{V_0}) = V_iV_l = V_m,$$

und man beweist ebenso leicht:

$$V_i(V_k\overline{V_0}) = (V_iV_k)\overline{V_0} = V_n\overline{V_0},$$

$$(V_i\overline{V_0})V_k = V_i(\overline{V_0}^{-1}V_k\overline{V_0})\overline{V_0} = (V_iV_l)\overline{V_0} = V_m\overline{V_0}.$$

Es gilt somit der Satz: *Eine aus Substitutionen erster Art bestehende Gruppe $\Gamma$, welche durch die Spiegelung $\overline{V_0}$ in sich transformiert wird, gestattet durch Zusatz von $\overline{V_0}$ Erweiterung auf eine Gruppe:*

$$\overline{\Gamma} = \Gamma + \Gamma\overline{V_0},$$

*in welcher $\Gamma$ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2 ist.*

## § 6. Begriffe der Äquivalenz und des Diskontinuitätsbereiches. Beispiel.

Sei $\Gamma$ irgend eine Gruppe, die entweder nur Substitutionen erster Art oder solche beider Arten enthält. *Wir nennen alsdann zwei Werte $\zeta$ und $\zeta'$ sowie die ihnen entsprechenden Punkte der $\zeta$-Ebene „äquivalent" bezüglich der Gruppe $\Gamma$, falls $\Gamma$ eine Substitution enthält, welche $\zeta$ in $\zeta'$ transformiert.*

Hieran schließt sich unmittelbar folgende Erklärung: *Ein aus einem oder mehreren Stücken bestehender Bereich der $\zeta$-Ebene ($\zeta$-Kugel) heißt ein „Diskontinuitätsbereich" (abgekürzt „DB") der Gruppe $\Gamma$, falls derselbe für jeden Punkt der $\zeta$-Ebene einen und nur einen bezüglich $\Gamma$ äquivalenten Punkt aufweist*

Als erstes Beispiel betrachten wir die der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen (cf Kap. XVI, § 5) zugrunde liegenden Gruppe $\Gamma$ Wir verstehen unter $\omega_1, \omega_2$ irgend zwei von 0 verschiedene endliche komplexe Größen, deren Quotient $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ jedoch nicht reell sein soll. Mittels ganzer Zahlen $m_1$, $m_2$ setzen wir an:

$$\zeta' = \zeta + m_1\omega_1 + m_2\omega_2. \tag{1}$$

*Diese für alle Paare ganzer positiver und negativer Zahlen $m_1$, $m_2$, die Zahl 0 eingeschlossen, gebildeten parabolischen Substitutionen des Fixpunktes $\zeta = \infty$, liefern die zu betrachtende Gruppe $\Gamma$.* Die Verhältnisse sind hier besonders einfach, da alle Substitutionen von $\Gamma$ geometrisch Translationen bedeuten. Man bedecke, wie es in Fig. 6 geschehen ist, die $\zeta$-Ebene mit einem *Netze kongruenter Parallelogramme*, von denen ein erstes durch Schraffierung ausgezeichnetes seine Ecken bei:

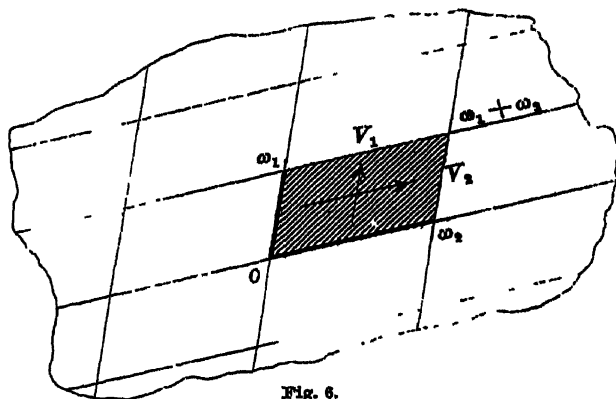



Fig. 6.

$$\zeta = 0, \ \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$$

hat. Mit irgend einem Punkte $\zeta_0$ sind äquivalent die gesamten Punkte $(\zeta_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$. Wir erkennen sofort: Untereinander äquivalent sind immer und nur die homologen Punkte in den Parallelogrammen unseres Netzes. Somit wird für jeden endlichen Punkt $\zeta$ ein und nur ein äquivalenter Punkt in einem einzelnen unserer Parallelogramme, z. B. dem schraffierten, existieren: *Das durch Schraffierung hervorgehobene Parallelogramm der Fig. 6 ist ein „DB" der Gruppe der Substitutionen (1).*

Jedoch erfordert die Allgemeingültigkeit dieses Satzes noch einige Bemerkungen. Erklären wir die Substitutionen $V_1$, $V_2$ von $\Gamma$ durch:

$$(2) \qquad V_1(\zeta) = \zeta + \omega_1, \qquad V_2(\zeta) = \zeta + \omega_2,$$

so transformiert, wie dies durch die Pfeile der Fig. 6 angedeutet ist, $V_1$ die Parallelogrammseite $0, \omega_2$ in die gegenüberliegende Seite, und ebenso führt $V_2$ die Seite $0, \omega_1$ in die ihr gegenüberliegende über. *Da hiernach die Randpunkte des „DB" zu Paaren äquivalent erscheinen, so treffen wir die Verabredung,*

*daß nur etwa die beiden in Fig. 6 stark ausgezogenen Parallelogrammseiten dem „DB“ als zugehörig angesehen werden sollen.*

Unter Wiederholungen einer Substitution $V$ verstehen wir nicht nur die Substitutionen $V^2, V^3, \ldots$, sondern auch noch die zu diesen inversen $V^{-1}, V^{-2}, \ldots$ sowie $V^0 = 1$. Dann gilt der Satz: *Die gesamte Gruppe $\Gamma$ läßt sich durch Wiederholungen und Kombinationen der beiden Substitutionen $V_1$, $V_2$ herstellen, welche die einander zugeordneten Seiten des „DB“ ineinander überführen; diese Substitutionen sollen dementsprechend als „erzeugende Substitutionen“ oder kurz „Erzeugende“ der Gruppe bezeichnet werden.* In der Tat ist ja die Substitution (1) einfach durch $V_1^{m_1} V_2^{m_2}$ gegeben. Denken wir demnach die Substitutionen von $\Gamma$ im Anschluß an die Identität $V_0 = 1$ der Reihe nach gebildet:

$$V_1, V_1^{-1}, \quad V_2, V_2^{-1}, \quad V_1 V_2, \quad V_1^{-1} V_2, \ldots,$$

und an den „DB“ jedesmal dasjenige Parallelogramm angefügt, in welches der „DB“ durch die einzelne Substitution übergeht, so bauen wir schrittweise unser Parallelogrammnetz auf, welches die ganze endliche $\zeta$-Ebene einfach und ohne Lücke bedeckt. *Dabei drängen sich gegen $\zeta = \infty$ von allen Seiten her die Parallelogramme immer dichter zusammen.*[1] Diese Stelle soll demnach als ein *„Grenzpunkt“ der Gruppe* bezeichnet werden; seine Ausnahmestellung geht auch schon daraus hervor, daß er nur mit sich selbst bezüglich $\Gamma$ äquivalent ist.

Die vorstehende Betrachtung möge nicht den Anschein erwecken, als sei der „DB“ unserer $\Gamma$ eindeutig bestimmt. Wenn wir dem „DB“ irgend welche Teile nehmen und durch äquivalente ersetzen, so bleibt er nach der Änderung immer noch ein „DB“ der Gruppe Doch gehen wir auf derartige „erlaubte Abänderungen“ hier nicht ein [2])

## § 7. Die zyklischen Gruppen und ihre „DB“.

Die Entwicklungen über den „DB“ der eben betrachteten Gruppe haben allgemeine Bedeutung für die „DB“ unserer Gruppen $\Gamma$,

1) Man mache sich dies etwa durch Projektion des Netzes auf die $\zeta$-Kugel deutlich

2) Der „DB“ einer $\Gamma$ ist als einer der wesentlichsten Fundamentalbegriffe der Theorie der automorphen Funktionen von Klein, *Math Ann* **14**, 133 (1878) und **21**, 141 (1882), sowie von Poincaré, *Act math.* **1**, 1 (1882) zugrunde gelegt. Über das frühere Vorkommen dieses Begriffs folgen unten nähere Angaben

wie wir zunächst am Beispiel der zyklischen Gruppen zeigen wollen. *Als „zyklisch“ bezeichnet man eine Gruppe $\Gamma$, welche aus den gesamten Wiederholungen:*

$$(1) \qquad \ldots, V^{-2}, V^{-1}, V^0 = 1, V, V^2, \ldots$$

*einer einzelnen Substitution $V$ besteht.* Je nach der Art von $V$ unterscheiden wir *„hyperbolische“*, *„parabolische“*, *„elliptische“* und *„loxodromische“* Gruppen dieser Art. Für die Auswahl eines „DB“ sind in jedem Falle die geometrischen Entwicklungen von § 3 grundlegend.

Im *hyperbolischen* Falle wird der Charakter der zugehörigen Verschiebung der Ebene in sich durch Fig. 4, S. 926 gegeben. Man wähle irgend einen Niveaukreis von $V$ und transformiere denselben durch alle Substitutionen der Gruppe. Die so herausgegriffenen Niveaulinien bilden eine Schar von Kreisen, die sich um die beiden Fixpunkte $\zeta_1$, $\zeta_2$ enger und enger zusammendrängen. *Durch diese Kreise wird die $\zeta$-Ebene mit einem Netze von Kreisringen bedeckt, von denen ein einzelner, z. B. der in Fig. 7 schraffierte, als „DB“ der Gruppe wählbar ist.* Benennen wir nämlich denjenigen Kreisring, welcher aus dem schraffierten durch die Substitution $V^n$ hervorgeht, kurz mit dem Symbol $V^n$, wie Fig. 7 andeutet, so werden sich die unendlich vielen Ringe

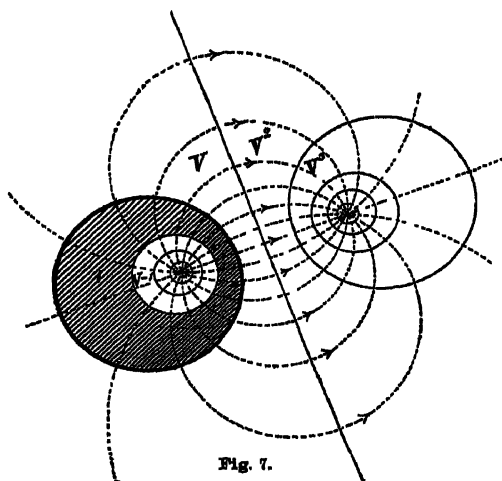



Fig. 7.

$$\ldots, V^{-2}, V^{-1}, V^0 = 1, V^1, V^2, \ldots$$

glatt aneinanderreihen und die $\zeta$-Ebene einfach bedecken. Ein Punkt $\zeta$ des schraffierten Ringes wird also durch die von 1 verschiedene Substitution $V^n$ in den homologen Punkt des Ringes $V^n$ übergeführt. Zugleich gibt es zu irgend einem etwa dem Ringe $V^i$ angehörenden Punkte $\zeta$ den äquivalenten Punkt $V^{-i}(\zeta)$ im schraffierten Ringe.

Die Randpunkte des „DB" sind zu Paaren äquivalent; wir rechnen etwa nur den stark ausgezogenen Randkreis unserem „DB" zu. Der andere geht in diesen über durch die *„Erzeugende"* $V$ unserer Gruppe. Die Fixpunkte $\zeta_1, \zeta_2$ von $V$, gegen welche hin die Bereiche des die $\zeta$-Ebene überspannenden Netzes unendlich klein werden, sind *„Grenzpunkte"* der Gruppe. In jeder Umgebung eines Grenzpunktes finden sich unendlich viele mit einem gegebenen, von $\zeta_1$ und $\zeta_2$ verschiedenen, $\zeta$ äquivalente Punkte; $\zeta_1$ und $\zeta_2$ selbst sind jedoch je nur mit sich selbst äquivalent.

Diese Betrachtung überträgt man leicht auf den *parabolischen* Fall, den Fig. 8 erläutert *Der wieder durch Schraffierung hervorgehobene „DB" hat die Gestalt einer Kreissichel, die sich mit zwei Spitzen von entgegengesetzten Seiten an den Fixpunkt, den einzigen hier vorliegenden „Grenzpunkt", heranzieht.* Im ubrigen gelten dieselben Bemerkungen wie im hyperbolischen Falle Liegt der Grenzpunkt bei $\zeta = \infty$, so tritt an die Stelle der Kreissichel das in Fig. 9 (S. 936) dargestellte kreisverwandte Bild, ein durch zwei parallele Gerade eingegrenzter *„Streifen"* der $\zeta$-Ebene

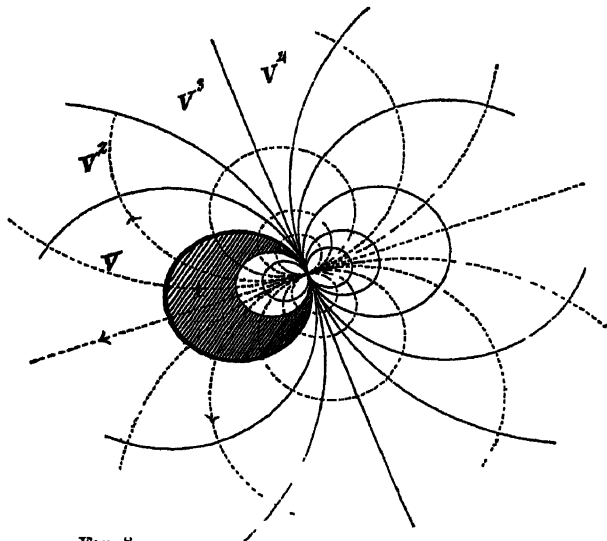



Fig 8.

Zu neuen Betrachtungen gibt der *elliptische* Fall Anlaß Man hat zu unterscheiden, ob die in der Normalform:

$$\frac{\zeta' - \zeta_1}{\zeta' - \zeta_2} = e^{\vartheta i} \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} \tag{2}$$

auftretende „Amplitude" $\vartheta$ zu $2\pi$ in einem rationalen Verhältnis steht oder nicht Im ersten Falle setzen wir $\vartheta = \frac{2\pi k}{l}$, wo

$k$ und $l$ als teilerfremde ganze Zahlen vorausgesetzt werden dürfen, deren zweite $l > 0$ ist. Man erkennt sofort, daß jetzt $V^l = 1$ ist, während die Substitutionen:

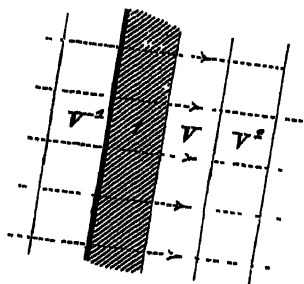
$$V^0 = 1,\ V,\ V^2,\ V^3, \ldots, V^{l-1}$$

durchweg voneinander verschieden sind. *Unsere Gruppe enthält nur $l$ verschiedene Substitutionen und heißt dieserhalb von der „Ordnung" $l$.* Ist $\nu$ diejenige unter den Zahlen $1, 2, \ldots, l-1$, für welche $(k\nu - 1)$ durch $l$ teilbar wird, so bekommt $V^\nu$ die Amplitude $\vartheta = \frac{2\pi}{l}$. Offenbar können wir unsere Gruppe auch aus dieser Substitution $V' = V^\nu$ in der Gestalt:

Fig. 9.

$$V'^0 = 1,\ V',\ V'^2, \ldots, V'^{l-1}$$

erzeugen. *Wir dürfen demgemäß auch von vornherein bei der Substitution (2) die Amplitude $\vartheta = \frac{2\pi}{l}$ setzen und also als einen aliquoten Teil von $2\pi$ annehmen.*

Zur Eingrenzung des „DB" benutzen wir dasselbe Prinzip wie in den schon besprochenen Fällen. Auf eine erste Niveaukurve (Kreisbogen von $\zeta_1$ nach $\zeta_2$) üben wir die Substitutionen:

$$V,\ V^2,\ \ldots, V^{l-1}$$

aus und gewinnen insgesamt $l$ Niveaukurven, *welche die $\zeta$-Ebene in $l$ Kreissicheln mit je zwei Ecken der Winkel $\frac{2\pi}{l}$ in $\zeta_1$ und $\zeta_2$ zerlegen. Eine einzelne dieser Sicheln bildet einen „DB" unserer Gruppe $\Gamma$.* Die Fig. 10 stellt den Fall $l = 8$ dar; sie diene zugleich zur Erläuterung sich anschließender Bemerkungen über Zurechnung der Randpunkte zum „DB", Erzeugung der Gruppe usw.

Steht $\vartheta$ zu $2\pi$ in einem irrationalen Verhältnis, so können keine zwei verschiedenen Multipla $m_1 \frac{\vartheta}{2\pi}$ und $m_2 \frac{\vartheta}{2\pi}$ eine ganzzahlige Differenz liefern. Ist demnach $E(x)$ die größte, die Zahl $x$ nicht übertreffende ganze Zahl, so werden die unendlich vielen Beträge:

$$(3) \qquad \frac{m\vartheta}{2\pi} - E\left(\frac{m\vartheta}{2\pi}\right), \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

voneinander durchweg verschieden sein und sämtlich zwischen 0

und 1 liegen. In diesem Intervall findet sich also für jene Beträge (3) mindestens eine Häufungsstelle, so daß wir nach Auswahl einer beliebig kleinen positiven Zahl $\varepsilon$ stets noch zwei verschiedene ganze Zahlen $m_1$, $m_2$ finden können, welche:

$$-\frac{\varepsilon}{2\pi} < \frac{(m_1 - m_2)\vartheta}{2\pi} - E\left(\frac{m_1\vartheta}{2\pi}\right) + E\left(\frac{m_2\vartheta}{2\pi}\right) < +\frac{\varepsilon}{2\pi}$$

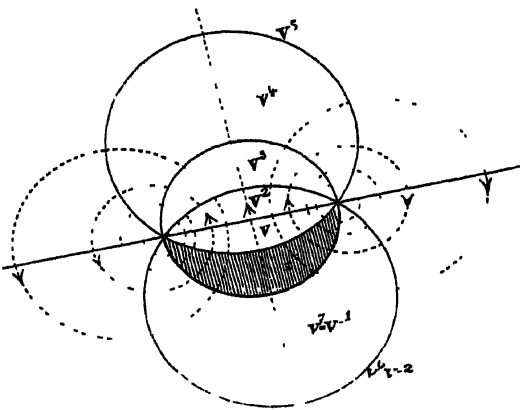
und also für die von 0 verschiedene ganze Zahl $n = m_1 - m_2$

$$-\varepsilon < n\vartheta - 2\pi E\left(\frac{m_1\vartheta}{2\pi}\right) + 2\pi E\left(\frac{m_2\vartheta}{2\pi}\right) < +\varepsilon$$

liefern. Da wir nun bei der Natur der elliptischen Substitutionen deren Amplituden durch Zusatz oder Abzug ganzzahliger Multipla von $2\pi$ auf Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$ reduzieren dürfen, so ergibt sich aus vorstehender Ungleichung, daß die Amplitude von $V^n$ nach jener Reduktion absolut kleiner als $\varepsilon$ ist: *In unserer Gruppe $\Gamma$ gibt es elliptische Substitutionen, deren Amplituden kleiner sind als die beliebig klein gewählte positive Zahl $\varepsilon$* [1])

Fig 10

Die mit irgend einem Punkte $\zeta$ äquivalenten Punkte werden demnach die durch jenen ersten Punkt $\zeta$ laufende Bahnkurve überall dicht bedecken. Soll also eine *eindeutige analytische* Funktion $\varphi(\zeta)$ in allen diesen äquivalenten Punkten *den gleichen Wert* haben (vgl § 1, S 915), so ist sie längs der ganzen Bahnkurve und also in der ganzen $\zeta$-Ebene konstant. Diesen trivialen Fall schließen wir aus und setzen somit fest: *In unseren Gruppen $\Gamma$ dürfen nur solche elliptische Substitutionen vorkommen, deren Amplituden durchweg zu $2\pi$ in rationalem Verhältnis stehen.*

---

1) Siehe die Entwicklungen über infinitesimale Substitutionen und eigentliche Diskontinuität der Gruppen in „*Aut*“ 1, 94 ff.

Ist die Erzeugende $V$ der zyklischen Gruppe *loxodromisch:*

$$\frac{\zeta' - \zeta_1}{\zeta' - \zeta_2} = |m| \cdot e^{\vartheta i} \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2},$$

so ist es unzweckmäßig, die doppelspiraligen Niveaukurven (vgl. Fig. 5, S. 927) zur Eingrenzung eines „DB" zu wählen; wir benutzen hierzu vielmehr die Niveaukreise der zu den gleichen Fixpunkten und dem Multiplikator $|m|$ gehörenden hyperbolischen Substitution. *Der „DB" ist dann wie im hyperbolischen Falle ein Kreisring, dessen beide Randkreise jedoch jetzt durch die loxodromische Substitution $V$ miteinander korrespondieren.* Zur näheren Erläuterung dient Fig. 11.

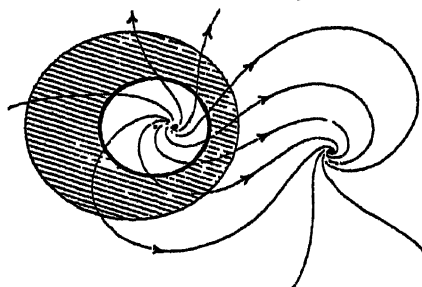



Fig. 11.

## § 8. Erweiterung zyklischer Gruppen durch Spiegelungen.

Es gilt der Satz: *Eine zyklische Gruppe $\Gamma$ mit nicht-loxodromischer Erzeugenden $V$ ist stets durch Spiegelungen erweiterungsfähig auf eine Gruppe $\overline{\Gamma}$, in der $\Gamma$ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei ist.*[1])

Die hier in Frage kommenden Gruppen $\overline{\Gamma}$ sind allemal *aus zwei Spiegelungen* (vgl. (2), S. 927) *erzeugbar:*

$$\overline{V}(\zeta) = \frac{\alpha\bar{\zeta} + i\beta_2}{i\gamma_2\bar{\zeta} + \bar{\alpha}}, \qquad \overline{V}'(\zeta) = \frac{\alpha'\bar{\zeta} + i\beta_2'}{i\gamma_2'\bar{\zeta} + \bar{\alpha}'}. \tag{1}$$

Durch Kombination dieser beiden Substitutionen erzeugen wir die Substitution erster Art:

$$V(\zeta) = \overline{V}'\,\overline{V}(\zeta) = \frac{(\bar{\alpha}\alpha' + \gamma_2\beta_2')\zeta + i(\alpha\beta_2' - \beta_2\alpha')}{i(\bar{\alpha}\gamma_2' - \gamma_2\bar{\alpha}')\zeta + (\alpha\bar{\alpha}' + \beta_2\gamma_2')}, \tag{2}$$

in der die Summe des ersten und vierten Koeffizienten:

$$\alpha\bar{\alpha}' + \bar{\alpha}\alpha' + \beta_2\gamma_2' + \beta_2'\gamma_2 = 2\alpha_1\alpha_1' + 2\alpha_2\alpha_2' + \beta_2\gamma_2' + \beta_2'\gamma_2, \tag{3}$$

1) Bei loxodromischen Erzeugenden $V$ gilt dieser Satz nicht, cf „*Mod.*" **1**, 200ff

wie man sieht, reell ist. Die beiden Symmetriekreise der Spiegelungen (1) sind durch:

$$(4)\quad \begin{cases} \gamma_2(\xi^2+\eta^2)-2\alpha_2\xi+2\alpha_1\eta-\beta_2=0, \\ \gamma_2'(\xi^2+\eta^2)-2\alpha_2'\xi+2\alpha_1'\eta-\beta_2'=0 \end{cases}$$

gegeben. Mittels der Regeln der analytischen Geometrie beweist man: *Je nachdem sich die Kreise (4) schneiden, berühren oder nicht treffen, ist die Summe (3) absolut $< 2$, $= 2$ oder $> 2$ und ist also nach § 3 die Substitution $V$ elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch.*

Da $\overline{V}^2 = 1$, $\overline{V}'^2 = 1$ gilt, so werden bei der Erzeugung der Substitutionen von $\Gamma$ in der symbolischen Gestalt von Produkten der Faktoren $\overline{V}$, $\overline{V}'$ nie höhere als erste Potenzen dieser Faktoren zuzulassen sein, d. h. auf den Faktor $\overline{V}$ folgt stets $\overline{V}'$ und umgekehrt. Ist die Faktorenanzahl gerade und gleich $2n$, so gelangen wir zu:

$$(5)\qquad (\overline{V}'\overline{V})^n = V^n, \quad (\overline{V}\,\overline{V}')^n = V^{-n},$$

ist die Faktorenanzahl gleich $(2n+1)$, so erhalten wir:

$$(6)\quad (\overline{V}'\overline{V})^n\,\overline{V}' = (\overline{V}'\overline{V})^{n+1}\overline{V} = V^{n+1}\overline{V}, (\overline{V}\,\overline{V}')^n\,\overline{V} = V^{-n}\overline{V}.$$

*Die Substitutionen (5) liefern die zyklische Untergruppe $\Gamma$; der Zusatz der Substitutionen (6) führt zur erweiterten Gruppe:*

$$\overline{\Gamma} = \Gamma + \Gamma\overline{V}.$$

Ein zu den Kreisen (4) orthogonaler Kreis wird durch $\overline{V}$ und durch $\overline{V}'$, also auch durch $V$ in sich transformiert: *Die zu den Kreisen (4) orthogonale Kreisschar liefert die Schar der Bahnkurven von $V$*[1]), *und also gehören die Kreise (4) selbst zu den Niveaulinien von $V$.*

Die Herstellung eines „DB“ für $\Gamma$ im *hyperbolischen* Falle wird durch Fig. 12 illustriert. *Der durch die beiden Kreise (4) eingegrenzte Kreisring ist unmittelbar ein „DB“ für die Gruppe $\overline{\Gamma}$.* Wir nennen diesen Kreisring 1 und spiegeln ihn zunächst an

1) Aus § 3 folgt leicht, daß ein Kreis, der durch eine nichtloxodromische Substitution in sich transformiert wird, *stets* Bahnkurve derselben ist.

seinen beiden Randkreisen, so daß er von zwei weiteren Ringen umgeben erscheint, die wir entsprechend $\bar{V}$ und $V'$ nennen. Spiegeln wir auch diese wieder je an ihren noch freigebliebenen Randkreisen, so schließen sich die beiden Ringe an, welchen die Namen:

$$V\bar{V}' = V^{-1} \quad \text{und} \quad \bar{V}'\bar{V} = V$$

zu erteilen sind, und welche in der Tat aus dem Ringe 1 durch $V^{-1}$ bzw. $V$ entstehen. Es schließen sich durch Fortsetzung des Spiegelungsprozesses die Ringe $V\bar{V}'\bar{V}$ und $\bar{V}'\bar{V}V'$ an usw.

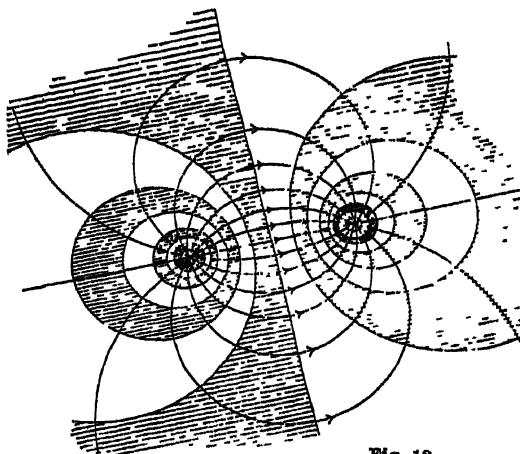



Fig. 12.

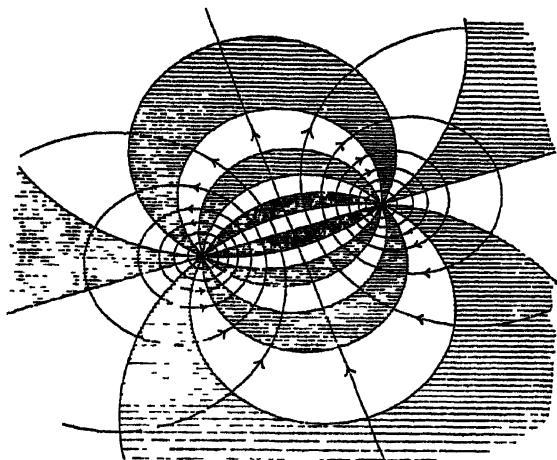
In Fig. 12 sind des besseren Überblicks halber diese Ringe abwechselnd schraffiert und frei gelassen. Das System dieser den Substitutionen von $\Gamma$ entsprechenden Ringe bedeckt schließlich die $\zeta$-Ebene überall einfach und lückenlos, abgesehen von den beiden Grenzpunkten der Gruppe (Fixpunkten von $V$). Daraus geht hervor, daß der einzelne Ring, z. B. der mit dem Namen 1, ein „DB" von $\Gamma$ ist.

Auf den *parabolischen* Fall, wo sich die Kreise (4) berühren und eine *„Kreissichel"* mit zwei an den Berührungspunkt von entgegengesetzten Seiten heranragenden Spitzen bilden, überträgt sich die vorstehende Betrachtung unmittelbar.

Dagegen erfordert der *elliptische* Fall für die in der Theorie der eindeutigen automorphen Funktionen in Betracht kommenden $\Gamma$ nach § 7 die Beschränkung, daß sich die Kreise (4) unter einem Winkel treffen, *der ein aliquoter Teil* $\frac{\pi}{l}$ *von* $\pi$ *ist.* Dann gilt der Satz: *Eines der beiden von den Kreisen (4) gelieferten Kreisbogenzweiecke der gleichen Winkel* $\frac{\pi}{l}$ *ist ein „DB" der Gruppe* $\bar{\Gamma}$, *welche die endliche Ordnung* $2l$ *besitzt.* Man wird sich dies an Fig. 13 leicht deutlich machen, wo $2l$ (in der Figur ist $l = 8$

gewählt) äquivalente Kreisbogenzweiecke mit gemeinsamen Ecken in den Fixpunkten von $V$ die ganze $\zeta$-Ebene einfach und lückenlos bedecken.

In jedem der drei betrachteten Fälle können wir *einen „DB" der aus $V$ zu erzeugenden Untergruppe $\Gamma$ dadurch herstellen, daß wir den Bereich* 1 *mit dem benachbarten Bereiche $V$ zusammenfassen.* Der entspringende größere Bereich ist durch zwei Niveaukurven von $V$ eingegrenzt, deren eine durch $V$ in die andere übergeführt wird; wir kommen unmittelbar zu den in § 7 für die zyklischen Gruppen nicht-loxodromischer Erzeugender ausgewählten Gestalten der „DB" zurück.

Fig 13.

## § 9. Die Netze der Kreisbogendreiecke.

An die Gruppen des § 8 schließen sich diejenigen an, welche *aus drei Spiegelungen erzeugbar* sind. Wir nennen dieselben $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ und beschränken uns zunächst auf den Fall, daß sich die drei Symmetriekreise jener $\overline{V}_i$ schneiden oder doch berühren und auf die Weise ein *Kreisbogendreieck* eingrenzen. Die Winkel des Dreiecks haben wir, wie diejenigen der eben betrachteten Zweiecke, als aliquote Teile $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}$ von $\pi$ anzunehmen, wo die $l_i$ positive ganze Zahlen mit Ausschluß von 1 und mit Einschluß von $\infty$ bedeuten. Der Winkel $\frac{\pi}{l_i}$ soll in unserem Kreisbogendreieck dem Symmetriekreise von $\overline{V}_i$ gegenüberliegen. Schreiben wir demnach:

$$(1) \qquad V_1 = \overline{V}_2\,\overline{V}_3, \quad V_2 = \overline{V}_3\,\overline{V}_1, \quad V_3 = \overline{V}_1\,\overline{V}_2,$$

so ist die einzelne dieser Substitutionen $V_i$ elliptisch oder parabolisch, je nachdem $l_i$ endlich oder $\infty$ ist; im ersten Falle ist $V_i^{l_i} = 1$; wir sagen dann, $V_i$ habe die „*Periode*“ $l_i$.

Wir wollen jetzt das Kreisbogendreieck an seinen drei Seiten zur Spiegelung bringen und auf die Weise mit drei weiteren Dreiecken umgeben. Diese spiegeln wir wieder an den beiden je noch frei bleibenden Seiten, was zu einer Reihe weiterer Kreisbogendreiecke hinführt. So fahren wir fort und fragen, ob vielleicht ähnlich wie im Falle der eben besprochenen Kreisbogenzweiecke jetzt ein übersehbares Netz von Kreisbogendreiecken entsteht. Sollte etwa ein die $\zeta$-Ebene lückenlos und einfach bedeckendes Netz entstehen, so würde wieder jenes erste Kreisbogendreieck einen „DB“ der aus $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{V_3}$ zu erzeugenden Gruppe $\overline{\Gamma}$ liefern, und die Herstellung aller Substitutionen von $\overline{\Gamma}$ aus $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{V_3}$ würde ihr Bild in der durch immer wiederholte Spiegelungen einzelner Dreiecke erfolgenden Herstellung des Dreiecksnetzes finden.

Man übe zuvörderst auf das Ausgangsdreieck nur die Spiegelungen $\overline{V_2}, \overline{V_3}$ wiederholt aus. Ist $l_1$ endlich, so gelangen wir zur erweiterten zyklischen Gruppe $(2l_1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Substitutionen:

$$1, \overline{V_2}, V_1, V_1\overline{V_2}, V_1^2, V_1^2\overline{V_2}, \ldots, V_1^{l_1-1}, V_1^{l_1-1}\overline{V_2}.$$

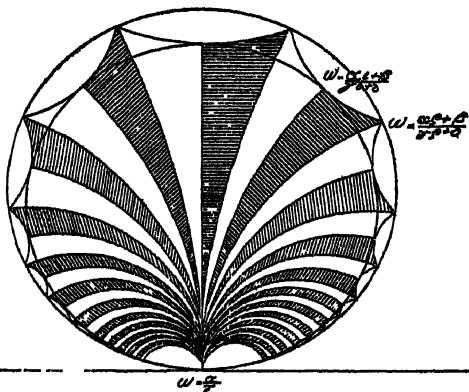
Der Zusatz von $\overline{V_3}$ zur letzten Substitution führt zur Substitution 1 zurück. Wenn wir somit beim Spiegelungsprozeß um die Ecke des von 0 verschiedenen Winkels $\frac{\pi}{l_1}$ immer in derselben Umlaufsrichtung weitergehen, *so schließt gerade nach einem vollen Umlaufe der Spiegelungsprozeß glatt ab, indem das $(2l_1+1)^{\text{te}}$ Dreieck mit dem ersten identisch wird.* Ist hingegen $l_1 = \infty$, so haben wir in:

$$\ldots, V_1^{-2}, V_1^{-2}\overline{V_2}, \quad V_1^{-1}, V_1^{-1}\overline{V_2}, 1, \overline{V_2}, V_1, V_1\overline{V_2}, V_1^2, \ldots$$

eine erweiterte zyklische Gruppe parabolischer Art. Hier ist der Spiegelungsprozeß um die Ecke des Winkels $\frac{\pi}{l_1}$ herum beiderseits bis ins Unendliche fortzusetzen. *Es tritt kein zyklischer Zusammenschluß der Dreiecke ein; aber die Dreiecke kommen auch nicht miteinander in Kollision, werden vielmehr, wie die Kreissicheln des § 8 gegen den Fixpunkt von $V_1$ von zwei entgegengesetzten Richtungen her unendlich klein.* Fig. 14, welche dem

bald näher zu betrachtenden Falle $l_1 = \infty$, $l_2 = 2$, $l_3 = 3$ zugehört, erläutert die vorliegenden Verhältnisse; die Dreiecke sind abwechselnd schraffiert und frei gelassen.[1]) Alle Ecken der Winkel $\frac{\pi}{l_3}$ liegen auf einer in der Figur angedeuteten Bahnkurve von $V_1$, ebenso alle Ecken der Winkel $\frac{\pi}{l_2}$.

Fig. 14.

Bei Weiterführung des Spiegelungsprozesses ist zu unterscheiden, ob die Winkelsumme des Dreiecks $> \pi$, $= \pi$ oder $< \pi$ ist, d. h. welche der drei folgenden Bedingungen:

$$(2)\quad \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} > 1, \quad \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} = 1, \quad \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} < 1$$

zutrifft. Wir merken sogleich an: *Im ersten Falle haben die drei Symmetriekreise von* $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ *keinen gemeinsamen Orthogonalkreis, im dritten Falle liegt ein Orthogonalkreis mit nicht verschwindendem Radius vor, im zweiten Falle ist der Orthogonalkreis zu einem Punkte geworden, durch den die Symmetriekreise zugleich hindurchlaufen.*[2]) Es gilt weiter: *Die einzigen Lösungen der ersten Bedingung (2) in ganzen Zahlen* $l \geqq 2$ *sind:*

| $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ |
|---|---|---|
| 2 | 2 | $l$ |
| 2 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 5, |

*wobei im ersten Falle* $l_3 = l$ *als endliche ganze Zahl* $l \geqq 2$ *willkürlich bleibt; die zweite Bedingung (2) liefert nur die vier Fälle:*

1) Die in Fig. 14 eingetragenen Bezeichnungen beziehen sich auf spätere Entwicklungen

2) Dies ist einleuchtend, wenn zwei Seiten unseres Kreisbogendreiecks gerade sind; diese Gestalt des Dreiecks ist aber nötigenfalls durch Ausübung einer Kreisverwandtschaft stets erreichbar.

| $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ |
|---|---|---|
| 2 | 2 | $\infty$ |
| 2 | 3 | 6 |
| 2 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 3; |

*alle unendlich vielen weiteren Kombinationen* $(l_1, l_2, l_3)$ *befriedigen die dritte Bedingung (2).* Soll nämlich die erste Ungleichung (2) gelten, so muß mindestens eine der Zahlen $l$, etwa $l_1 < 3$, also $= 2$ sein. Trägt man $l_1 = 2$ ein, so folgt, daß mindestens eine der Zahlen $l_2$, $l_3$, etwa $l_2 < 4$ sein muß, usw. Das Kreisbogendreieck heiße *von der ersten, zweiten oder dritten Art,* je nachdem die erste, zweite oder dritte Bedingung (2) gilt.

I. Kreisbogendreiecke erster Art. Im Falle $(2, 2, l)$ übe man die Spiegelung $\overline{V_3}$ aus und füge das neue Dreieck dem ersten an. Es entspringt ein Kreisbogenzweieck der Winkel $\frac{\pi}{l}$, so daß die Fortsetzung des Prozesses nach Fig. 13, S. 941, zu übersehen ist. Das ganze Netz entspringt aus dieser Figur, wenn wir die sämtlichen Zweiecke durch den Symmetriekreis von $\overline{V_3}$ (Bahnkurve von $V_3$) je in zwei Dreiecke zerlegen. Das Ausgangsdreieck ist „DB" einer $\Gamma$ der Ordnung $4l$, welche *„Diedergruppe"*[1]) oder mit Rücksicht auf die elliptische Substitution $V_3$ genauer *„elliptische Diedergruppe"* heißt.

Als weiteres Beispiel betrachte man den Fall (2, 3, 5). Hier liefern 15 Dreiecke, welche wie in Fig. 15 aus einem ersten durch Spiegelung erzeugt sind, ein Kreisbogendreieck mit drei rechten Winkeln, das sich dem eben erledigten Falle $(2, 2, l)$ als niederste Kombination (2, 2, 2) einfügt. Acht Dreiecke des letzteren Typus (2, 2, 2) bedecken die $\zeta$-Ebene einfach und vollständig, so daß wir im Falle (2, 3, 5) zu einem die ganze $\zeta$-Ebene einfach bedeckenden Netze von $8 \cdot 15 = 120$ Dreiecken gelangen. Das Dreieck vom Typus (2, 3, 5) ist „DB" einer $\Gamma$ der Ordnung 120, welche *„Ikosaedergruppe"*

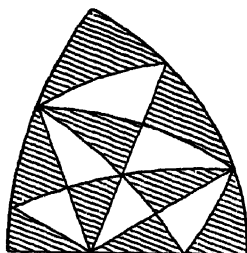



Fig. 15.

1) Gewöhnlich nennt man die in der $\overline{\Gamma}$ enthaltene umfassendste Untergruppe erster Art „Diedergruppe", so daß die $\Gamma$ die „durch Spiegelungen erweiterte Diedergruppe" ist.

heißt.[1]) Zur Erklärung des Namens projizieren wir unser Dreiecksnetz auf die $\zeta$-Kugel stereographisch, was in der Weise geschehen kann, daß wir zu 120 abwechselnd symmetrischen und kongruenten sphärischen Dreiecken gelangen (siehe Fig. 16 und vgl. übrigens „*Mod.*" 1, S. 105 ff.). Hier sind dann die von je 10 Dreiecken umlagerten Ecken des Netzes die 12 Ecken eines regulären Ikosaeders. Die 60 Drehungen dieses Ikosaeders in sich, welche die ursprüngliche (d. h. noch nicht durch Spiegelungen erweiterte) Ikosaedergruppe bilden (vgl. Klein, „*Vorlesungen über das Ikosaeder*", Leipzig, 1884), entsprechen den 60 Substitutionen der in unserer $\Gamma$ enthaltenen Untergruppe $\Gamma$ der Ordnung 60.

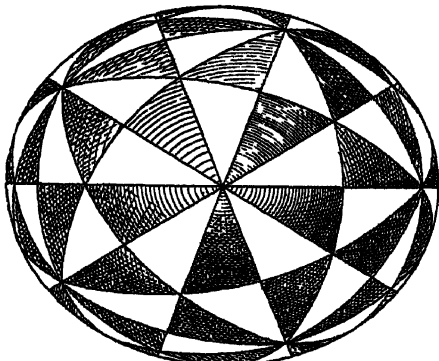



Fig 16

Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt man in den beiden anderen Fällen: *Ein Kreisbogendreieck erster Art ist der „DB" einer Gruppe $\overline{\Gamma}$,* welche aus $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ *erzeugbar ist; die vier dabei auftretenden Untergruppen $\Gamma$ liefern die vier verschiedenen Gruppen, welche man aus den Drehungen der regulären Körper (Dieder, Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder) ableiten kann (vgl. Kap. III § 11, S. 236 ff. und Klein, „Vorl. über das Ikos."). Die Ordnungen unserer Gruppen $\overline{\Gamma}$ und $\Gamma$ sind in den beiden letzten Kolumnen der folgenden Tabelle angegeben.*

| | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $\overline{\Gamma}$ | $\Gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Diedergruppe . . . . | 2 | 2 | $l$ | $4l$ | $2l$ |
| Tetraedergruppe . . | 2 | 3 | 3 | 24 | 12 |
| Oktaedergruppe . . | 2 | 3 | 4 | 48 | 24 |
| Ikosaedergruppe . | 2 | 3 | 5 | 120 | 60 |

Ohne Beweis (siehe z. B „*Aut*" 1, 164) führen wir an: *Die hier gewonnenen Gruppen und die zyklischen Gruppen von ellip-*

1) Es handelt sich hierbei wieder um die „durch Spiegelungen erweiterte Ikosaedergruppe"

*tischem Charakter sind die einzigen in der Theorie der automorphen Funktionen auftretenden Gruppen „endlicher" Ordnung.*

II. Kreisbogendreiecke zweiter Art. Wir treffen (nötigenfalls durch Übergang zu einer kreisverwandten Figur) die Anordnung, daß der gemeinsame Schnittpunkt der drei Symmetriekreise von $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ der Punkt $\zeta = \infty$ ist. Das Dreieck wird dann geradlinig, und alle durch Spiegelungen zu gewinnenden weiteren Dreiecke sind im elementaren Sinne mit dem ersten Dreiecke symmetrisch bzw. kongruent.

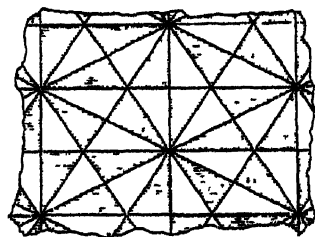



Fig. 17.

Das Ergebnis des Spiegelungsprozesses ist unmittelbar zu übersehen. Der erste Fall $(2, 2, \infty)$ kann als Grenzfall der elliptischen Diedergruppen angesehen werden und liefert die „*parabolische Diedergruppe*". In den drei übrigen Fällen haben wir endliche geradlinige Dreiecke; so liefert z. B. der Fall (2, 3, 6) das in Fig. 17 dargestellte Netz: *Jedes der Kreisbogendreiecke zweiter Art ist „DB" einer $\Gamma$ der Ordnung $\infty$, welche einen einzigen im gemeinsamen Schnittpunkte aller Symmetriekreise des Netzes gelegenen „Grenzpunkt" hat.* An Fig 17 wolle man sich noch veranschaulichen, daß die parabolischen Substitutionen in jeder dieser $\Gamma$ eine Untergruppe der in § 6 besprochenen Art liefern.

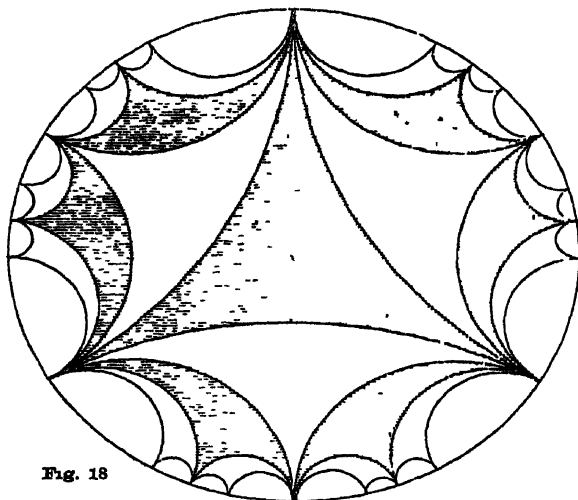



Fig. 18

III. Kreisbogendreiecke dritter Art. Man zeichne den gemeinsamen Orthogonalkreis der Symmetriekreise von $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$.

Der Orthogonalkreis wird durch jede dieser Spiegelungen in sich transformiert, und zwar geht das Innere dieses Kreises dabei stets wieder in sich über. Dasselbe wird demnach auch bei Kombinationen der $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3$ gelten. Liegt also, wie wir annehmen wollen, das gegebene Dreieck im Innern des Orthogonalkreises, so folgt: *Soweit man auch das Dreiecksnetz durch den Spiegelungsprozeß fortsetzen mag, das Netz wird niemals über den Orthogonalkreis hinauswachsen können.*

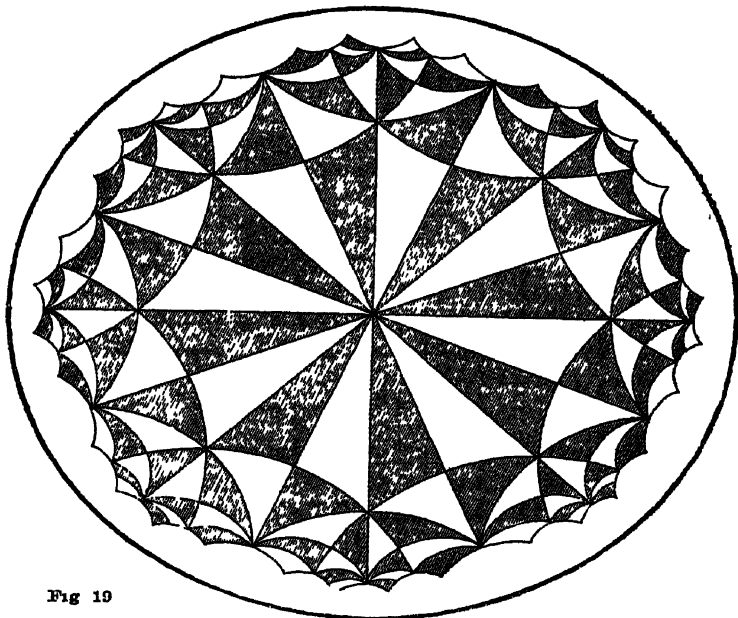



Fig 19

Die tatsächlich eintretenden Verhältnisse erläutern wir am Falle $l_1 = l_2 = l_3 = \infty$, der in Fig. 18 dargestellt ist. Beim Dreieck mit drei Winkeln 0 läuft der Orthogonalkreis durch die drei Eckpunkte. Jedes einzelne beim Fortgang der Spiegelung erhaltene Dreieck reiht sich längs seiner größten Seite an das bisher erhaltene Netz an. Die beiden anderen zunächst noch freien Seiten schließen mit dem Orthogonalkreise zwei Zweiecke ein, in welche hinein das fragliche Dreieck demnächst zu spiegeln ist. Das Netz besteht schließlich aus unendlich vielen Dreiecken, welche das ganze Innere des Orthogonalkreises einfach und lücken-

los bedecken und gegen diesen Kreis hin unendlich klein werden.

Zu demselben Ergebnis gelangt man von jedem Kreisbogendreieck dritter Art aus. Fig. 19 gibt den Fall (2, 4, 8), wo also kein Winkel gleich 0 ist und demnach keine Ecke eines Dreiecks bis an den Orthogonalkreis selbst heranragt. Auch hier bedeckt das Netz schließlich die ganze Fläche des Orthogonalkreises. Solange nämlich ein beim Spiegelungsprozeß erreichbares Dreieck von jenem Kreise noch endliche Entfernung hat, kann der Inhalt dieses Dreiecks nicht verschwinden.[1])

Ergänzt man die Symmetriekreise unseres Netzes über den Orthogonalkreis hinaus zu Vollkreisen, so entspringt draußen ein zweites Netz, welches das Spiegelbild des innern Netzes am Orthogonalkreise ist, und welches sich demnach aus dem Spiegelbilde des Ausgangsdreiecks genau so durch einen ins Unendliche fortgesetzten Spiegelungsprozeß herstellen läßt wie das innere Netz: *Das Ausgangsdreieck bildet jetzt erst mit seinem Spiegelbilde bezüglich des Orthogonalkreises einen „DB" der aus $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ zu erzeugenden $\Gamma$, deren Ordnung unendlich ist, und deren Erzeugung aus $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ der Herstellung unserer beiden Netze durch den Spiegelungsprozeß entspricht; $\Gamma$ hat unendlich viele den Orthogonalkreis bildende Grenzpunkte.*

## § 10. Die Modulgruppe und ihr „DB".

Bei der in der Theorie der elliptischen Funktionen auftretenden sogenannten „*Modulgruppe*" $\Gamma$ brauchen wir statt $\zeta$ die für diese $\Gamma$ typisch gewordene Bezeichnung $\omega$. Die Modulgruppe besteht aus allen unimodularen Substitutionen:

$$(1) \qquad \omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

*mit reellen ganzzahligen Koeffizienten.* Daß diese Substitutionen in ihrer Gesamtheit eine Gruppe bilden, geht nach dem Gesetze (6) S 916 aus der eben gegebenen *arithmetischen* Erklärung der Substitutionen hervor.[2])

---

1) Ein aus drei zum Orthogonalkreise senkrechten Kreisen eingegrenztes „unendlich kleines Dreieck" hat die Winkelsumme $\pi$, während unsere Dreiecke eine Winkelsumme $< \pi$ haben Wegen genauer Begründung der Sätze des Textes vgl. „*Mod.*" 1, S 108ff.

2) Allgemeine Entwicklungen über arithmetische Erklärung von Gruppen findet man in „*Aut*" 1, 446ff

Durch die reelle $\omega$-Achse wird die $\omega$-Ebene in zwei *„Halbebenen“* zerlegt, die wir dem Vorzeichen des Wertes der Ordinate $\eta$ in $\omega = \xi + i\eta$ entsprechend als *„positive“* und *„negative“* Halbebene unterscheiden. Aus (1) folgt:

$$\xi' + i\eta' = \frac{(\alpha\xi + \beta)(\gamma\xi + \delta) + \alpha\gamma\eta^2}{(\gamma\xi + \delta)^2 + \gamma^2\eta^2} + i\frac{\eta}{(\gamma\xi + \delta)^2 + \gamma^2\eta^2}.$$

Wegen der Realität der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ergibt sich: *Die positive $\omega$-Halbebene (und ebenso die negative) wird durch jede Substitution (1) in sich übergeführt.*

Durch $\omega' = -\bar{\omega}$ ist die Spiegelung $\overline{V_0}$ an der imaginären $\omega$-Achse dargestellt. Ist $V = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ irgend eine Substitution unserer Gruppe $\Gamma$, so gilt:

$$\overline{V_0}\, V = V'\,\overline{V_0}, \quad \text{wo} \quad V' = \begin{pmatrix}\alpha, & -\beta\\ -\gamma, & \delta\end{pmatrix} \tag{2}$$

ist und also gleichfalls in $\Gamma$ enthalten ist. Hieraus folgt nach dem Schlußsatze von § 5, S. 931, *daß das System $\Gamma\overline{V_0}$ zusammen mit $\Gamma$ eine „erweiterte Modulgruppe“:*

$$\bar{\Gamma} = \Gamma + \Gamma\overline{V_0}$$

*liefert, in welcher $\Gamma$ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2 ist.*

Unter den Substitutionen zweiter Art von $\bar{\Gamma}$ sind die mit $\delta = \alpha$:

$$\omega' = \frac{\alpha\bar{\omega} - \beta}{\gamma\bar{\omega} - \alpha}, \qquad \alpha^2 - \beta\gamma = 1 \tag{3}$$

Spiegelungen; denn man gewinnt, indem man die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \alpha$ mit dem gemeinsamen Faktor $i$ versieht, die Gestalt (2), S 927 der Spiegelungen Der Symmetriekreis von (3) hat

$$\gamma(\xi^2 + \eta^2) - 2\alpha\xi + \beta = 0 \tag{4}$$

als Gleichung; der Radius $r$ und die Mittelpunktskoordinaten $\xi_0$, $\eta_0$ dieses Kreises sind:

$$r = \left|\frac{1}{\gamma}\right|, \quad \xi_0 = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \eta_0 = 0. \tag{5}$$

Um den „DB“ der Modulgruppe zu gewinnen, gehen wir auf das Netz der Fig 18 zurück, wo das im elementaren Sinne gleichseitige Ausgangsdreieck die Ecken $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ habe. Dieses Dreieck zerlegen wir durch seine drei Höhen in sechs abwechselnd

symmetrische und kongruente kleinere Dreiecke der Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 und übertragen diese Zerlegung mittels der Spiegelungen, die zu Fig. 18 führten, auf die übrigen Dreiecke des Netzes. So entsteht Fig. 20 als Netz des zur Kombination

$$l_1 = 2, \quad l_2 = 3, \quad l_3 = \infty$$

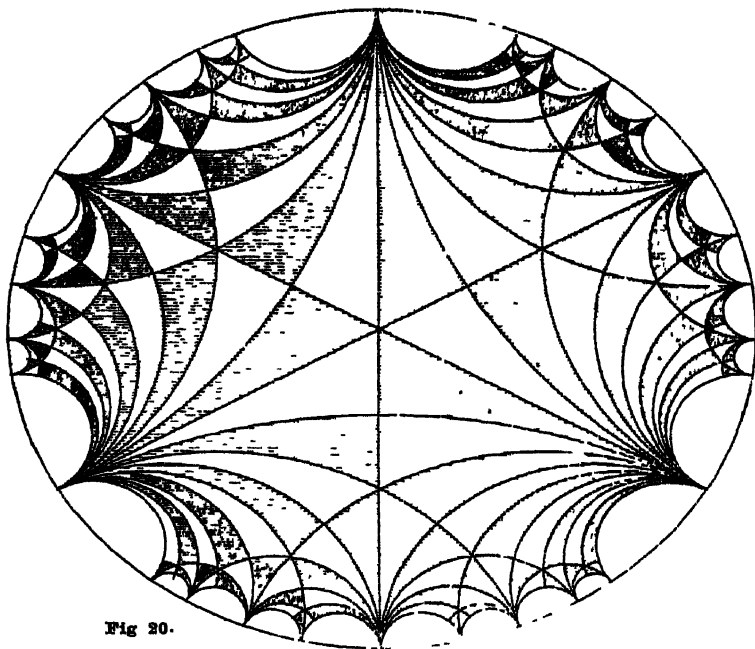



Fig 20.

gehörenden Dreiecks dritter Art. Jetzt gehen wir zu einer kreisverwandten Figur der $\omega$-Ebene durch die Transformation:

$$\omega = \mu \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2}, \qquad \mu = - \frac{\zeta_0 - \zeta_2}{\zeta_0 - \zeta_1}.$$

Die drei Punkte $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ rucken nach $\omega = -1, 0, \infty$, so daß der Orthogonalkreis zur reellen $\omega$-Achse wird. Fig. 21 gibt die neue Gestalt des Netzes, welches der positiven $\omega$-Halbebene angehore; die negative Halbebene trage ein symmetrisches Netz,

dem Äußeren des ursprünglichen Orthogonalkreises entsprechend. Als Ausgangsdreieck in der positiven $\omega$-Halbebene wählen wir dasjenige, welches sich links neben der imaginären Achse ins Unendliche zieht und also die Ecken $\omega = i$, $\varrho$ und $i\infty$ hat.[1]) Die Spiegelungen an den Seiten dieses Dreiecks sind:

$$(6) \qquad \overline{V}_1(\omega) = -\,\overline{\omega} - 1, \qquad \overline{V}_2(\omega) = -\,\overline{\omega}; \qquad \overline{V}_3(\omega) = \frac{1}{\overline{\omega}},$$

von denen die zweite die bisher mit $\overline{V}_0$ bezeichnete Substitution ist. Auch $\overline{V}_1$ und $\overline{V}_3$ gehören zu den Spiegelungen (3), *so daß die zum Netze der Fig. 21 im Sinne von § 9 gehörende Gruppe, die $\overline{\Gamma}_0$ heiße, sicher in der Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ enthalten ist.*

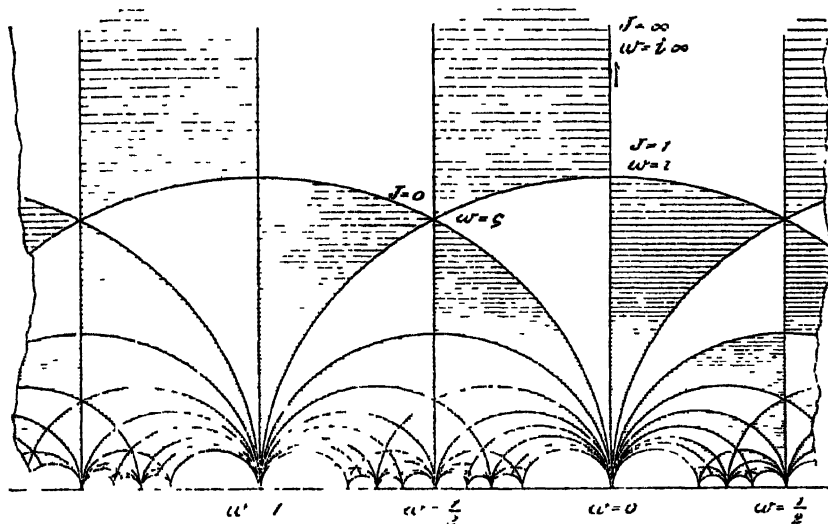



Fig 21

Die gesamten Symmetriekreise des Netzes Fig 21, den Spiegelungen von $\Gamma_0$ entsprechend, sind demnach unter den Kreisen (4) enthalten. Wir behaupten: *Durch unser Dreiecksnetz*

---

1) Hier soll $\varrho$ den Wert $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ bedeuten, die in der Figur eingetragenen Bezeichnungen $J = 0$, $J = 1$, $J = \infty$ werden später erläutert.

*werden die Symmetriekreise (4) der Modulgruppe $\bar{\bar{\Gamma}}$ auch alle geliefert.* Soll nämlich der Kreis (4) in eine Gerade ausarten, so muß $\gamma = 0$, also $\alpha = 1$ und $\beta$ eine beliebige ganze Zahl sein; die zugehörigen Geraden $2\xi = \beta$ sind im Netze der Fig. 21 enthalten. Für $\gamma = \pm 1$ bleibt $\alpha$ beliebig; also folgen Kreise des Radius 1 um die ganzzahligen Punkte $\omega = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, die gleichfalls im Netze der Fig. 21 sichtbar sind. Für $\gamma = 2$ muß $\alpha$ wegen

$$\alpha^2 - \beta\gamma = 1$$

ungerade sein; auch die Kreise des Radius $\frac{1}{2}$ um die Punkte

$$\omega = \pm \tfrac{1}{2}, \quad \pm \tfrac{3}{2}, \cdots$$

sieht man im Netze. Die weiter folgenden Kreise haben noch kleinere Radien; und da ihre Mittelpunkte sämtlich auf der reellen $\omega$-Achse liegen, so steht jedenfalls soviel fest, daß in das Innere des Ausgangsdreiecks kein Symmetriekreis (4) einzudringen vermag. Würde nun überhaupt noch ein Symmetriekreis (4), zur Spiegelung $\bar{V}$ von $\bar{\bar{\Gamma}}$ gehörig, vorkommen, der nicht schon dem Dreiecksnetz angehört, so greifen wir ein von diesem Kreise durchzogenes Dreieck auf und nennen $V$ diejenige Operation erster oder zweiter Art von $\Gamma_0$, welche das Ausgangsdreieck in dieses Dreieck überführt. Dann aber ist

$$\bar{V}' = V^{-1}\, \bar{V}\, V$$

eine in $\bar{\bar{\Gamma}}$ enthaltene Spiegelung, deren Symmetriekreis durch $V^{-1}$ aus dem von $\bar{V}$ hervorgeht und der somit durch das Ausgangsdreieck hindurchziehen würde. Da dies, wie wir sahen, ausgeschlossen ist, so trifft unsere Behauptung zu.

Weiter gilt: *Jede Substitution erster oder zweiter Art $V$ der Modulgruppe $\bar{\bar{\Gamma}}$ transformiert das Dreiecksnetz in sich.* Der Symmetriekreis (4) der Spiegelung $\bar{V}$ wird nämlich durch $V$ in den Symmetriekreis der Spiegelung $\bar{V}'' = V\, \bar{V}\, V^{-1}$ transformiert, die auch in $\bar{\bar{\Gamma}}$ enthalten ist und also einen Kreis (4) liefert.

Irgendeine Substitution erster oder zweiter Art $V$ von $\bar{\bar{\Gamma}}$ transformiert demnach das Ausgangsdreieck des Netzes entweder in sich oder in ein anderes Dreieck des Netzes. Im ersteren Falle muß wegen der Konformität der Abbildung jede der Ecken

$\omega = i$, $\varrho$ und $i\infty$ sich selbst entsprechen. Da hierbei die Reihenfolge der Ecken unverändert bleibt, so ist die Substitution $V$ von der *ersten* Art; da $V$ *drei* Fixpunkte $i, \varrho, i\infty$ hat, so ist $V$ die identische Substitution 1. Jede von 1 verschiedene Substitution von $\bar{\Gamma}$ transformiert das Ausgangsdreieck des Netzes in ein von ihm verschiedenes Dreieck desselben: *Das ausgewählte Ausgangsdreieck und sein Spiegelbild bezüglich der reellen $\omega$-Achse bilden einen „DB“ der erweiterten Modulgruppe.*

Die Erzeugenden (6) genügen als Spiegelungen den Bedingungen $\overline{V}_i^2 = 1$, so daß wir bei der Herstellung aller Substitutionen von $\bar{\Gamma}$ in Gestalt von symbolischen Produkten der Faktoren (6) auf den einzelnen Faktor stets einen der beiden anderen folgen lassen müssen. Ist die Faktorenanzahl gerade, so haben wir eine Substitution der ursprünglichen Modulgruppe $\Gamma$. Diese $\Gamma$ ist also aus den drei Substitutionen:

$$(7)\qquad \begin{gathered} S(\omega) = \overline{V}_2\,\overline{V}_1(\omega) = \omega + 1, \qquad T(\omega) = \overline{V}_3\,\overline{V}_2(\omega) = \frac{-1}{\omega}, \\ U(\omega) = \overline{V}_1\,\overline{V}_3(\omega) = \frac{\omega + 1}{-\omega} \end{gathered}$$

erzeugbar.[1]) Aus der Art, wie sich die Symmetriekreise der Spiegelungen (6) schneiden, geht nach § 8 hervor: *Die Substitution $S$ ist parabolisch mit dem Fixpunkte $\infty$, die Substitution $T$ ist elliptisch von der Periode 2 mit den Fixpunkten $\pm i$, endlich ist $U$ elliptisch von der Periode 3 mit den Fixpunkten $\varrho$ und $\bar{\varrho}$:*

$$(8)\qquad T^2 = 1, \qquad U^3 = 1.$$

Aus der Darstellung der $S, T, U$ in den Spiegelungen (6) folgt:

$$(9)\qquad UTS = 1 \quad \text{oder} \quad U = S^{-1}T,$$

so daß $U$ aus $S$ und $T$ erzeugbar ist: *Die Modulgruppe $\Gamma$ ist demnach allein aus den beiden Substitutionen:*

$$(10)\qquad S(\omega) = \omega + 1, \qquad T(\omega) = \frac{-1}{\omega}$$

*erzeugbar.*

Durch die Substitutionen erster Art der Modulgruppe geht ein schraffiertes Dreieck des Netzes Fig 21 stets wieder in ein

---

1) Mit der einzelnen Substitution gilt auch ihre inverse als gegeben.

schraffiertes, ein freies Dreieck wieder in ein freies über. Setzen wir demnach das Ausgangsdreieck jenes Netzes mit seinem Spiegelbilde an der imaginären Achse zu einem „*Doppeldreieck*" zusammen, *so wird dieses mit seinem Spiegelbild an der reellen ω-Achse zusammengenommen einen „DB" für die ursprüngliche Modulgruppe liefern.* Fig. 22 stellt diesen „DB" dar, gibt auch (mittels stärkerer Markierung) an, welche Randstücke dem „DB" zugehören sollen. Der linke geradlinige Rand geht durch $S$ in den rechten geradlinigen über; die beiden stark markierten Bogenstücke des Einheitskreises werden durch $T$ in die schwach ausgezogenen von diesem Kreise gelieferten Randstücke übergeführt.

Fig. 22.

## § 11. Allgemeines über die „DB" der Gruppen.

Folgende allgemeine Angaben über die „DB" zunächst für die Gruppen $\Gamma$ aus Substitutionen erster Art werden jetzt verständlich sein; wegen der Beweise müssen wir mehrfach auf „*Mod.*" und „*Aut.*" verweisen.

Der „DB" für eine in der Theorie der eindeutigen automorphen Funktionen auftretende $\Gamma$ aus Substitutionen erster Art besteht aus einem oder mehreren Flächenteilen der $\zeta$-Ebene, deren einzelner insoweit unbestimmt ist, *daß wir ihm ein Stück nehmen und durch ein bezüglich $\Gamma$ äquivalentes ersetzen können* (Begriff der erlaubten Abänderung, cf „*Mod.*", **1**, 280 und 313). Es ist stets erreichbar, *daß sich der gesamte Rand des „DB" aus Ketten von Kreisbogen oder Vollkreisen aufbaut.* Dies folgt aus derjenigen besonderen Gestalt der „DB", die in „*Aut*" **1**, 106 ff als „*normale*" „DB" eingeführt sind. Wir lassen die Beschränkung eintreten, *daß der Rand des „DB" aus endlich vielen Kreisbogen bzw. Vollkreisen bestehen soll.*[1])

---

1) Die Beschränkung ist wesentlich, d. h. es gibt Gruppen $\Gamma$, deren „DB" unendlich viele Kreisbogen am Rande darbieten, die durch erlaubte Änderung nicht auf endliche viele reduzierbar sind.

Der „DB" heiße 1 und gehe durch die Substitution $V_i$ von $\Gamma$ in einen Bereich über, der $V_i$ genannt werde. Die den gesamten Substitutionen $V_0 = 1, V_1, V_2, \ldots$ von $\Gamma$ zugehörigen und gleichbenannten Bereiche bedecken die $\zeta$-Ebene *bis auf die der Gruppe eigentumlichen „Grenzpunkte" überall einfach und lückenlos;* sie liefern eine zur $\Gamma$ gehörige *„regulare" Bereicheinteilung* der $\zeta$-Ebene.

Längs eines Randkreises $K$ des Bereiches 1 möge mit letzterem der Bereich $V_i$ benachbart sein. Transformieren wir diesen Bereich durch $V_i^{-1}$ zurück nach 1, so möge hierbei der Kreis $K$ in den Randkreis $K'$ von 1 übergehen. $K$ und $K'$ sind somit äquivalent, indem wir $K = V_i(K')$ finden. *Die Randkreise des „DB" sind zu Paaren äquivalent, und wir dürfen vom einzelnen Paare stets nur einen Kreis dem „DB" als zugehörig ansehen.*

Die dem „DB" zugerechneten Randkreise, deren Anzahl $n$ als endlich angenommen wurde, mogen durch die Substitutionen $V_1, V_1, \ldots, V_n$ in die äquivalenten Randkreise übergeführt werden. Dann ist der Bereich 1 rings von den Bereichen

$$V_1,\ V_1^{-1},\ V_2,\ V_2^{-1},\ldots,\ V_n,\ V_n^{-1}$$

umgeben.[1]) Entsprechend erscheint der Bereich $V_1$ rings von den Bereichen

$$V_1V_1,\ V_1V_1^{-1}=1,\quad V_1V_2,\ V_1V_2^{-1},\quad \ldots,\quad V_1V_n,\ V_1V_n^{-1}$$

umgeben. Die Fortfuhrung der Anreihung weiterer Kränze bis zur Herstellung der ganzen regulären Bereicheinteilung kommt auf die Herstellung aller Substitutionen von $\Gamma$ aus den

$$V_1,\ V_2,\ldots,\ V_n$$

hinaus: *Die $n$ Substitutionen $V_1, V_2, \ldots, V_n$, welche die Äquivalenz der Randkurven des „DB" vermitteln, sind die Erzeugenden der Gruppe $\Gamma$*

Besteht der „DB" aus mehr als einem Flachenstücke, und ist der Randkreis $K$ eines ersten Stückes mit dem Randkreise $K' = V(K)$ eines davon verschiedenen zweiten Stuckes äquivalent, so wird dies zweite Stück durch $V^{-1}$ in ein langs $K$ mit dem ersten Stucke benachbartes transformiert. Wir durfen das

1) Dies sind entweder $2n$ oder weniger als $2n$ verschiedene Bereiche. Ist nämlich etwa $V_1$ eine elliptische Substitution der Periode 2 (vgl Erzeugende $T$ der Modulgruppe), so ist der Bereich $V_1^{-1}$ mit dem Bereiche $V_1$ identisch.

so erhaltene Stück an Stelle des zweiten dem „DB“ zuerteilen. Indem wir einen derartigen Ersatz nötigenfalls noch öfter ausüben, folgt der Satz: *Man darf den „DB“ so gewählt annehmen, daß die Randkreise des einzelnen Flächenstückes stets Randkreisen des gleichen Stückes zugeordnet sind.*

Ist der „DB“ nicht von Vollskreisen allein begrenzt, so treten am Rande des „DB“ Ecken auf. Man hat zwei Arten solcher Ecken zu unterscheiden. Sind erstlich die beiden an die Ecke anstoßenden Randkreise durch die Erzeugende $V$ einander zugeordnet, so wird der Eckpunkt selbst durch $V$ in sich transformiert, ist also Fixpunkt von $V$. Eine solche Ecke soll (im Gegensatz zu einer gleich zu besprechenden anderen Eckenart) als eine *„feste Ecke“* des „DB“ bezeichnet werden. Ein Beispiel sei die bei $\omega = i\infty$ gelegene Ecke des „DB“ der Modulgruppe, die Fixpunkt der Erzeugenden $S$ war (man stelle sich den „DB“ auf der „$\omega$-Kugel“ gelegen vor). Bereits bei den zyklischen Gruppen mit hyperbolischer oder loxodromischer Erzeugender $V$ wurde S. 934 ff. der „DB“ so gewählt, daß er *nicht* an einen der Fixpunkte von $V$ heranragte. Nach *„Aut.“* **1**, 142 ff. kann man den „DB“ stets so wählen, daß er *nicht* an den Fixpunkt einer hyperbolischen oder loxodromischen Substitution der Gruppe heranragt: *Die festen Ecken des „DB“ sind dann Fixpunkte elliptischer oder parabolischer Erzeugender; die beiden benachbarten Randkreise bilden einen Winkel $\frac{2\pi}{l}$, wo $l$ eine ganze Zahl $\geqq 2$ bedeutet, den Wert $l = \infty$ (im parabolischen Falle) eingeschlossen* (vgl. S. 935 ff.). Die übrigen Ecken des „DB“ heißen *„bewegliche Ecken“*. Zu ihrer Erläuterung dienen die Ecken des in Fig. 6, S. 932, dargestellten „DB“ der a. a. O. besprochenen Gruppe $\Gamma$. Wenn wir die Ecke bei $\zeta = 0$ nach einem beliebigen Punkte $\zeta_0$ verschieben und die anderen drei Ecken entsprechend nach

$$\zeta_0 + \omega_1, \quad \zeta_0 + \omega_2, \quad \zeta_0 + \omega_1 + \omega_2$$

wandern lassen, so bleibt das Parallelogramm hierbei ein „DB“ der $\Gamma$. Beschreiben wir im regulären Bereichnetz der Fig. 6 einen kleinen Kreis um den Eckpunkt bei $\zeta = 0$, so wird dieser Kreis neben dem Bereiche 1 noch die drei Bereiche

$$V_2^{-1}, \; V_2^{-1} \cdot V_1^{-1}, \; V_1^{-1}$$

durchziehen. Werfen wir die drei bezüglichen Bogen mittels der Substitutionen $V_2$, $V_1 \cdot V_2$, $V_1$ in den „DB“ zurück, so erhalten wir hierbei vier die Ecken des „DB“ umkreisende Bogen, welche vermöge der Zuordnung der Seiten des „DB“ zu einem

Zyklus zusammengeschlossen sind. Der vorstehenden Überlegung kommt allgemeine Bedeutung zu: *Die beweglichen Ecken des „DB" erscheinen vermöge der Zuordnung der Randkreise des „DB" in Zyklen angeordnet, wobei die Winkelsumme des einzelnen Eckenzyklus stets gleich* $2\pi$ *ist.*

Ist $\bar{\Gamma}$ eine der in § 5 besprochenen Gruppen aus Substitutionen der ersten und der zweiten Art, so bestimmen wir zuerst für die in ihr enthaltene ausgezeichnete Untergruppe $\Gamma$ des Index 2 die reguläre Einteilung der $\zeta$-Ebene in Bereiche:

$$1,\ V_1,\ V_2,\ \ldots$$

den vorstehenden Sätzen entsprechend. Die mit irgendeinem Punkte $\zeta$ von 1 bezüglich $\Gamma$ äquivalenten Punkte:

$$\bar{V}_0(\zeta),\ V_1\bar{V}_0(\zeta),\ V_2\bar{V}_0(\zeta),\ \ldots$$

verteilen sich dann auf die Bereiche der regulären Einteilung so, daß in jedem Bereiche, also insbesondere in 1, sich einer dieser Punkte findet: *Die Punkte des Bereiches 1 sind bezüglich* $\bar{\Gamma}$ *zu Paaren äquivalent; dieser Bereich wird sich daher in zwei bezüglich* $\Gamma$ *äquivalente Teilbereiche zerlegen, von denen ein einzelner einen „DB" der Gruppe* $\Gamma$ *liefert* (vgl. die Zerlegung der Doppeldreiecke der Fig. 22), S. 954, in je zwei „Elementardreiecke" durch die imaginäre $\omega$-Achse).

Endlich mögen noch einige Mitteilungen über die Natur der Grenzpunkte unserer Gruppen folgen. Wir sehen ab von den Gruppen endlicher Ordnung (vgl. S 944 ff.), bei denen überhaupt keine Grenzpunkte vorliegen, von den Gruppen mit nur einem Grenzpunkte (vgl. S. 932 und S. 946), sowie von gewissen Gruppen mit zwei Grenzpunkten, die durch eine bestimmte logarithmische Transformation in Gruppen mit einem Grenzpunkte umgewandelt werden (vgl *„Aut."* **1**, 234 ff.) Alle ubrigen Gruppen haben unendlich viele Grenzpunkte, und zwar sind dabei folgende Fälle zu unterscheiden:

*I. Die Grenzpunkte bilden ein System diskreter Punkte, die entweder:*

*1. in der* $\zeta$*-Ebene nach einem nicht unmittelbar übersehbaren Gesetze zerstreut liegen, oder*

*2 samtlich auf einem bestimmten Kreise, dem „Hauptkreise", liegen.*

*In beiden Fällen liefert die Bereicheinteilung der* $\zeta$*-Ebene ein einziges zusammenhangendes Netz. Die unter 2 gemeinten Gruppen heißen „Hauptkreisgruppen".*

*II. Die Grenzpunkte bilden eine geschlossene, sich nicht selbst überkreuzende Kurve, die entweder:*

*1. nicht-analytisch ist, oder*

*2. einen Kreis, den sogenannten „Grenzkreis", darstellt.*

*Die Bereicheinteilung zerfällt in zwei durch jene Kurve getrennte Netze. Die unter 2. genannten Gruppen heißen „Grenzkreisgruppen".*

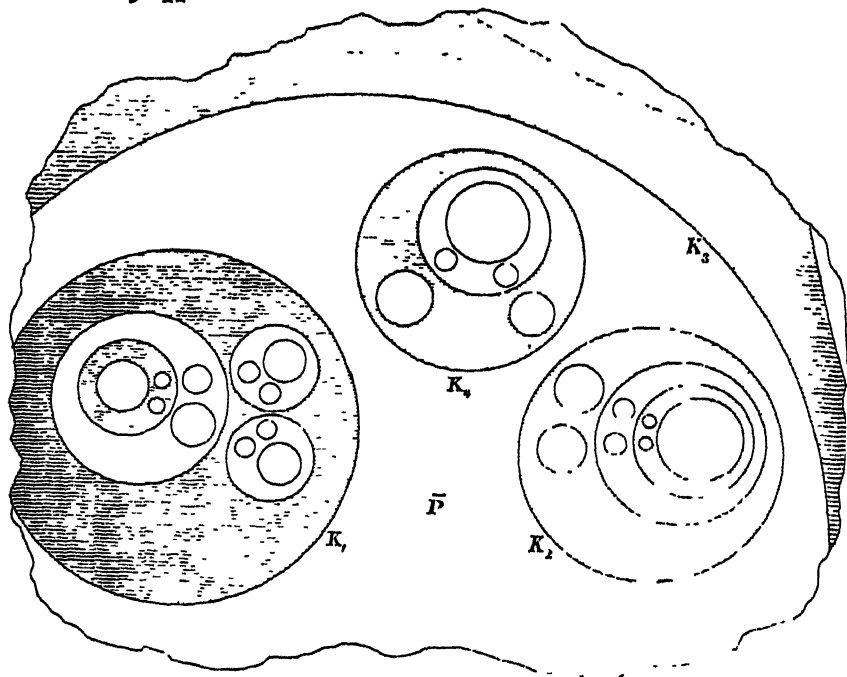



Fig 23

*III. Die Grenzpunkte bilden unendlich viele geschlossene, sich nicht überkreuzende Kurven, die entweder nicht-analytisch sind oder Kreise darstellen, auch teils von der einen, teils von der anderen Art sein können.*

Das einfachste Beispiel zur Erläuterung aller dieser Fälle wird von der aus vier Spiegelungen $\overline{V_1}$, $\overline{V_2}$, $\overline{V_3}$, $V_4$ erzeugbaren Gruppe geliefert. Die Symmetriekreise $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ mögen zunächst wie in Fig. 23 voneinander getrennt verlaufen und den

in der Figur mit $\overline{P}$ bezeichneten „DB“ eingrenzen. Durch Spiegelung reihen wir an den „DB“ vier äquivalente Bereiche, die in der Figur schraffiert sind. In jedem dieser Bereiche bleiben noch drei Kreise offen, in die man demnächst hineinzuspiegeln hat usw. Die Anzahl der offen bleibenden Kreise wächst hierbei beständig, während diese Kreise selbst immer kleiner werden. In jedem liegen unendlich viele Grenzpunkte der Gruppe. Es liegt der Fall I, 1 vor. Haben die vier Kreise $K_1, K_2, K_3, K_4$ einen gemeinsamen Orthogonalkreis $K_0$, so werden auch alle weiteren beim Spiegelungsprozeß eintretenden Kreise zu $K_0$ orthogonal verlaufen. Jetzt liegen alle Grenzpunkte auf $K_0$, d. h. wir haben den Fall I, 2.

Beispiele für die übrigen Fälle erhält man, wenn man Berührungen der vier Kreise $K_1, \ldots, K_4$ zuläßt. Bilden diese Kreise hierbei einen Zyklus, indem jeder mit dem folgenden und der letzte mit dem ersten zur Berührung kommt, so gelangen wir zu den Fällen II, 2 und II, 1, je nachdem ein Orthogonalkreis vorliegt oder nicht. Vgl. wegen des ersteren Falles Fig. 20, S. 950, wegen des letzteren aber Fig. 145 in *„Aut.“* **1**, 418. Kommt außerdem noch $K_1$ mit $K_3$ zur Berührung, so erhalten wir unendlich viele Grenzkreise, wie Fig. 148 in *„Aut.“* **1**, 429 zeigt. In Fig. 156, ebenda S. 440, hat man ein Beispiel für unendlich viele Grenzkurven, die teils nicht-analytisch sind, teils Kreise darstellen [1])

## § 12. Erklärung und Existenzbeweis der automorphen Funktionen.

Besteht der „DB“ von $\Gamma$ aus mehreren Teilen, so konnten wir annehmen, daß die Randkreise eines einzelnen Teiles stets auf Randkreise des gleichen Teiles bezogen waren. Einen einzelnen solchen Teil wollen wir alsdann einen *„Fundamentalbereich“*, abgekürzt „FB“, nennen (cf. Klein, *Math. Ann.* **14**, 133). Die Reproduktion desselben auf Grund der Zuordnung der Randkreise liefert ein *zusammenhangendes regulares Netz von Bereichen*, welches $N$ heißen mag. Dies Netz bedeckt bis auf die Grenzpunkte die ganze $\zeta$-Ebene, falls der „DB“ nur aus diesem Stücke „FB“ besteht; andernfalls hat $N$ eine Grenzkurve.

---

1) Vorstehend konnten nur die ersten Grundlagen der Theorie der „DB“ entwickelt werden. Eine ausführliche Theorie der „DB“ fur die Hauptkreis- und Grenzkreisgruppen, in der die Begriffe der *normalen,* der *naturlichen* und der *kanonischen* „DB“ grundlegend sind, findet man in *„Aut“*, **1**, 210ff und **2**, 286ff.

Es werde nun im „FB“ eine im Sinne von § 1 zur Gruppe $\Gamma$ gehörende eindeutige automorphe Funktion $\varphi(\zeta)$ betrachtet. Da dieselbe analytisch sein soll, so werden wir in der Umgebung einer Stelle $\zeta_0$ des „FB“ eine innerhalb eines gewissen, nicht verschwindenden Kreises konvergente Entwicklung:

$$
(1) \qquad \varphi(\zeta) = t^m(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)
$$

fordern, wo die Entwicklungsgröße $t = \zeta - \zeta_0$ ist, $m$ eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 bedeutet und der Anfangskoeffizient $a_0$ nicht verschwindet. Sollte $\zeta_0$ zufällig die Stelle $\infty$ sein, so hat man in üblicher Weise (vgl. Kap. XV, S. 721) unter $t$ die Entwicklungsgröße $\frac{1}{\zeta}$ zu verstehen.

Diese Festsetzung erfordert eine Ergänzung, falls $\zeta_0$ eine elliptische Ecke $\left(\text{des Winkels } \frac{2\pi}{l}\right)$ oder eine parabolische Ecke des „FB“ ist. Da $\varphi(\zeta)$ bei der zugehörigen elliptischen oder parabolischen Substitution unverändert bleibt, so ergibt sich, wenn $\zeta_1$ der zweite elliptische Fixpunkt ist, aus den Normalformen (12) und (10) § 3 der Substitutionen, daß eine Entwicklung (1) nach:

$$
(2) \qquad t = \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_1}\right)^l \quad \text{bzw.} \quad t = e^{\frac{2i\pi}{\gamma} \cdot \frac{1}{\zeta - \zeta_0}}
$$

zu fordern ist. Schneidet man längs einer Bahnkurve der elliptischen bzw. parabolischen Substitution vom „FB“ an der fraglichen Ecke ein kleines Segment ab, so wird dies (vgl. § 3) auf einen Kreis der $t$-Ebene um den Nullpunkt $t = 0$ durch die Transformation (2) übertragen.

Wir nehmen an, daß eine Entwicklung (1) für $\varphi(\zeta)$ in der richtigen Entwicklungsgröße ohne Ausnahme an jeder Stelle $\zeta_0$ des „FB“ gelten soll. Man kann dies auch dahin ausdrücken, *daß $\varphi(\zeta)$ im „FB“ frei von wesentlich singulären Stellen sein soll* (vgl. Kap. XV, S. 721) Ist $m$ nicht gleich 0, *so liegt an der Stelle $\zeta_0$ ein Nullpunkt $m^{\text{ter}}$ Ordnung bzw ein Pol $(-m)^{\text{ter}}$ Ordnung, je nachdem $m > 0$ oder $m > 0$ ist.*

Den Existenzbeweis der Funktionen $\varphi(\zeta)$ führt Klein (vgl. *Math. Ann.*, **21**, 141) mittels der alternierenden Methoden von Schwarz und Neumann.[1]) Setzen wir $\zeta = \xi + i\eta$, so ist das

---

1) Ausführlich dargestellt im „*Mod*“ 1, 508 ff und „*Aut.*“ 2, 8 ff

erste Ziel die Konstruktion eines im „FB" eindeutigen „*logarithmischen Potentials*" $u(\xi, \eta)$, welches nur an einer Stelle $\zeta_0$ des „FB" unendlich wie der reelle Bestandteil von $t^{-1}$ wird, und das, über den Rand des „FB" fortgesetzt, in äquivalenten Punkten stets gleiche Werte hat.

Für Kreisscheiben, die man im „FB" zeichnen mag, kann man stets solche reelle Funktionen $u(\xi, \eta)$ bilden, welche längs der Peripherie gegebene Werte annehmen (Randwertaufgabe). Die entsprechende Bildung von Funktionen $u(\xi, \eta)$ für Bereiche, die aus der Verschmelzung von Kreisscheiben entstehen, gelingt dann durch das alternierende Verfahren. Schließlich wird man

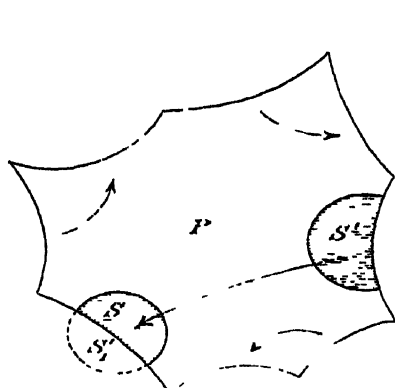
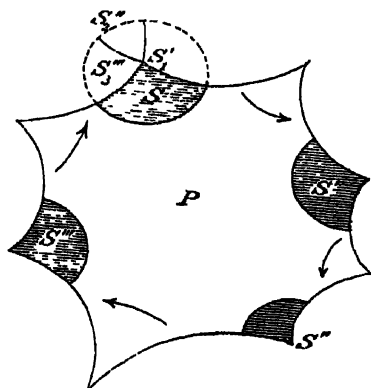



Fig. 24 Fig. 25

den ganzen „FB" dachziegelartig mit Kreisscheiben abdecken und hat nur, damit nicht am Ende eine Konstante $u(\xi, \eta)$ als Ergebnis erscheint, in einem der Kreise bei $\zeta_0$ einen Pol bezeichneter Art vorzuschreiben.

Man wolle sich hierbei noch die Rolle derjenigen Kreisscheiben veranschaulichen, welche am Rande des „FB" liegen. Bei einer festen Ecke ist ein Kreis der $t$-Ebene um $t = 0$ zu benutzen, der ein Segment bezeichneter Art am „FB" liefert. Bei Fortsetzung über die in der Ecke zusammenstoßenden Ränder dieses Segmentes reproduziert sich dann in der Tat $u(\xi, \eta)$ in äquivalenten Punkten. Die Rolle der übrigen am Rande gelegenen Scheiben ist durch Fig. 24 und Fig. 25 erläutert. Z. B. ist in Fig. 24 der äußere Teil $S_1'$ der links gezeichneten Kreisscheibe auf das äquivalente Stück $S'$ des „FB" zu übertragen

Wir erzielen hierdurch nicht nur, daß in zugeordneten Randpunkten des „FB“ die Funktion $u(\xi, \eta)$ gleichwertig wird, sondern daß sie überhaupt, über den Rand des „FB“ analytisch fortgesetzt, in äquivalenten Punkten stets wieder denselben Wert annimmt.

Das zu $u(\xi, \eta)$ konjugierte Potential ist:

$$v(\xi, \eta) = \int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta} d\xi\right), \tag{3}$$

wo die untere Grenze als fest und die obere als variabel zu denken ist und die Integrationsbahn gänzlich im Innern des Netzes $N$ verlaufen soll. Für das Differential:

$$dv = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta} d\xi$$

folgt aus der Konformität der Abbildung der verschiedenen Bereiche des Netzes $N$ aufeinander und der Gleichheit von $u(\xi, \eta)$ in äquivalenten Stellen, daß auch $dv$ eindeutig und in äquivalenten Punkten gleich ist. Daraus folgt aber für das in (3) rechts stehende Integral nur erst, daß sich der Wert desselben, ausgedehnt von einer Stelle $\zeta$ bis zu dieser Stelle zurück oder bis zu einer äquivalenten Stelle, *bis auf eine additive Konstante* reproduziert.

Demnach wird die komplexe Funktion:

$$Z(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta) \tag{4}$$

im Netze $N$ dasselbe Verhalten darbieten wie ein *Elementarintegral zweiter Gattung* auf einer Riemannschen Fläche (vgl. Kap. XVII, § 5 u. 10). $Z(\zeta)$ hat im „FB“ bei $\zeta_0$ einen Pol erster Ordnung, ist im übrigen stetig im „FB“ und reproduziert sich abgesehen von einer additiven, rein imaginären Konstanten, falls man das Argument von einer Stelle $\zeta$ im Netze $N$ zu diesem $\zeta$ zurück oder zu einer äquivalenten Stelle wandern läßt.

Genau nach demselben Prinzip, wie man die eindeutigen Funktionen der Riemannschen Fläche aus den Integralen zweiter Gattung aufbaut (vgl. *„Aut.“* 2, 13 ff.), können wir hier automorphe Funktionen unserer Art in der Gestalt:

$$\varphi(\zeta) = c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \cdots + c_\mu Z_\mu \tag{5}$$

aus unseren Funktionen (4), welche wir etwa für $\mu$ im „FB" ausgewählte Pole $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$ hergestellt denken, aufbauen. Man muß nur die Anzahl $\mu$ der Pole erster Ordnung im „FB" groß genug wählen, damit sich mindestens ein System von Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ derart bestimmen läßt, daß die bei den Umläufen von $\zeta$ und den Wegen zu den äquivalenten Stellen für die in (5) rechts stehende Summe eintretenden additiven Konstanten eben durchweg verschwinden.

Nachdem wir so die *Existenz der automorphen Funktionen* $\varphi(\zeta)$ *für die vorgelegte* $\Gamma$ *bzw. den „FB"* erkannt haben, müssen wir noch auf die Bedeutung der Grenzpunkte des Netzes für die Funktionen $\varphi(\zeta)$ hinweisen. Gegen einen Grenzpunkt hin werden die Bereiche des Netzes unendlich klein. Beim Prozeß der analytischen Fortsetzung von $\varphi(\zeta)$ (vgl. Kap. XV, § 7) wird demnach niemals ein Grenzpunkt in einen Konvergenzkreis hineingezogen werden können. Aus dem Unendlichkleinwerden der Bereiche folgt sogar: *Jeder Grenzpunkt des Netzes N ist ein wesentlich singulärer Punkt der Funktion* $\varphi(\zeta)$, *eine Grenzkurve stellt demnach eine ununterbrochene Folge solcher Punkte dar und heißt dieserhalb eine „natürliche Grenze" der Funktion, über welche die analytische Fortsetzung der Funktion nicht vollzogen werden kann* (vgl. Kap. XV, § 9).

## § 13. Zusammenhang aller Funktionen $\varphi(\zeta)$ desselben „FB".

Die eben konstruierte Funktion $\varphi(\zeta)$ hat im „FB" $\mu$ einfache Pole (Pole erster Ordnung), welche an den im Innern des „FB" gewählten Stellen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$ liegen. Es gilt der Satz: *Die Gesamtzahl der Nullpunkte von* $\varphi(\zeta)$ *im „FB" ist auch gerade gleich* $\mu$, *wobei Nullpunkte höherer als erster Ordnung ihrer Multiplizität entsprechend in Anrechnung zu bringen sind.*

Zum Beweise dieses Satzes verwandle man den „FB", falls er einen mehrfach zusammenhängenden Bereich darstellt (vgl. Fig. 23, S. 958), durch Anlage geeigneter Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden Bereich. Diesen letzteren umlaufen wir dann rings; jedoch wollen wir, sobald wir uns einer festen Ecke annähern, vor

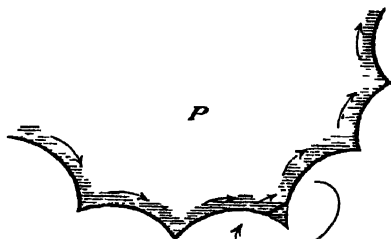



Fig. 26

Erreichen derselben längs einer zugehörigen Bahnkurve durch das Innere des „FB" sogleich nach dem zugeordneten Randkreise hinübergehen (vgl. Fig. 26). Wir wählen diese Bahnkurve so nahe an der Ecke, daß weder auf ihr noch im abgetrennten Segmente, nötigenfalls den Eckpunkt selbst ausgenommen, ein Nullpunkt von $\varphi(\zeta)$ vorkommt. Auch dürfen wir die Querschnitte sowie die Gestalt des „FB" (vgl. Prinzip der erlaubten Abänderung von S. 954) so gewählt denken, daß die beschriebene Bahn auch übrigens nirgends durch einen Nullpunkt hindurchläuft. Auch die $\mu$ Pole denken wir im Innern des umlaufenen Bereichs gelegen.

Ist nun $\nu$ die Gesamtzahl der Nullpunkte innerhalb dieses Bereiches, so gilt (vgl. Kap. XV, § 6, S. 724):

$$(1) \qquad \nu - \mu = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{d\varphi(\zeta)}{\varphi(\zeta)} = \frac{1}{2i\pi}\int d\log\varphi(\zeta),$$

wo das Integral in der Pfeilrichtung der Fig. 26 über die beschriebene Bahn zu erstrecken ist Aber hierbei heben sich diejenigen Teilintegrale auf, welche sich auf einen einzelnen Querschnitt beziehen, der in der Tat zweimal in entgegengesetzten Richtungen zu beschreiben ist. Es heben sich aus demselben Grunde je zwei solche Teilintegrale auf, welche zueinander zugeordneten Randkreisen gehören. Somit restieren nur die Integrale längs der Bahnkurven an den festen Ecken. Hier aber rechnet man leicht durch Rückgang auf die zugehörige, in (2) S. 960 eingeführte Variabele $t$ aus, daß das Teilintegral der einzelnen Bahnkurve:

$$\frac{1}{2i\pi}\int d\log\varphi(\zeta) = -m$$

wird, wenn $m$ die Ordnung des in der Ecke gelegenen Nullpunktes ist. Liegen demnach in den festen Ecken insgesamt $\nu'$ Nullpunkte, so folgt aus (1):

$$\nu - \mu = -\nu' \quad \text{und also} \quad \nu + \nu' = \mu.$$

Die Gesamtanzahl $\nu + \nu'$ der Nullpunkte im „FB" ist also tatsächlich gleich $\mu$.

Ist nun $z_0$ irgendein komplexer Wert, so wende man den bewiesenen Satz auf die automorphe Funktion $\varphi(\zeta) - z_0$ an. Es ergibt sich: *Die Funktion $\varphi(\zeta)$ nimmt jeden beliebig vor-*

*geschriebenen komplexen Wert* $z_0$ *an genau* $\mu$ *Stellen des „FB" an, die natürlich nicht immer alle getrennt zu liegen brauchen;* $\varphi(\zeta)$ *soll dieserhalb* $\mu$*-wertig heißen.*

Man überlege daraufhin, welches konforme Abbild durch unsere Funktion $z = \varphi(\zeta)$ vom „FB" auf die $z$-Ebene entworfen wird. Dieses Abbild ist geschlossen und wird die $z$-Ebene allenthalben $\mu$-fach überlagern: *Mittels der* $\mu$*-wertigen automorphen Funktion* $z = \varphi(\zeta)$ *wird der „FB" auf eine geschlossene* $\mu$*-blättrige Riemannsche Fläche*[1]) *über der* $z$*-Ebene abgebildet.* Diese Fläche werde durch $F$ bezeichnet. Die Konformität der Abbildung des „FB" und damit des vom Netze $N$ bedeckten Teiles der $\zeta$-Ebene erleidet Einbuße erstens in den festen Ecken des „FB". An der einzelnen solchen Ecke wird ein Segment des „FB" auf die volle Umgebung des Bildpunktes in der $z$-Ebene übertragen (vgl (1) und (2) § 12). Zweitens wird die Konformität in den Verzweigungspunkten der Fläche $F$ unterbrochen. Liefert $\zeta_0$ den Bildpunkt $z_0$, so liegt hier ein $m$-blättriger Verzweigungspunkt, wenn in der zugehörigen Entwicklung:

$$z - z_0 = t^m(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)$$

$m > 1$ ist.

Irgendeine andere automorphe Funktion des „FB" liefert, auf die Fläche $F$ übertragen, eine daselbst eindeutige Funktion von $z$ ohne wesentlich singuläre Punkte, also eine zur Fläche gehörende algebraische Funktion von $z$ Umgekehrt liefert jede solche Funktion in Abhängigkeit von $\zeta$ eine automorphe Funktion unseres „FB". Wir haben also folgenden grundlegenden Satz: *Die zum „FB" gehörenden automorphen Funktionen werden in ihrer Gesamtheit geliefert von allen zur Riemannschen Fläche F gehörenden, einen Funktionenkörper bildenden algebraischen Funktionen* (vgl. Kap XVII, § 3).

Die Sätze über algebraische Funktionen übertragen sich hiernach auf die Funktionen $\varphi(\zeta)$ unseres „FB". Ist die Fläche $F$ eine $(2p+1)$-fach zusammenhängende (vgl Kap. XVII, § 2), so heißt $p$ das *„Geschlecht"* derselben; *wir nennen* $p$ *auch das Geschlecht des „FB".* Die Einteilung der „FB" *nach dem Geschlechte* $p$ und, wie wir gleich hinzusetzen, nach der *Anzahl* $n$ *der festen Ecken,* ist für alle weiteren Ausführungen grundlegend

Ist $p = 0$, so gibt es auf $F$ „einwertige" Funktionen Eine einzelne unter ihnen liefere die Funktion $\varphi(\zeta)$, welche wir

1) Vgl Kap XV, § 9 und XVII, § 2.

als eine *„Hauptfunktion" des „FB" vom Geschlechte $p = 0$* bezeichnen. Mit $\varphi(\zeta)$ ist jede Funktion:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{a\varphi(\zeta) + b}{c\varphi(\zeta) + d}$$

eine Hauptfunktion, und umgekehrt ist jede solche Funktion durch $\varphi(\zeta)$ in vorstehender Gestalt darstellbar. Wegen der Verhältnisse $a : b : c : d$ gibt es $\infty^3$ Hauptfunktionen, aus denen wir eine einzelne dadurch herausgreifen können, *daß wir für irgend drei Stellen des „FB" drei verschiedene Werte der Hauptfunktion willkürlich vorschreiben.* Der in der positiven $\omega$-Halbebene gelegene „FB" der Modulgruppe (vgl. Fig. 22, S. 954) hat $p = 0$. Eine Hauptfunktion kann man dadurch fixieren, daß man für sie in den Eckpunkten $\varrho$, $i$ und $i\infty$ des „FB" etwa die Werte $0, 1, \infty$ vorschreibt. Wir gewinnen so die Funktion, welche von Klein (vgl. *Math. Ann.*, **14**, 113) mit $J(\omega)$ bezeichnet wurde, und welche mit der von Dedekind (vgl. *J. f. Math.*, **83**, 265) als Valenz bezeichneten Funktion identisch ist. Die Bedeutung der Hauptfunktion $\varphi_1(\zeta)$ gründet sich auf den Satz: *Jede zum „FB" gehörende automorphe Funktion $\varphi(\zeta)$ ist in einer Hauptfunktion $\varphi_1(\zeta)$ rational darstellbar:*

$$\varphi(\zeta) = R(\varphi_1(\zeta)), \tag{2}$$

*und umgekehrt liefert jede solche rationale Funktion eine automorphe Funktion des „FB".*

Ist $p = 1$ oder ist die Fläche $F$ hyperelliptisch, so gibt es „zweiwertige" Funktionen. Ist $\varphi_1(\zeta)$ eine solche, so wird der „FB" durch $z = \varphi_1(\zeta)$ auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit $(2p + 2)$, etwa bei $z = v_1, v_2, \ldots, v_{2p+2}$ gelegenen Verzweigungspunkten abgebildet. Hier ist dann

$$\varphi_2(\zeta) = \sqrt{(z - v_1)(z - v_2) \cdots (z - v_{2p+2})} \tag{3}$$

eine weitere Funktion des „FB", und es gilt der Satz: *Die Gesamtheit der Funktionen $\varphi(\zeta)$ des „FB" wird von allen rationalen Funktionen:*

$$\varphi(\zeta) = R(\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)) \tag{4}$$

*geliefert.*

Allgemein gilt folgendes: *Ist $\varphi_1(\zeta)$ eine $\mu_1$-wertige, $\varphi_2(\zeta)$ eine $\mu_2$-wertige Funktion des „FB", so besteht zwischen ihnen eine algebraische Gleichung:*

$$G(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \tag{5}$$

*vom Grade $\mu_2$ in $\varphi_1$ und vom Grade $\mu_1$ in $\varphi_2$; ist diese Gleichung irreduzibel, so werden die gesamten $\varphi(\zeta)$ des „FB“ gerade von allen rationalen Funktionen:*

$$\varphi(\zeta) = R(\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)) \tag{6}$$

*geliefert.*

Beispiele für $p = 1$ liefern die zyklischen Gruppen hyperbolischer und loxodromischer Art, desgleichen die in § 6 besprochene Gruppe. Beispiele zum hyperelliptischen Falle des Geschlechtes $p$ erhält man von jenen durch $(p+1)$ Spiegelungen erzeugbaren Hauptkreisgruppen, bei denen die $(p+1)$ Symmetriekreise der Erzeugenden getrennt verlaufen (vgl. S. 958).

## § 14. Eindeutigkeitssätze.

Setzten wir $z = \varphi_1(\zeta)$ und $w = \varphi_2(\zeta)$, und denken wir wie soeben die Riemannsche Fläche $F$ über der $z$-Ebene, so geht aus § 13 der Satz hervor, *daß alle zu dieser Fläche $F$ gehörenden algebraischen Funktionen $R(w, z)$ von $z$ eindeutige Funktionen von $\zeta$ werden.*

Es ist dies nur ein Speziellfall eines allgemeinen Satzes, bei dem wir jedoch der Einfachheit halber die Voraussetzung machen wollen, *daß das Netz $N$ eine Grenzkurve besitzt (Fälle II, 1 und II, 2 der Einteilung in § 11) und demgemäß einen einfach zusammenhangenden Bereich der $\zeta$-Ebene bedeckt.* Sei jetzt:

$$\int R(w, z)\, dz \tag{1}$$

ein zum algebraischen Gebilde gehörendes Integral *erster* oder *zweiter* Gattung (vgl. Kap XVII, § 5), so wird sich dasselbe bei einem Umlauf auf der Fläche $F$ von einem Anfangspunkte $z_0$ bis zu diesem Punkte zurück nur erst bis auf eine Periode reproduzieren, sofern dieser Umlauf ein eigentlicher Periodenweg ist. Läßt sich der Umlauf aber auf der Fläche stetig auf einen Punkt zusammenziehen, so kehrt das Integral stets zum Anfangswerte zurück

Lassen wir die Stelle $z_0$ von $F$ dem Punkte $\zeta_0$ in $N$ entsprechen, so überträgt sich der beschriebene Umlauf auf einen in $N$ verlaufenden Weg von $\zeta_0$ zu einem äquivalenten Punkte, den Punkt $\zeta_0$ eingeschlossen. Endet er aber wieder im Anfangspunkte, so läßt er sich im Netze $N$ (wegen des einfachen

Zusammenhanges) auf einen Punkt zusammenziehen, und dasselbe gilt dann auf der Fläche (vgl. die ausführlichere Darlegung in „*Aut.*", 2, 40ff.). Sehen wir somit das Integral (1) als Funktion von $\zeta$ an, so wird diese bei Fortsetzung über einen im Netze $N$ geschlossenen Weg zum Anfangswerte zurückkehren: *Die Integrale erster und zweiter Gattung* (1) *werden in* $\zeta$ *„eindeutige" Funktionen, die wie die Funktionen* $\varphi(\zeta)$ *die Grenzkurve des Netzes* $N$ *zur natürlichen Grenze haben.*

Auch auf die Integrale *dritter* Gattung (1) kann man diesen Satz übertragen, *falls der „FB" parabolische Ecken hat und die sämtlichen logarithmischen Unstetigkeitspunkte des Integrals in solche Ecken fallen.* Hier werden nämlich offenbar die sämtlichen Umläufe, welche man durch einmalige oder beliebig oft wiederholte Umgehung eines solchen Unstetigkeitspunktes auf $F$ erzielt, zu *offenen* Wegen zwischen äquivalenten Punkten in den unendlich vielen an den parabolischen Punkt heranziehenden Bereichzipfeln des Netzes $N$ (vgl. Fig. 14, S. 943).

Die gleiche Betrachtung gilt für die Integralsysteme einer zur Fläche $F$ gehörenden *linearen Differentialgleichung:*

$$\frac{d^m Z}{dz^m} + R_1(w, z)\frac{d^{m-1} Z}{dz^{m-1}} + \cdots + R_m(w, z) Z = 0. \tag{2}$$

Irgendein Integralsystem $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ substituiert sich bekanntlich (vgl. „*Aut.*" 2, 41) bei einem Periodenwege oder bei einem Umlaufe um einen „singulären Punkt" linear:

$$\begin{aligned} Z_1' &= \alpha_{11} Z_1 + \alpha_{12} Z_2 + \cdots + \alpha_{1m} Z_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_m' &= \alpha_{m1} Z_1 + \alpha_{m2} Z_2 + \cdots + \alpha_{mm} Z_m. \end{aligned}$$

*Liegen die sämtlichen singulären Punkte der Differentialgleichung* (1) *in parabolischen Ecken des „FB", so werden die*

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$$

*in Abhängigkeit von* $\zeta$ *„eindeutige" Funktionen, die den Rand des Netzes* $N$ *zur natürlichen Grenze haben.*

## § 15. Die homogenen Substitutionen und die automorphen Formen.

Für die weitere Entwicklung der analytischen Theorie der automorphen Funktionen ist es ein entscheidender Schritt, die

Variabele $\zeta$ als Quotienten $\zeta = \zeta_1 : \zeta_2$ zweier Variabelen aufzufassen und daraufhin an Stelle der Funktionen $\varphi(\zeta)$ der einen Variabelen $\zeta$ *homogene Funktionen* $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ *zweier Variabelen* $\zeta_1, \zeta_2$ *einzuführen.* Diese $\zeta_1, \zeta_2$ mögen gleich selbst *„homogene Variabelen"* heißen; sie sollen, wie üblich, stets endlich sein und nicht zugleich verschwinden. Überdies halten wir daran fest, daß ihr Quotient $\zeta = \zeta_1 : \zeta_2$ stets einen Punkt des soeben mit $N$ bezeichneten Netzes darstellt.

Tragen wir in die Substitution $V$ (der ersten Art):

$$(1) \qquad \zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

für $\zeta$ den Quotienten $\zeta_1 : \zeta_2$ ein und setzen entsprechend

$$\zeta' = \zeta_1' : \zeta_2',$$

so können wir die Substitution $V$ in die *„homogene" Substitution* spalten:

$$(2) \qquad \zeta_1' = \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2, \qquad \zeta_2' = \gamma\zeta_1 + \delta\zeta_2.$$

Wie schon S 920 bemerkt wurde, waren für die einzelne Substitution $V$ die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch die Forderung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

nur bis auf einen gemeinsamen Zeichenwechsel bestimmt *Es entsprechen demnach dem einzelnen $V$ immer zwei homogene Substitutionen, die durch Zeichenwechsel der Koeffizienten ineinander übergehen.* Bezeichnen wir die eine durch das Symbol $U$, so wird die andere zweckmäßig $-U$ heißen; insbesondere wird der identischen Substitution $V_0 = 1$ erstens wieder die identische homogene Substitution $U_0 = 1$, daneben aber die durch $-1$ zu bezeichnende Substitution $\zeta_1' = -\zeta_1$, $\zeta_2' = -\zeta_2$ entsprechen.

Ist $\Gamma$ die zu unserem Netze $N$ gehörende Gruppe und lassen wir an Stelle der einzelnen Substitution $V$ von $\Gamma$ die beiden zugehörigen homogenen $U$ und $-U$ treten, so entsteht die *„homogene" Gestalt* der $\Gamma$ oder die zugehörige *„homogene Gruppe". Letztere ist zur ursprünglichen $\Gamma$ „1-2-deutig homomorph" (2-stufig isomorph;* vgl. Kap. III, § 2). Ist

$$V_1, V_2, \ldots, V_n$$

das System der Erzeugenden von $\Gamma$, und wählt man die zugehörigen homogenen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ eindeutig aus, so muß man ihnen noch die Substitution $-1$ zufügen, um *in jedem Falle* die homogene Gruppe vollständig erzeugen zu können.

Eine einzelne elliptische Erzeugende hatte in der Normalgestalt (12) S. 925 den Multiplikator $m = e^{\frac{2i\pi}{l}}$, wo $l$ eine ganze Zahl $> 1$ war. Zur Vermeidung von Verwechslungen wollen wir den in der Ecke des „FB“ liegenden Fixpunkt $\varepsilon$, den zweiten $\varepsilon'$ nennen und spalten der Gleichmäßigkeit wegen auch diese Werte in die Quotienten $\varepsilon = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$ und $\varepsilon' = \varepsilon_1' : \varepsilon_2'$. Wir schreiben:

$$\zeta - \varepsilon = \zeta_2^{-1}\varepsilon_2^{-1}(\zeta_1\varepsilon_2 - \zeta_2\varepsilon_1) = \zeta_2^{-1}\varepsilon_2^{-1}(\zeta, \varepsilon)$$

und brauchen die Symbole $(\zeta, \varepsilon')$, $(\zeta', \varepsilon)$, $(\zeta', \varepsilon')$ für die entsprechenden Ausdrücke $(\zeta_1\varepsilon_2' - \zeta_2\varepsilon_1')$, $\cdots$. Die elliptische erzeugende Substitution $V$ schreibt sich dann:

$$\frac{(\zeta', \varepsilon)}{(\zeta', \varepsilon')} = e^{\frac{2i\pi}{l}} \frac{(\zeta, \varepsilon)}{(\zeta, \varepsilon')}.$$

Indem wir ihr die homogene Substitution $U$

$$(3) \qquad (\zeta', \varepsilon) = e^{\frac{\pi i}{l}}(\zeta, \varepsilon), \qquad (\zeta', \varepsilon') = e^{-\frac{\pi i}{l}}(\zeta, \varepsilon')$$

entsprechen lassen, genügen wir, wie man leicht ausrechnet, der Forderung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Eine parabolische Erzeugende $V$ hatte die Normalgestalt (10) S. 924, wo wir jedoch statt $\zeta_1$ gleich wieder die Ecke $\varepsilon$ des „FB“ eingesetzt denken. Zur Umrechnung auf homogene Gestalt addiere man in (10) S. 924 erstlich rechts und links $(\varepsilon - \varepsilon')^{-1}$, unter $\varepsilon'$ irgendeine von $\varepsilon$ verschiedene Stelle verstanden, und multipliziere sodann mit $(\varepsilon - \varepsilon')$; es folgt:

$$\frac{\zeta' - \varepsilon'}{\zeta' - \varepsilon} = \frac{\zeta - \varepsilon'}{\zeta - \varepsilon} + (\varepsilon - \varepsilon')\gamma.$$

Man wolle nun die homogenen Variabelen $\zeta_1, \zeta_2$ sowie $\zeta_1', \zeta_2'$ einführen und spalte auch $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ in $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$ und $\varepsilon_1' : \varepsilon_2'$; dabei möge $\varepsilon_2'$ willkürlich gewählt sein, sodann aber:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2'\gamma(\varepsilon - \varepsilon')$$

gesetzt werden, während weiter $\varepsilon_1 = \varepsilon\varepsilon_2$ und $\varepsilon_1' = \varepsilon'\varepsilon_2'$ gilt. Unsere Substitution $V$ nimmt dann nämlich die höchst einfache Form an:

$$\frac{(\zeta', \varepsilon')}{(\zeta', \varepsilon)} = \frac{(\zeta, \varepsilon')}{(\zeta, \varepsilon)} + 1,$$

und wir müssen sie in die homogene Substitution $U$:

$$(4) \qquad (\zeta', \varepsilon') = (\zeta, \varepsilon') + (\zeta, \varepsilon), \qquad (\zeta', \varepsilon) = (\zeta, \varepsilon)$$

spalten, wenn wir der Forderung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen wollen.

Wir verstehen nun unter $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ *eine homogene analytische Funktion der Dimension $d$ von $\zeta_1, \zeta_2$, welche im Bereiche des Netzes $N$ erklärt sein soll, daselbst „in der Umgebung jeder Stelle eindeutig" sei und gegenüber den Substitutionen der homogenen Gruppe ein gleich noch näher festzustellendes Verhalten zeige.*

Die Forderung der Eindeutigkeit in der Umgebung jeder Stelle des Netzes $N$ präzisieren wir noch genauer, indem wir festsetzen, welche Reihenentwicklungen für $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ gelten sollen. Ist $\zeta_0$ zunächst eine beliebige, jedoch von einer festen Ecke eines Bereiches des Netzes $N$ verschiedene Stelle von $N$, so benutzen wir wie S. 960 die Entwicklungsgröße $t = \zeta - \zeta_0$. Mit irgendeiner von $\zeta_0$ verschiedenen Stelle $\varepsilon = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$ bilden wir den homogenen Ausdruck erster Dimension $(\zeta, \varepsilon)$, welcher im Produkte $(\zeta, \varepsilon)^{-d}\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ eine nur noch vom Quotienten $\zeta$ abhängende Funktion liefert. Indem wir für diese eine in der Umgebung von $\zeta_0$ konvergente Entwicklung wie in (1) S 960 mit nicht-verschwindendem $a_0$ und ganzzahligem $m$ fordern, entspringt für $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$:

$$(5) \qquad \varphi_d(\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta, \varepsilon)^d t^m (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)$$

Ist $m \gtrless 0$, so hat $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ an der Stelle $\zeta_0$ einen Nullpunkt $m^{\text{ter}}$ Ordnung bzw Pol $(-m)^{\text{ter}}$ Ordnung, je nachdem $m > 0$ oder $m < 0$ zutrifft

Bei einer *elliptischen* Ecke $\varepsilon$ benutzen wir die Entwicklungsgröße (vgl (2) S 960):

$$(6) \qquad t = \left(\frac{(\zeta, \varepsilon)}{(\zeta, \varepsilon')}\right)^l,$$

wo wie in (3) die Stelle $\varepsilon'$ den zweiten Fixpunkt der Erzeugenden darstellt. Das Produkt $(\zeta, \varepsilon')^{-d}\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$, welches vom Quotienten $\zeta$ allein abhängt, wird sich, wenn wir auch etwa $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$

gegenüber $U$ als invariant voraussetzen sollten, zufolge (3) um eine multiplikative Einheitswurzel ändern. Dieser Sachlage folgend gelangen wir zu einer sich später als zweckmäßig erweisenden Verallgemeinerung, *wenn wir vom Produkte*

$$(\zeta, \varepsilon')^{-d} \varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$$

*verlangen, daß es sich bei Ausübung von $U$ (einmaligem Umlauf um $t = 0$) bis auf eine multiplikative $l^{te}$ Wurzel der Einheit reproduziert.* In der Umgebung der fraglichen Ecke gilt dann:

$$(7) \qquad \varphi_d(\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta, \varepsilon')^d t^{\frac{m}{l}} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots),$$

wo $m$ ganzzahlig und $a_0$ nicht gleich 0 ist. Gilt $m \gtrless 0$, so haben wir gegenüber den bisherigen Funktionen $\varphi(\zeta)$ die Neuerung, daß $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ „im FB" einen Nullpunkt *gebrochener* Ordnung $\frac{m}{l}$, bzw. einen Pol $\left(-\frac{m}{l}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung hat. In $\zeta$ selbst aber ist zufolge (6) die Wurzel $t^{\frac{1}{l}}$ und damit $(\zeta, \varepsilon')^{-d} \varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ bei $\varepsilon$ eindeutig, womit wir die Forderung der Eindeutigkeit in der Umgebung dieser Stelle präzisiert haben.

Für eine *parabolische* Ecke $\varepsilon$ (vgl. (2) S. 960) benutzen wir im Anschluß an die Gestalt (4) der parabolischen Erzeugenden $U$ die Entwicklungsgröße:

$$(8) \qquad t = e^{2 i \pi \frac{(\zeta, \varepsilon')}{(\zeta, \varepsilon)}}$$

Zum Zwecke eines möglichst engen Anschlusses an (7) wählen wir alsdann eine positive ganze Zahl $l$ willkürlich und fordern, daß sich das allein von $\zeta$ abhängende Produkt $(\zeta, \varepsilon)^{-d} \varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ bei Ausübung der Erzeugenden $U$ (einmaligem Umlauf um $t = 0$) wieder *bis auf eine multiplikative $l^{te}$ Einheitswurzel reproduziert.* Dies kommt zum Ausdruck durch die Entwicklung:

$$(9) \qquad \varphi_d(\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta, \varepsilon)^d t^{\frac{m}{l}} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots).$$

Wir halten an der Sprechweise fest, $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ habe für $m \gtrless 0$ „im FB" einen Nullpunkt $\left(\frac{m}{l}\right)^{\text{ter}}$ bzw. einen Pol $\left(-\frac{m}{l}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung, indem wir dabei vom logarithmischen Null- bzw. Unstetigkeitspunkt des Faktors $(\zeta, \varepsilon)^d$ in der fraglichen Bereichecke absehen.

Ist $d$, was keineswegs ausgeschlossen sein soll, eine gebrochene Zahl, so bedarf es, falls wir eine Substitution $U$ der homogenen Gruppe auf $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ ausüben, einer Festsetzung über den Weg, den wir vom Wertepaare $\zeta_1, \zeta_2$ zum äquivalenten Paare $\zeta_1', \zeta_2'$ beschreiben. Ohne hierauf genauer einzugehen, setzen wir im Anschluß an die bisher schon aufgetretenen multiplikativen Einheitswurzeln fest, *daß sich* $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ *gegenüber einer Substitution der homogenen Gruppe* $\Gamma$ *allgemein bis auf eine multiplikative Konstante reproduziert.* Nach Analogie einer Sprechweise der Invariantentheorie nennen wir mit Klein die so gedachte Funktion $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ *eine zur Gruppe* $\Gamma$ *gehörende „automorphe Form“.* Die Berechtigung der Einführung dieser Formen möge dann zunächst aus folgendem unmittelbar einleuchtenden Satze hervorgehen: *Zwei verschiedene automorphe Formen gleicher Dimension* $d$, *welche gegenüber der einzelnen Substitution* $U$ *von* $\Gamma$ *stets denselben Faktor annehmen, liefern als Quotienten eine automorphe Funktion von* $\Gamma$ (vgl. *„Aut.“* 2, 66 ff.).

## § 16. Der Differentiationsprozeß und die Hauptformen im Falle des Geschlechtes $p = 0$.

Durch Differentiation der Gleichung $\zeta = \zeta_1 : \zeta_2$ ergibt sich:

$$(1) \qquad -\zeta_2^2 d\zeta = \zeta_1 d\zeta_2 - \zeta_2 d\zeta_1 = (\zeta, d\zeta).$$

Diese symbolisch durch $(\zeta, d\zeta)$ bezeichnete *„Differentialform“* zweiter Dimension ist gegenüber den homogenen Substitutionen $U$ wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ *absolut invariant*

$$(2) \qquad (\zeta', d\zeta') = (\zeta, d\zeta),$$

da sich die Differentiale $d\zeta_1$, $d\zeta_2$ wie die $\zeta_1, \zeta_2$ substituieren. Ist nun $\varphi(\zeta)$ irgendeine automorphe Funktion unseres „FB“, so gehören zu äquivalenten $d\zeta$, $d\zeta'$ gleiche Differentiale von $\varphi(\zeta)$. *Wir gewinnen demnach in*

$$(3) \qquad \varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{d\varphi(\zeta)}{(\zeta, d\zeta)} = -\frac{1}{\zeta_2^2}\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta}$$

*eine automorphe Form* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension des „FB“, welche gegenüber allen* $U$ *absolut invariant ist.* Wir sagen, die Form

$$\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$$

entsteht aus $\varphi(\zeta)$ durch den *„Differentiationsprozeß“*.

Hat der „FB" das Geschlecht $p = 0$, und ist $\varphi(\zeta)$ eine Hauptfunktion (s. S. 966), so nennen wir $\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$ eine „*Hauptform*". Zufolge der rechten Seite von (3) ist die Hauptform $\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$ *im ganzen „FB" endlich und von 0 verschieden, abgesehen von dem einen Pole (erster Ordnung) der Hauptfunktion sowie von den festen Ecken des „FB"*, weil in letzteren die Konformität der Abbildung der $\zeta$-Ebene auf die Ebene der Hauptfunktion $z = \varphi(\zeta)$ Einbuße erleidet. Indem man die Reihenentwicklungen (1) S. 960 der Hauptfunktion $\varphi(\zeta)$ heranzieht, stellt man leicht fest: *Die Hauptform* $\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2)$ *hat im „FB" einen Pol 2. Ordnung, welcher mit dem Pole von* $\varphi(\zeta)$ *zusammenfällt, und besitzt in der einzelnen festen Ecke des Winkels* $\frac{2\pi}{l}$ *einen Nullpunkt der Ordnung* $\left(1 - \frac{1}{l}\right)$, *wobei der Fall parabolischer Ecken mit* $l = \infty$ *eingeschlossen ist.*

## § 17. Die Prim- und Grundformen im Falle des Geschlechtes $p = 0$.

Hat der eben betrachtete „FB" des Geschlechtes $p = 0$ im ganzen $n$ feste Ecken, so möge die ausgewählte Hauptfunktion $z = \varphi(\zeta)$ in denselben die Werte $z = e_1, e_2, \ldots, e_n$ annehmen.[1]) Der Winkel in der Ecke $e_k$ sei $\frac{2\pi}{l_k}$, wo wieder $l_k = \infty$ im parabolischen Falle gilt. Nach dem Schlußsatz von § 16 ist

$$(1) \qquad \varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2) \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - e_k)^{-\left(1 - \frac{1}{l_k}\right)}$$

auch in den festen Ecken des „FB" endlich und von 0 verschieden. Um das Verhalten des Produktes (1) im Pole der Hauptfunktion $z$ anzugeben, bilden wir die Summe:

$$(2) \qquad 2 - \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{l_k}\right) = \frac{2}{\nu},$$

deren doppelt genommenen reziproken Wert wir somit $\nu$ nennen wollen. Das Produkt (1) hat im Pole von $z$ einen Pol der Ord-

---

1) Wir denken die Hauptfunktion $z$ so gewählt, daß diese Werte alle endlich sind.

nung $\left(\frac{2}{\nu}\right)$ bzw. einen Nullpunkt der Ordnung $\left(-\frac{2}{\nu}\right)$, je nachdem $\nu > 0$ oder $< 0$ ist; sollte indessen die Summe (2) verschwinden und also $\nu = \infty$ sein, so ist das Produkt (1) im Pole von $\varphi(\zeta)$ endlich und von 0 verschieden.

Schließen wir den Fall $\nu = \infty$ zunächst aus, so wird:

$$(3) \qquad \left\{\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2) \prod_{k=1}^{n} (z - e_k)^{-\left(1-\frac{1}{l_k}\right)}\right\}^{-\frac{\nu}{2}}$$

*eine in der Umgebung jeder Stelle des Netzes $N$ eindeutige automorphe Form der Dimension $\nu$, welche im „FB" überall endlich und abgesehen von dem einen Nullpunkte erster Ordnung im Pole von $z = \varphi(\zeta)$ auch allenthalben im „FB" von 0 verschieden ist.* Eine Form dieser Art nennt man eine *„Primform"*; die in (3) hergestellte Primform möge $z_2(\zeta_1, \zeta_2)$ heißen. Das Produkt derselben mit der Funktion $z(\zeta) = \varphi(\zeta)$ liefert offenbar wieder eine Primform:

$$(4) \qquad z_1(\zeta_1, \zeta_2) = z(\zeta) \cdot z_2(\zeta_1, \zeta_2)$$

und zwar eine solche, deren Nullpunkt mit dem der Hauptfunktion $z$ zusammenfällt. Aus $z_1$ und $z_2$ stellen wir die *„binare Schar der Primformen" $\nu^{\text{ter}}$ Dimension unseres „FB":*

$$(5) \qquad a z_1(\zeta_1, \zeta_2) + b z_2(\zeta_1, \zeta_2) = (az + b) \cdot z_2(\zeta_1, \zeta_2),$$

*her, wobei wir durch zweckmäßige Auswahl des „Parameters" $a : b$ den Nullpunkt der Form (5) an jede beliebige Stelle des „FB" bringen können* Um insbesondere den Nullpunkt in die Ecke $e_k$ zu lagern, spalten wir den Wert $e_k$ in $e_k^{(1)} : e_k^{(2)}$ und bilden die symbolisch durch $(z, e_k)$ zu bezeichnende Form:

$$(6) \qquad (z, e_k) = z_1 e_k^{(2)} - z_2 e_k^{(1)}.$$

Im „FB" hat dieselbe an der fraglichen Ecke einen Nullpunkt erster Ordnung; dagegen liegt, im Netze $N$ der $\zeta$-Ebene gemessen, falls zunächst eine elliptische Ecke in Betracht kommt, ein Nullpunkt der Ordnung $l_k$ vor. Demnach wird auch noch:

$$(7) \qquad Z_k(\zeta_1, \zeta_2) = \sqrt[l_k]{(z, e_k)}$$

in der Umgebung der fraglichen Stelle $\zeta$ *eindeutig* bleiben, und

dasselbe gilt von der Form (7) an allen übrigen Stellen, wo $(z, e_k)$ endlich und von 0 verschieden ist (vgl. die Reihenentwicklungen nach $t$). Auch auf die parabolischen Ecken dehnen wir diesen Ansatz aus; nur werden wir hier nicht $l_k = \infty$ nehmen, sondern im Anschluß an die der Formel (9) S. 972 unmittelbar voraufgehende Bemerkung den Wurzelexponenten $l_k$ als endliche positive ganze Zahl willkürlich wählen. *Die so hergestellten $n$ Formen $Z_1(\zeta_1, \zeta_2), \ldots, Z_n(\zeta_1, \zeta_2)$ heißen die „Grundformen" unseres „FB" vom Geschlechte $p = 0$.* Die offenbar gültige Gleichung:

$$\begin{vmatrix} z_1 e_h^{(2)} - z_2 e_h^{(1)}, & e_h^{(1)}, & e_h^{(2)} \\ z_1 e_i^{(2)} - z_2 e_i^{(1)}, & e_i^{(1)}, & e_i^{(2)} \\ z_1 e_k^{(2)} - z_2 e_k^{(1)}, & e_k^{(1)}, & e_k^{(2)} \end{vmatrix} = 0$$

zeigt, daß zwischen je drei Grundformen des „FB" die Relation besteht:

$$(8) \qquad (e_i, e_k) Z_h^{l_h} + (e_k, e_h) Z_i^{l_i} + (e_h, e_i) Z_k^{l_k} = 0.$$

Im Falle $n = 3$ lautet die Gleichung (2):

$$(9) \qquad \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} - 1 = \frac{2}{\nu}.$$

Hier kommen wir zu den in § 9 besprochenen Kreisbogendreiecken und erkennen aus (2) S. 943, daß $\nu > 0, = \infty$ oder $< 0$ ist, je nachdem ein Netz von Dreiecken erster, zweiter oder dritter Art vorliegt.

Bei den *Dreiecken erster Art* stellen wir im Anschluß an die Tabelle S. 945 die Dimensionen $\nu$ der Primformen und diejenigen $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ der Grundformen tabellarisch zusammen:

| | $\nu$ | $\nu_1$ | $\nu_2$ | $\nu_3$ |
|---|---|---|---|---|
| Diedergruppe. . . . . . . . . | $2l$ | $l$ | $l$ | 2 |
| Tetraedergruppe . . . . . . | 12 | 6 | 4 | 4 |
| Oktaedergruppe. . . . . . | 24 | 12 | 8 | 6 |
| Ikosaedergruppe . . . . | 60 | 30 | 20 | 12 |

Die Bedeutung der Grundformen $Z_1, Z_2, Z_3$ ist hier leicht angebbar. Z. B. im Falle der Ikosaedergruppe haben wir auf

der $\zeta$-Kugel das in Fig. 16, S. 945 dargestellte regulär-symmetrische Netz. Die Ecke $e_1$ und ihre äquivalenten Stellen liefern hier die 30 Halbierungspunkte der Ikosaederkanten, und ebenso führt $e_2$ zu den 20 Flächenmitten des Ikosaeders, $e_3$ zu den 12 Ecken desselben. $Z_1$ ist somit diejenige rationale ganze Form, deren Nullpunkte die Kantenmitten des Ikosaeders sind usw. Indem man die Projektion der $\zeta$-Ebene auf die Kugel zweckmäßig vornimmt, gelangt man zu den drei bereits in Kap. III, § 11, S. 240, genannten Formen:

$$Z_1 = \zeta_1^{30} + \zeta_2^{30} + 522\,\zeta_1^5\zeta_2^5(\zeta_1^{20} - \zeta_2^{20}) \\ - 10005\,\zeta_1^{10}\zeta_2^{10}(\zeta_1^{10} + \zeta_2^{10}),$$

$$Z_2 = -\zeta_1^{20} - \zeta_2^{20} + 228\,\zeta_1^5\zeta_2^5(\zeta_1^{10} - \zeta_2^{10}) - 494\,\zeta_1^{10}\zeta_2^{10},$$

$$Z_3 = \zeta_1\zeta_2(\zeta_1^{10} + 11\,\zeta_1^5\zeta_2^5 - \zeta_2^{10}).$$

Die zwischen ihnen bestehende Relation (8) hat die a a O gleichfalls angegebene Gestalt:

$$Z_1^2 + Z_2^3 - 1728\,Z_3^5 = 0.$$

In den drei anderen Fällen gelten entsprechende Ergebnisse (vgl. Klein, *Math. Ann.* 9, 183 und *„Vorlesungen über das Ikosaeder"*, siehe auch Schwarz, *J f. Math.* 75, 323).

Als Beispiel eines *Dreiecks zweiter Art* benutzen wir dasjenige mit $l_1 = 2$, $l_2 = 3$, $l_3 = 6$ und nehmen wie in Fig 17, S. 946 den Grenzpunkt der Gruppe bei $\zeta = \infty$ gelegen an. Die Gruppe $\Gamma$ setzt sich dann aus lauter elliptischen und parabolischen Substitutionen mit $\infty$ als Fixpunkt und also mit $\gamma = 0$ zusammen (kongruente Verschiebungen der $\zeta$-Ebene in sich) Da aber an elliptischen Substitutionen nur solche der Perioden 2, 3 oder 6 auftreten können, so haben die homogenen Substitutionen $U$ der $\Gamma$ die Gestalt:

$$\zeta_1' = e^{\frac{m\pi i}{6}}\zeta_1 + \beta\zeta_2, \qquad \zeta_2' = e^{-\frac{m\pi i}{6}}\zeta_2$$

mit ganzzahligen $m$.

Aus der zweiten dieser beiden Gleichungen und der absoluten Invarianz der durch den Differentiationsprozeß zu gewinnenden Form (3), S. 973 folgt, daß:

$$-\zeta_2^2\,\varphi_{-2}(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{dz}{d\zeta}$$

gegenüber der homogenen $\Gamma$ bis auf etwaige multiplikative sechste Einheitswurzeln invariant ist. Demnach wird die sechste Potenz von:

$$\frac{dz}{d\zeta}(z-e_1)^{-\frac{1}{2}}(z-e_2)^{-\frac{2}{3}}(z-e_3)^{-\frac{5}{6}} \tag{10}$$

eine automorphe Funktion unserer Gruppe $\Gamma$ und also eine rationale Funktion von $z$ sein. Aber diese Funktion wird für keinen Wert $z$ gleich 0 oder gleich $\infty$ (vgl. S. 970 ff), sie ist also eine Konstante. Wir dürfen $\zeta$ noch um einen konstanten Faktor ändern und denken diesen so gewählt, daß der Ausdruck (9) mit 1 identisch wird. *Umgekehrt folgt hieraus für $\zeta$ die Darstellung als Integral:*

$$\zeta = \int \frac{dz}{\sqrt[6]{(z-e_1)^3 (z-e_2)^4 (z-e_3)^5}}. \tag{11}$$

Um diese Gleichung, auf deren rechter Seite ein im „FB" überall endliches Integral steht, zu verstehen, beachte man, daß die parabolischen Substitutionen unserer $\Gamma$ für sich eine Untergruppe bilden. Hierbei handelt es sich um eine Gruppe der in § 6 besprochenen Art mit einem die $\zeta$-Ebene bedeckenden Parallelogrammnetze. In Fig. 17, S. 946, lagere man um eine Ecke $e_2$ sechs Dreiecke zu einem größeren gleichseitigen Dreiecke zusammen und füge längs einer Seite ein ebensolches Dreieck an; so entsteht ein Ausgangsparallelogramm der fraglichen Untergruppe, wobei die Gegenseiten dieses „DB" einander zugeordnet sind. *Es liegt das Geschlecht $p = 1$ vor, und in (10) haben wir das zugehörige Integral erster Gattung.*

In den beiden anderen Fällen von Dreiecken zweiter Art gelten analoge Betrachtungen.

Bei den unendlich vielen Fällen von *Dreiecken dritter Art* sind die Dimensionen der Prim- und Grundformen *negativ.* Ganzzahlige Dimensionen liegen nur in wenigen Fällen vor, die in *„Aut"* 2, 81 ff. zusammengestellt sind. Daselbst ist auch festgestellt, welche Faktoren die Grundformen gegenüber den homogenen $U$ annehmen. Es zeigt sich, *daß nur in zwei Fällen, nämlich für $l_1 = 2$, $l_2 = 3$, $l_3 = 7$ und $l_1 = 2$, $l_2 = 3$, $l_3 = \infty$ die Grundformen durchweg absolut invariant sind.* Für die Dimensionen $\nu, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ gilt in diesen beiden besonderen Fällen:

| $(l_1, l_2, l_3)$ | $-\nu$ | $-\nu_1$ | $-\nu_2$ | $-\nu_3$ |
|---|---|---|---|---|
| (2, 3, 7) | 84 | 42 | 28 | 12 |
| (2, 3, $\infty$) | 12 | 6 | 4 | 12 |

Für die parabolische Ecke $e_3$ des zweiten Falles ist der bei Herstellung der Grundform $Z_3$ frei wählbare Wurzelexponent $l_3 = 1$ gesetzt. Wie aus dem an Formel (5) angeschlossenen Satze folgt, erzielt man hierdurch eine Grundform, welche im „FB" an der fraglichen Ecke einen Nullpunkt erster Ordnung hat.

Der Fall $l_1 = 2$, $l_2 = 3$, $l_3 = \infty$ lieferte uns die *Modulgruppe*, die in § 10 betrachtet wurde. Legen wir das Dreieck in Gestalt der Fig. 21, S. 951, zugrunde, so wird es am Platze sein, die Bezeichnung $\omega$ statt $\zeta$ aufzunehmen und für $\zeta_1, \zeta_2$ entsprechend $\omega_1, \omega_2$ zu schreiben. Die zugehörigen Funktionen $\varphi(\omega)$ und Formen $\varphi_d(\omega_1, \omega_2)$ nennen wir *„Modulfunktionen"* und *„Modulformen"*. Wollen wir bei der Durchführung der vorstehenden Ansätze die Modulfunktion $J(\omega)$ als Hauptfunktion zugrunde legen, so wird etwas hinderlich, daß entgegen unserer allgemeinen Annahme der Pol dieser Funktion in der dritten Ecke $e_3$ des „FB" (Ecke $\omega = i\infty$ des Doppeldreiecks der Fig. 22, S. 954) liegt. Doch stellt man leicht fest, daß wir hier die Grundformen in der Gestalt:

$$(12)\qquad \left(\frac{dJ(\omega)}{(\omega, d\omega)}\right)^2 \frac{1}{J(1-J)}, \qquad \left(\frac{dJ(\omega)}{(\omega, d\omega)}\right)^3 \frac{1}{J^2(1-J)},$$
$$\left(\frac{dJ(\omega)}{(\omega, d\omega)}\right)^6 \frac{1}{J^4(1-J)^3}$$

ansetzen können. Wir kommen auf diese *drei Modulformen der Dimensionen — 4, — 6 und — 12* im übernächsten Paragraphen zurück.

Weiteres über automorphe Formen findet man in *„Aut."* **2**, 81 ff.; über das erste Auftreten der Grundformen bei den Dreiecken dritter Art vgl. Halphen, *C R.*, **92** (1881).

## § 18. Die Poincaréschen Reihen.

In § 12 wurde die Existenz automorpher Funktionen im Anschluß an Klein mittels Schwarz-Neumannscher Methoden bewiesen. Poincaré ist zum gleichen Ziele in seinen grundlegenden Arbeiten (*Acta math.* **1**, 193 und **3**, 49 (1882 ff)) in der Art gelangt, daß er in $\zeta$ unmittelbar konvergente Reihen aufbaute und aus ihnen die automorphen Funktionen herstellte. Poincaré selbst bezeichnet diese Reihen im Anschluß an seine Gruppenterminologie als „Fuchssche" und „Kleinsche" Thetareihen. Indessen ist die Aufstellung der fraglichen Reihen eine

originale Leistung Poincarés, so daß es gerecht erscheint, die Benennung der Reihen an seinen Namen zu knüpfen.

Es sei eine unserer homogenen Gruppen $\Gamma$ vorgelegt, deren Substitutionen $U$ in irgendeine Reihenfolge gebracht seien. Die $k^{te}$ unter ihnen sei:

$$(1)\qquad \zeta_1^{(k)} = \alpha_k\zeta_1 + \beta_k\zeta_2, \quad \zeta_2^{(k)} = \gamma_k\zeta_1 + \delta_k\zeta_2.$$

Unter $H_d(\zeta_1, \zeta_2)$ verstehen wir eine *rationale Form* (homogene Funktion) der (ganzzahligen) Dimension $d$ und bilden mittels $H_d$ die auf alle Substitutionen der homogenen $\Gamma$ bezogene Reihe:

$$(2)\qquad \sum_k H_d(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}) = \sum_k H_d(\alpha_k\zeta_1 + \beta_k\zeta_2, \quad \gamma_k\zeta_1 + \delta_k\zeta_2),$$

die als *„Poincarésche Reihe"* bezeichnet werden soll. Falls diese Reihe im Innern des Netzes $N$ absolut und gleichmäßig konvergent ist und bei Annäherung an eine etwaige parabolische Spitze das Verhalten einer automorphen Form zeigt (vgl. S. 971 ff.), so folgt aus der Gruppeneigenschaft der Substitutionen (1), *daß die Reihensumme eine eindeutige automorphe Form unserer $\Gamma$ liefert.*

Poincaré hat die Konvergenzuntersuchung seiner Reihen nach zwei verschiedenen Methoden durchgeführt, welche mit geometrischen Erwägungen arbeiten und übrigens von der Voraussetzung ausgehen, *daß kein Pol der rationalen Form $H_d$ in einen Grenzpunkt von $\Gamma$ fällt.* Es zeigt sich, *daß die gewünschte Konvergenz für alle Dimensionen $d \leqq -3$ besteht und in jedem parabolischen Zipfel des „FB" das erforderliche Verhalten zutrifft.* Hierbei stellt sich insbesondere noch heraus, *daß die durch (2) dargestellte Form in jedem parabolischen Zipfel des „FB" einen Nullpunkt hat.* Man vgl. neben Poincaré a. a. O. die Darstellung in *„Aut."* 2, 138 ff.

Poincaré selbst arbeitet übrigens nicht mit homogenen Funktionen von $\zeta_1, \zeta_2$. Setzen wir das vom Quotienten $\zeta$ allein abhängende Produkt von $\zeta_2^{-d}$ und $H_d(\zeta_1, \zeta_2)$ gleich $H(\zeta)$ und wählen überdies $d$ als negative gerade Dimension $-2m$, so geht die Reihe (2) über in:

$$\zeta_2^{-2m}\cdot\sum_k H\left(\frac{\alpha_k\zeta + \beta_k}{\gamma_k\zeta + \delta_k}\right)(\gamma_k\zeta + \delta_k)^{-2m}.$$

Die hier mit $\zeta_2^{-2m}$ multiplizierte Reihe stellt Poincaré als

*„Thetareihe"* $\theta(\zeta)$ an die Spitze; ihr Verhalten gegenüber der Substitution $V_i$ der $\Gamma$ bestimmt sich so:

$$\theta\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right)=(\gamma_i\zeta+\delta_i)^{2m}\cdot\theta(\zeta).$$

Die Analogie zum Verhalten der Jacobischen Thetafunktionen (vgl. Kap. XVI, § 1) ist für die Benennung maßgeblich gewesen.

Die homogene Darstellung der Poincaréschen Reihen ist von Ritter (*Math. Ann.* **41**, 1 (1892)) im Anschluß an Vorlesungen von Klein durchgeführt. Dabei werden die Reihen l. c. so verallgemeinert, daß sie zur Darstellung *eindeutiger automorpher Formen, welche sich gegenüber den homogenen U bis auf konstante Faktoren reproduzieren* (vgl. S. 972), geeignet sind. Heißt der zur Substitution (1) gehörende Faktor $\mu_k$, so hat man an Stelle der Reihe (1) einfach:

$$\sum_k \mu_k^{-1} H_d(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}) \tag{3}$$

zu benutzen. Sind die Faktoren $\mu_k$ durchweg Zahlen des absoluten Betrages 1 (vgl. S. 972), so gelten die Poincaréschen Konvergenzbetrachtungen für die Reihen (3) ohne weiteres mit.

Die Poincaréschen Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension sind nicht mehr absolut konvergent, falls das Netz $N$ eine oder unendlich viele Grenzkurven hat (*„Aut."* **2**, 153). Dagegen geht aus Untersuchungen von Schottky (*J. f. Math.* **101**, 227 (1887)) über Produktentwicklungen bei *gewissen Gruppen mit isoliert liegenden Grenzpunkten* hervor, *daß bei ihnen auch die Reihen* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension absolut und gleichmäßig konvergieren* (*„Aut."* **2**, 161). Die *absolute und gleichmäßige Konvergenz der Poincaréschen Reihen* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension für alle Hauptkreisgruppen mit isoliert liegenden Grenzpunkten* zeigten Burnside (*Lond. M. S. Proc.* **23** (1891)) und Ritter (*Math. Ann.* **41**, 1, § 7 (1892)).

Findet für die ganzzahlige negative Dimension $d$ Konvergenz der Reihen (3) statt, so entsteht die Frage, ob eine beliebig vorgelegte automorphe Form dieser Dimension $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$, deren Multiplikatoren $\mu_k$ durchweg den absoluten Betrag 1 haben, und die in etwaigen parabolischen Spitzen des „FB" verschwindet, in Gestalt einer Reihe (3) darstellbar ist. Um hierauf zu antworten, baut man zuvörderst *„einpolige"* Reihen auf, d. h. Reihen, die an einer vorgeschriebenen Stelle des „FB" einen Pol erster Ordnung haben. Hat das Netz eine oder unendlich viele

Grenzkurven, so wählt man $H_d(\zeta_1, \zeta_2)$ so, daß ein Nullpunkt des Nenners dieser rationalen Form an die vorgeschriebene Stelle des „FB" fällt, während die übrigen Nullpunkte außerhalb $N$ liegen. Bedeckt das Netz $N$ (bis auf die Grenzpunkte) die ganze $\zeta$-Ebene, so wählt man den ersten Nullpunkt wie soeben, die übrigen aber in äquivalenten Stellen des Netzes $N$. Durch richtige Auswahl des Zählers von $H_d$ kann man bewirken, daß sich die von diesen übrigen Nullstellen des Nenners herrührenden Pole einzelner Glieder in (3) bei der Summierung gegenseitig gerade aufheben (cf. „*Aut.*" 2, 178 ff.). Auch die Herstellung von Reihen mit je einem Pole höherer Ordnung im „FB" wird in ähnlicher Weise vollzogen. Man kann demnach auch ein Aggregat von Reihen und also (durch Summierung der auf das einzelne $k$ bezogene Glieder) eine einzige Reihe herstellen, welches genau so unendlich wird wie die vorgelegte Form $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$, und welches somit von

$$\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$$

abgezogen als Differenz eine „polfreie" Form liefert. Die Untersuchung ist damit auf die Frage reduziert, ob jede polfreie Form $\varphi_d(\zeta_1, \zeta_2)$ durch eine Poincarésche Reihe darstellbar ist.

Nun ist zwar der Ansatz polfreier Poincaréscher Reihen nach den soeben bei den einpoligen Reihen genannten Prinzipien nicht schwierig. Aber es tritt hier die Möglichkeit ein, daß die einzelne so angesetzte Reihe eine identisch verschwindende Summe (3) liefert. Wie man nach Poincaré die hierin liegende Schwierigkeit überwindet, sehe man bei Poincaré a. a. O. oder Ritter a. a. O. oder in „*Aut.*" 2, 186 ff nach. Es besteht der Satz, *daß bei den zulässigen Dimensionen d jede eindeutige automorphe Form mit Nullpunkten in den parabolischen Spitzen und mit Multiplikatoren $\mu_k$ vom absoluten Betrage 1 auch wirklich durch eine Poincarésche Reihe darstellbar ist.*

## § 19. Analytische Darstellungen der Modulformen.

Eine doppeltperiodische oder elliptische Funktion des komplexen Argumentes $u$ habe die beiden „primitiven Perioden" $\omega_1$, $\omega_2$ (s. Kap. XVI, § 5, wo $2\omega$, $2\omega$ statt $\omega_1$, $\omega_2$ geschrieben ist). Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen, so hat sie auch die Perioden:

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2. \tag{1}$$

Ist überdies $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so bilden auch $\omega_1', \omega_2'$ ein Paar

primitiver Perioden, insofern sich die ursprünglichen $\omega_1, \omega_2$ ihrerseits wieder ganzzahlig durch $\omega_1', \omega_1'$ ausdrücken. *Der Übergang von $\omega_1, \omega_2$ zu allen Paaren primitiver Perioden (1) geschieht durch die gesamten homogenen Substitutionen der Modulgruppe* (vgl. § 10).

Die von Weierstraß mit $\wp(u \mid \omega_1, \omega_2)$ und $\wp'(u \mid \omega_1, \omega_2)$ bezeichneten, auch schon bei Eisenstein (*J. f. Math.* **35** (1847)) auftretenden Funktionen kann man durch die absolut und gleichmäßig konvergenten Reihen geben:

$$(2)\qquad \wp(u \mid \omega_1, \omega_1) = \frac{1}{u^2} + \sum\nolimits' \left\{ \frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} \right\},$$

$$(3)\qquad \wp'(u \mid \omega_1, \omega_2) = -2 \sum \frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^3},$$

wo sich die Summen auf alle Paare ganzer Zahlen $m_1, m_2$ beziehen, jedoch unter Ausschluß der Kombination $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ in (2), was hier und weiterhin durch einen Index am Summenzeichen angedeutet sein soll (vgl. Kap. XVI, § 7). Setzt man in (2) und (3) an Stelle der $\omega_1$, $\omega_2$ irgendein Paar primitiver Perioden (1) ein, so tritt nur eine Umordnung der Glieder ein: *Die Weierstraßschen Funktionen sind homogene Funktionen $(-2)^{\text{ter}}$ und $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension der Argumente $u, \omega_1, \omega_2$, die gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe das Verhalten von Modulformen zeigen:*

$$\wp(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \wp(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

und entsprechend fur $\wp'(u)$.

Um eigentliche Modulformen zu gewinnen, entwickeln wir die Reihe (2) in eine in der Umgebung von $u = 0$ konvergente Potenzreihe um:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3u^2 \sum\nolimits' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4} + 5u^4 \sum\nolimits' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6} + \cdots.$$

Andererseits lautet die Reihenentwicklung der $\wp$-Funktion bei Weierstraß (vgl. Kap. XVI, § 7):

$$(4)\qquad \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} u^4 + \cdots.$$

Durch Vergleich beider Reihen findet man *für die beiden Größen $g_2$ und $g_3$, welche als allein von $\omega_1$, $\omega_2$ abhängig unmittelbar Modulformen sind, die Darstellungen:*

$$(5)\qquad g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},$$

$$(6)\qquad g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6},$$

*welche im Innern der positiven $\omega$-Halbebene* (s. Fig. 21, S. 951) *konvergieren.*

Für Potenzreihenentwicklungen der Modulformen in der Umgebung der bei $\omega = i\infty$ gelegenen Ecke des „FB" (s. Fig. 22, S. 954) haben wir nach (8) S. 972 die Entwicklungsgröße $t = e^{2i\pi\omega}$ zu benutzen. Dieselbe ist das Quadrat der von Jacobi benutzten Entwicklungsgröße $q = e^{\pi i\omega}$, die wir später doch gebrauchen müssen und also schon hier einführen. Für die Ableitung $\wp'(u)$ von $\wp(u)$ gilt (vgl. Kap. XVI, § 7, S. 805):

$$\wp'(u) = -2\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^3 \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{\omega_2}}{\sin^2\frac{\pi u}{\omega_2}} + \frac{16\pi^3}{\omega_2^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2 q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi u}{\omega_2}.$$

Hieraus berechnet man:

$$\left\{\wp''(u) - \frac{6}{u^4}\right\}_{u=0} = \frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^4 + 32\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^3 q^{2m}}{1-q^{2m}},$$

$$\left\{\wp'''(u) - \frac{120}{u^6}\right\}_{u=0} = \frac{16}{7\cdot 9}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^6 - 128\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^6\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^5 q^{2m}}{1-q^{2m}},$$

wo links die Werte der eingeklammerten Funktionen für $u = 0$ gemeint sind. Berechnet man diese aus (4), so folgt: *Die Modulformen $g_2$ und $g_3$ gestatten die für $|q| < 1$, d. h. im Innern der positiven $\omega$-Halbebene konvergenten Darstellungen.*

$$(7)\qquad \begin{cases} g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4\left\{\frac{1}{12} + 20\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{m^3 q^{2m}}{1-q^{2m}}\right\}, \\ g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6\left\{\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{m^5 q^{2m}}{1-q^{2m}}\right\}, \end{cases}$$

aus denen man Reihen nach ansteigenden Potenzen von $q$ leicht herstellt.

Modulformen $(-4)^{\text{ter}}$ und $(-6)^{\text{ter}}$ Dimension, die gegenüber allen Substitutionen der Gruppe invariant waren, hatten wir auch in (12) S. 979 gewonnen. Berücksichtigen wir, daß $J(\omega)$ im parabolischen Zipfel des „FB" einen Pol erster Ordnung hat und also daselbst die Darstellung zuläßt:

$$J(\omega) = a_{-1} e^{-2\pi i \omega} + a_0 + a_1 e^{2\pi i \omega} + \cdots,$$

so berechnet man aus (12), S. 979 leicht, daß jene beiden ersten daselbst angegebenen Formen im parabolischen Zipfel endlich bleiben, und zwar die Werte:

$$(8) \qquad \frac{4\pi^2}{\omega_2^4} \quad \text{und} \quad \frac{8\pi^3}{i\,\omega_2^6}$$

annehmen. Die erste Form (12), S. 979 hat im „FB" einen Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{3}$ in der Ecke bei $\omega = \varrho$ (s. Fig. 21, S. 951) und ist sonst überall endlich und von 0 verschieden. Die Form $g_2(\omega_1, \omega_2)$ ist gleichfalls überall endlich und hat zufolge (7) im parabolischen Zipfel den Wert $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \cdot \frac{1}{12}$. Teilt man $g_2$ durch jene Modulform, so hängt der Quotient nur noch von $\omega$ ab und ist gegenüber $\Gamma$ invariant. Derselbe stellt also, sofern er nicht mit einer Konstanten identisch ist, eine Modulfunktion und also eine rationale Funktion von $J$ dar. Aber diese Funktion würde nur einen bei $\omega = \varrho$ (und also $J = 0$) gelegenen Pol im „FB" aufweisen, dessen Ordnung $\leqq \frac{1}{3}$ sein müßte Da dies unmöglich ist, muß unser Quotient konstant sein; seinen Wert bestimmt man aus den Werten von Zähler und Nenner im parabolischen Zipfel. Durch Ausdehnung der gleichen Überlegung auf $g_3$ und die zweite Form (12) S. 979 ergibt sich: *Die oben durch den Differentiationsprozeß gewonnenen beiden ersten Modulformen (12) S 979 sind bis auf konstante Faktoren mit den Modulformen $g_2$, $g_3$ identisch, und zwar gilt:*

$$(9) \qquad g_2(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{dJ}{(\omega, d\omega)}\right)^2 \frac{\pi^2}{3J(1-J)},$$

$$(10) \qquad g_3(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{dJ}{(\omega, d\omega)}\right)^3 \frac{\pi^3 i}{27J^2(1-J)}.$$

Für die Modulform $(-12)^{\text{ter}}$ Dimension:

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = g_2^3 - 27 g_3^2 \tag{11}$$

berechnet man aus (9) und (10):

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{dJ}{(\omega, d\omega)}\right)^6 \frac{\pi^6}{27 J^4 (1-J)^3}. \tag{12}$$

Hier steht abgesehen von einem konstanten Faktor rechts *die dritte Form (12), S. 979, die im „FB" einen einfachen Nullpunkt an der parabolischen Ecke hat.*[1]) Die Modulform $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ besitzt die *für* $|q| < 1$, *d. h. im Innern der positiven* $\omega$*-Halbebene konvergente Produktentwicklung:*

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} q^2 \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})^{24}. \tag{13}$$

Wegen der etwas umständlicheren Ableitung dieser Gleichung aus den Grundformeln der Theorie der elliptischen Funktionen vgl. man Hurwitz, *Math. Ann.* **18**, 551 (1881), oder *„Mod."* **1**, 153.

Als *Darstellung der Hauptfunktion* $J(\omega)$ *in den Modulformen* $g_2, g_3, \Delta$ resultiert aus (9)ff.:

$$J : (J - 1) : 1 = g_2^3 : 27 g_3^2 : \Delta. \tag{14}$$

Aus (7) und (13) gewinnt man als Anfangsglieder der Potenzreihe von $J(\omega)$ in der Entwicklungsgröße $q$:

$$J(\omega) = \tfrac{1}{1728} q^{-2} + \tfrac{31}{72} + \tfrac{1823}{16} q^2 + \cdots. \tag{15}$$

Diese Reihe ist für $|q| < 1$ konvergent; die durch $|q| = 1$ gegebene Peripherie des Konvergenzkreises in der $q$-Ebene entspricht der reellen $\omega$-Achse und stellt also bereits die *„natürliche Grenze"* der Funktion $J$ dar.

Die analytischen Darstellungen der Modulformen und Modulfunktionen sind vorstehend aus den Formeln der Theorie der

---

1) Für die zwischen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ bestehende Relation (vgl Kap XVI, § 7):

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2 \wp(u) - g_3$$

ist $\Delta$ die *„Diskriminante"* der rechter Hand stehenden ganzen Funktion dritten Grades, womit die Bezeichnung $\Delta$ ihre Begründung findet. Das Verschwinden von $\Delta$ zieht Ausartung der elliptischen Funktionen in trigonometrische nach sich; hierfür ist also $J = \infty$ oder $\omega = i\infty$ charakteristisch.

elliptischen Funktionen entnommen. Neben dem Legendre-Jacobischen *„Integralmodul“* kann man in dieser Theorie den Periodenquotienten $\omega$ als *„Modul“* des einzelnen *„elliptischen Gebildes“* benutzen. Die Invarianten des zugrunde liegenden *„algebraischen Gebildes“* werden dann in Abhängigkeit von $\omega$ Funktionen des Moduls oder *„Modulfunktionen“*, genauer *„elliptische Modulfunktionen“*. Gebraucht ist diese Benennung zuerst von Dedekind (vgl. *J. f. Math.* **83**, 265 (1877) und Riemanns *Werke*, 1. Aufl., S 438).

## § 20. Die Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe.

Zwei Substitutionen $V = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ und $V' = \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$ der ursprünglichen (nicht homogenen) Modulgruppe $\Gamma$ sollen nach dem ganzzahligen positiven Zahlmodul $n$ „kongruent“ heißen: $V' \equiv V$, (mod. $n$), falls die vier Kongruenzen:

$$(1) \quad \alpha' \equiv \pm \alpha, \quad \beta' \equiv \pm \beta, \quad \gamma' \equiv \pm \gamma, \quad \delta' \equiv \pm \delta, \quad (\text{mod. } n)$$

bei gleichzeitiger Gültigkeit entweder der oberen oder der unteren Zeichen zutreffen. Sind insbesondere $V$ und $V'$ mit der identischen Substitution 1 kongruent, so folgt aus (6) S. 916, daß auch $V \cdot V' \equiv 1$, (mod. $n$) ist: *Alle mit der identischen Substitution mod. $n$ kongruenten Substitutionen von $\Gamma$ bilden eine Untergruppe, welche als „Hauptkongruenzgruppe $n^{\text{ter}}$ Stufe“ bezeichnet wird.* Der Index dieser Untergruppe werde $\mu(n)$ oder kurz $\mu$ genannt, diese selbst $\Gamma_\mu$.

Ist $V' \equiv 1$, (mod. $n$) und $V$ beliebig, so ergibt sich aus (6) S. 916, daß $V' V$ wie auch $V V'$ mit $V$ kongruent ist. Weiter ist $V^{-1} \cdot V' V$ mit $V^{-1} \cdot V = 1$ kongruent und also wieder in $\Gamma_\mu$ enthalten sein. Für $\Gamma_\mu$ gilt $V^{-1} \Gamma_\mu V = \Gamma_\mu$, wo $V$ eine beliebige Substitution von $\Gamma$ ist: *Die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_\mu$ ist eine ausgezeichnete Untergruppe von $\Gamma$.*

Behalten wir $V$ und $V'$ in der gleichen Bedeutung bei, und ist $V''$ irgendeine mit $V$ kongruente Substitution von $\Gamma$, so folgt wieder aus (6) S 916, daß $V'' V^{-1} \equiv 1$, (mod. $n$) ist. Setzen wir also $V'' V^{-1} = V'$, so folgt $V'' = V' V$. Es ist somit $V' V$ nicht nur stets $\equiv V$, (mod. $n$), sondern wir gewinnen, wenn wir $V'$ im Produkte $V' V$ die ganze $\Gamma_\mu$ durchlaufen lassen, alle mit $V$ kongruenten Substitutionen und offenbar jede einmal. *Verstehen wir demnach unter $V_0 = 1, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$ ein System modulo $n$ inkongruenter Substitutionen von $\Gamma$, so gestattet $\Gamma$ die Zerlegung:*

(2) $$\Gamma = \Gamma_\mu + \Gamma_\mu V_1 + \Gamma_\mu V_2 + \cdots + \Gamma_\mu V_{\mu-1}.$$

Der Index $\mu$ unserer Untergruppe ist gleich der Anzahl modulo $n$ inkongruenter Substitutionen und *damit gleich der Anzahl inkongruenter ganzzahliger Lösungen der Kongruenz:*

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1, \quad (\text{mod. } n),$$

*wobei zwei Lösungen, die durch gleichzeitige Zeichenwechsel der vier ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ineinander übergehen, als nicht verschieden gelten.*[1])

Ist $n = 2$, so haben wir *sechs* inkongruente Lösungen von (2), die wir gleich in der Gestalt:

$$\begin{pmatrix}1,0\\0,1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1,1\\0,1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1,0\\1,1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0,1\\1,0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1,1\\1,0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0,1\\1,1\end{pmatrix}$$

zusammenstellen. Auch für eine ungerade Primzahl $n$ ist die Anzahl $\mu(n)$ leicht abzuzählen. Die beiden Zahlen $\alpha$ und $\beta$ dürfen nicht zugleich $\equiv 0$ sein, sind aber übrigens beliebig wählbar, so daß wir $(n^2 - 1)$ Restepaare $\alpha, \beta$ haben. Ist beim einzelnen Paare $\alpha$ nicht $\equiv 0$, so kann $\gamma$ unter den $n$ Resten willkürlich gewählt werden, worauf $\delta$ aus $\alpha\delta \equiv 1 + \beta\gamma$ bestimmt ist. Haben wir aber $\alpha \equiv 0$, so bleibt $\delta$ willkürlich, und für $\gamma$ gilt $\gamma \equiv -\beta^{-1}$. Bei jedem Restepaare $\alpha, \beta$ haben wir somit $n$ inkongruente Lösungen von (2). Die gesamten $n(n^2 - 1)$ Lösungen sind aber zu je zwei als identisch anzusehen, da

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \quad \text{und} \quad -\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$$

nicht als verschieden gelten sollten. *Im Falle einer ungeraden Primzahl $n$ ist der Index $\mu(n)$ der Hauptkongruenzgruppe gegeben durch:*

(3) $$\mu(n) = \frac{1}{2} n(n^2 - 1) = \frac{1}{2} n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Im Falle einer beliebigen zusammengesetzten Zahl ist die Bestimmung von $\mu(n)$ etwas umständlicher (vgl Jordan, *„Traité des substitutions etc.“*, S. 93 (Paris, 1870) oder *„Mod“* **1**, 396) Ist $n > 2$, so zerlege man $n$ in seine Primfaktoren:

---

1) Der Angabe des Textes liegt der Satz zugrunde, daß zu jedem die Kongruenz (2) befriedigenden Quadrupel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auch wirklich kongruente Substitutionen $V$ existieren, was nicht schwer zu zeigen ist

$$n = p_1^{\nu_1} \cdot p_2^{\nu_2} \cdot p_3^{\nu_3} \cdot \ldots .$$

*Der Index $\mu(n)$ der Hauptkongruenzgruppe $n^{\text{ter}}$ Stufe ist dann gegeben durch:*

$$\mu(n) = \frac{1}{2} n^3 \left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3^2}\right) \cdots \tag{4}$$

Sehen wir modulo $n$ kongruente Substitutionen als nicht verschieden an, so reduziert sich die gesamte Modulgruppe $\Gamma$ auf die $\mu$ verschiedenen Substitutionen $1, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$. Die Kombination von zweien unter ihnen $V_i \cdot V_k$ ist mit einer bestimmten unter ihnen $V_l$ kongruent: $V_i V_k \equiv V_l$, (mod. $n$). In diesem Sinne bilden die $1, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$ wieder eine Gruppe, die wir $G_\mu$ nennen wollen: *Die Modulgruppe $\Gamma$ reduziert sich modulo $n$ auf die Gruppe $G_\mu$ endlicher Ordnung $\mu$ der inkongruenten Substitutionen* $1, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$.

Es sei jetzt $G_{\frac{\mu}{\tau}}$ irgendeine Untergruppe der Ordnung $\frac{\mu}{\tau}$ und also des Index $\tau$ in $G_\mu$. Dann können wir $\tau$ Substitutionen, die wir in der Reihe $1, V_1, V_2, \ldots$ etwa an den Anfang gesetzt denken, aus $G_\mu$ herausgreifen, so daß:

$$G_\mu = G_{\frac{\mu}{\tau}} + G_{\frac{\mu}{\tau}} V_1 + G_{\frac{\mu}{\tau}} V_2 + \cdots + G_{\frac{\mu}{\tau}} V_{\tau-1}$$

gilt. Ist $\Gamma_\tau$ der Inbegriff aller Substitutionen von $\Gamma$, deren jede mit einer von $G_{\frac{\mu}{\tau}}$ kongruent ist, so folgt aus der Gruppeneigenschaft von $G_{\frac{\mu}{\tau}}$, daß auch $\Gamma_\tau$ eine Gruppe darstellt. Dabei erweitert sich offenbar die letzte Gleichung zu:

$$\Gamma = \Gamma_\tau + \Gamma_\tau V_1 + \Gamma_\tau V_2 + \cdots + \Gamma_\tau V_{\tau-1},$$

so daß $\Gamma_\tau$ eine *Untergruppe des Index $\tau$ von $\Gamma$* wird. Wir nennen auch $\Gamma_\tau$ eine „*Kongruenzgruppe $n^{\text{ter}}$ Stufe*", insofern wir diese Gruppe dadurch erklären können, daß sie alle Substitutionen von $\Gamma$ umfaßt, welche mit denen von $G_{\frac{\mu}{\tau}}$ kongruent sind. Man sieht auch leicht umgekehrt, *daß man zu jeder solchen Kongruenzgruppe $n^{\text{ter}}$ Stufe gelangt, wenn man $G_\mu$ in ihre gesamten Untergruppen $G_{\frac{\mu}{\tau}}$ zerlegt und der einzelnen entsprechend die $\Gamma_\tau$ herstellt.* Die vollständige Zerlegung der $G_\mu$ zuerst für

Primzahlen $n$, sodann für Potenzen ungerader Primzahlen ist von Gierster (*Math. Ann.* **18**, 319, (1881) und **26**, 309 (1885)) geleistet. Einige Angaben über die Untergruppe von $G_\mu$ müssen hier genügen.

Behält man für die Substitution $\begin{pmatrix}1, 1\\0, 1\end{pmatrix}$ die S. 953 eingeführte Bezeichnung $S$ bei, so gilt $S^\nu = \begin{pmatrix}1, \nu\\0, 1\end{pmatrix}$ und also $S^n \equiv 1$ (mod. $n$), so daß $S$ eine *zyklische Untergruppe* $G_n$ von $G_\mu$ erzeugt. Um festzustellen, in wieviel gleichberechtigte Gruppen $V^{-1} G_n V$ diese $G_n$ transformierbar ist, zeige man durch Rechnung, daß eine Substitution $V$ die $G_n$ dann und nur dann in sich transformiert:

$$V^{-1} G_n V = G_n,$$

wenn der Koeffizient $\gamma$ von $V$ mit 0 kongruent ist. *Die Substitutionen mit* $\gamma \equiv 0$ (mod. $n$) *bilden offenbar eine* $G_n$ *umfassende Untergruppe, deren Ordnung man leicht zu:*

$$\frac{1}{2} n^2 \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \tag{5}$$

*bestimmt.*[1]) Dividiert man mit dieser Ordnung in $\mu(n)$, so entspringt als *Anzahl gleichberechtigter zyklischer* $G_n$:

$$\psi(n) = n\left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right) \cdots. \tag{6}$$

Aus den Gestalten der mit $S$ gleichberechtigten Substitutionen:

$$V^{-1} S V = \begin{pmatrix}1 + \gamma\delta, & \delta^2\\ -\gamma^2, & 1 - \gamma\delta\end{pmatrix}$$

folgt, daß die aus $S$ erzeugte zyklische $G_n$ unter den $\psi(n)$ gleichberechtigten $G_n$ die einzige ist, welche in der durch $\gamma \equiv 0$ charakterisierten Untergruppe der Ordnung (5) enthalten ist. *Den* $\psi(n)$ *Gruppen* $G_n$ *entsprechen demnach ebenso viele Gruppen der Ordnung (5), innerhalb deren je eine* $G_n$ *ausgezeichnet enthalten ist* (vgl. Serret, *C. R.* 1859 und 1860 sowie *„Cours d'algèbre sup.“* **2**, 363) Den aufgefundenen Gruppen entsprechen

---

1) Es ist nämlich $\alpha$ einer der $n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots$ gegen $n$ primen Reste; mit $\alpha$ ist $\delta = \alpha^{-1}$ bestimmt, während $\beta$ beliebig bleibt.

in der Modulgruppe $\Gamma$ nach obigen allgemeinen Angaben $\psi(n)$ *gleichberechtigte Kongruenzgruppen* $n^{ter}$ *Stufe* $\Gamma_{\psi(n)}$ *des Index* $\psi(n)$, von denen der Satz gilt, *daß sie im allgemeinen die bei der Stufe* $n$ *auftretenden Kongruenzgruppen von niederstem Index sind.*

Aber dieser Satz gilt nicht ausnahmslos, und zwar hat man bei Primzahlstufen $n$ *drei Ausnahmefälle*, welche mit einem S. 1006 unter dem Texte genannten Satze zusammenhängen, der von Galois (Brief an Chevalier vom 29. Mai 1832) aufgefunden und zuerst von Betti, *Ann. di scien. matem.*, **3** (1853), bewiesen wurde. Gierster fand in der ersten S. 990 genannten Abhandlung, daß für Primzahlen $n$ der Gestalt $n = 8h \pm 3$ in der $G_{\mu(n)}$ ein System von $\frac{1}{24}n(n^2-1)$ Gruppen $G_{12}$, welche mit der Tetraedergruppe isomorph sind, enthalten ist, daß ferner für Primzahlen $n$ der Gestalt $8h \pm 1$ die $G_{\mu(n)}$ ein System von $\frac{1}{24}n(n^2-1)$ Gruppen $G_{24}$ vom Oktaedertypus enthält, während sich für Primzahlen $n = 10h \pm 1$ in der $G_{\mu(n)}$ ein System von $\frac{1}{60}n(n^2-1)$ Gruppen $G_{60}$ vom Ikosaedertypus findet. *Die* $G_{12}$ *liefern Kongruenzgruppen des Index* $\frac{1}{24}n(n^2-1)$, *der für* $n = 5$ *selbst gleich 5 und also* $< \psi(5) = 6$ *ist; die* $G_{24}$ *liefern Kongruenzgruppen des Index* $\frac{1}{48}n(n^2-1)$, *der für* $n = 7$ *selbst gleich 7 und also* $< \psi(7) = 8$ *ist; endlich liefern die* $G_{60}$ *Kongruenzgruppen des Index* $\frac{1}{120}n(n^2-1)$, *der für* $n = 11$ *selbst gleich 11 und also* $< \psi(11) = 12$ *ist. Bei allen übrigen Primzahlstufen* $n$ *aber sind die* $\Gamma_{\psi(n)}$ *die Kongruenzgruppen von kleinstem Index.*

## § 21. Die Modulfunktionen und Modulformen $n^{ter}$ Stufe.

Den in der positiven $\omega$-Halbebene gelegenen Teil des „DB“ der $\Gamma_{\mu(n)}$ bezeichnen wir als *„FB“ der Hauptkongruenzgruppe* $n^{ter}$ *Stufe*. Sind $V_0 = 1, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$ wie in § 20 irgend $\mu(n)$ modulo $n$ inkongruente Substitutionen, so werden zufolge der Zerlegung (2) S. 988 von $\Gamma$ das Ausgangsdoppeldreieck $V_0 = 1$ und die $(\mu - 1)$ den Substitutionen $V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$ zugehörigen Doppeldreiecke des Netzes der Fig. 21, S 951) einen „FB“ von $\Gamma_{\mu(n)}$ liefern. Sollte dieser „FB“ zunächst aus getrennten Stücken bestehen, so können bei keinem einzelnen unter diesen Stücken die Randkurven nur wieder durchweg auf Randkurven des gleichen Stückes bezogen sein; denn ein solches Stück würde von sich aus bereits zu einer vollständigen Überdeckung der $\omega$-Halbebene führen. So lange also noch mindestens zwei getrennte Stücke vorliegen, ist nach der S. 955f. allgemein

bezeichneten Überlegung mittels des Ersatzes von Stücken durch äquivalente Stücke eine Reduktion der Anzahl der Stücke möglich. *Der „FB" der Hauptkongruenzgruppe $n^{\text{ter}}$ Stufe läßt sich als ein einziges Stück aus $\mu(n)$ Doppeldreiecken der $\omega$-Halbebene zusammensetzen.*

Es besteht der Satz: *Für $n > 1$ enthält die $\Gamma_{\mu(n)}$ nur parabolische und hyperbolische Substitutionen.* Die elliptischen $V$ der Periode 2 haben nämlich $\delta = -\alpha$, so daß aus $\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1$, (mod. $n$) leicht $n = 2$ als einzige Zahl $n > 1$ übrig bleibt. Soll aber ein solches $V$ in der $\Gamma_{\mu(2)}$ enthalten sein, so müßten $\beta$ und $\gamma$ gerade sein, und also wäre

$$-\beta\gamma = 1 - \alpha\delta = 1 + \alpha^2 \equiv 0, \text{ (mod. 4)},$$

was unmöglich ist, da das Quadrat der ungeraden Zahl $\alpha$ mod. 4 mit 1 kongruent ist. Die weiter in der Modulgruppe noch auftretenden elliptischen $V$ haben die Periode 3, und bei ihnen kann man $\delta = 1 - \alpha$ setzen. Aus $\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1$, (mod. $n$) folgert man leicht $n = 3$ und $\alpha \equiv -1$ (mod. 3). Soll aber $V$ in der $\Gamma_{\mu(3)}$ enthalten sein, so würden $\beta$ und $\gamma$ Multipla von 3 sein und also müßte:

$$-\beta\gamma = 1 - \alpha\delta = 1 - \alpha + \alpha^2 \equiv 0, \text{ (mod. 9)}$$

gelten; jedoch gibt es keine diese Kongruenz befriedigende Zahl $\alpha$.

Am „FB" kommen dieserhalb *keine festen Ecken elliptischen Charakters* vor. Dagegen hat jedes Doppeldreieck $V = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ des „FB" eine parabolische Spitze, und an die gleiche Spitze ragen mit jenem Doppeldreieck benachbart auch noch die inäquivalenten Doppeldreiecke der Substitutionen:

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta + \alpha\\ \gamma, \delta + \gamma\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha, \beta + 2\alpha\\ \gamma, \delta + 2\gamma\end{pmatrix}, \ldots, \quad \begin{pmatrix}\alpha, \beta + (n-1)\alpha\\ \gamma, \delta + (n-1)\gamma\end{pmatrix}$$

heran, während das folgende mit dem ersten, $V$, äquivalent wird. Der „FB" ist so gestaltet, *daß an $\frac{\mu(n)}{n}$ parabolische Punkte je ein Kranz von $n$ Doppeldreiecken heranragt.*

Transformieren wir den „FB" durch eine beliebige Substitution $V$ von $\Gamma$, so ist der Bereich $V$(„FB") ein „FB" für die mit $\Gamma_\mu$ gleichberechtigte Gruppe $V\Gamma_\mu V^{-1}$. Aber die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_\mu$ ist eine *ausgezeichnete* Untergruppe von $\Gamma$. Somit ist $V$(„FB") wieder ein „FB" für $\Gamma_\mu$ selbst. Dies ist

selbstverständlich, wenn $V$ der $\Gamma_\mu$ selbst angehört; dagegen erhalten wir eine wichtige Eigenschaft unseres „FB", wenn wir $V$ der Reihe nach mit unseren $\mu$ inkongruenten Substitutionen:

$$V_0, V_1, \ldots, V_{\mu-1}$$

gleich setzen. Indem $V$ („FB") durch „erlaubte Abänderung" (s. S. 933) wieder in „FB" überführbar ist, ergibt sich: *Der „FB" der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_{\mu(n)}$ gestattet, den inkongruenten Substitutionen $V_0 = 1, V_1, \ldots, V_{\mu-1}$ entsprechend, $\mu$ Transformationen in sich, welche eine neue Darstellungsform unserer in § 20 betrachteten Gruppe $G_{\mu(n)}$ liefern.*

Man kann hier sogar noch einen Schritt weiter gehen und benutzen, daß $\Gamma_\mu$ auch durch die Substitution zweiter Art:

$$\omega' = -\bar{\omega}$$

der erweiterten $\bar{\Gamma}$ (Spiegelung an der imaginären $\omega$-Achse) in sich transformiert wird. Man erkennt: *Der „FB" der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_\mu$ besitzt sogar eine Gruppe $G_{2\mu}$ von Transformationen in sich, welche aus der $G_\mu$ durch Kombination mit der Spiegelung $\omega' = -\bar{\omega}$ hervorgeht.*

Diese Sätze haben wichtige Folgen für die zu $\Gamma_{\mu(n)}$ gehörenden Funktionen $\varphi(\omega)$, welche wir als *„Modulfunktionen $n^{ter}$ Stufe"* bezeichnen wollen. Von diesen Funktionen kennen wir unmittelbar die Funktion $J(\omega)$, welche zur Gesamtgruppe $\Gamma$ und also auch zu jeder Untergruppe gehört. Diese Funktion $J$ ist im „FB" $\mu$-wertig und bildet den „FB" somit nach S. 965 auf *eine $\mu$-blättrige Riemannsche Fläche $F_\mu$* ab, wobei das einzelne Blatt dem einzelnen der $\mu$ Doppeldreiecke entspricht. Aus der Beziehung der $J$-Ebene auf das einzelne Doppeldreieck und den obigen Angaben über feste Ecken am „FB" folgt: *Die Verzweigungspunkte der $F_\mu$ liegen ausnahmslos bei $J = 0, 1$ und $\infty$; und zwar finden sich $\frac{1}{3}\mu$ dreiblättrige Verzweigungspunkte bei $J = 0$, $\frac{1}{2}\mu$ zweiblättrige bei $J = 1$ und $\frac{1}{n}\mu$ Verzweigungspunkte mit je $n$ zusammenhängenden Blättern bei $J = \infty$.* Diese Fläche gestattet nun *$\mu$ unsere $G_\mu$ bildende Transformationen in sich* (die identische Transformation mitgezählt), bei denen die $\mu$ Blätter Permutationen erfahren, und von denen die einzelne dadurch fixiert werden kann, daß man angibt, in welches der $\mu$ Blätter ein erstes übergehen soll: *Die $F_\mu$ ist demnach um jedes ihrer Blätter genau so herumgelagert wie um jedes andere und*

*heißt dieserhalb nach Klein, Math. Ann.* **14**, 148 und 458 (1878) *und Dyck, Math. Ann.* **17**, 473 (1880) und **20**, 1 (1881) *„regulär"; nimmt man auch noch die $\mu$ Transformationen „zweiter Art" der $\overline{G}_{2\mu}$ hinzu, denen der Übergang vom Werte $J$ zum konjugiert komplexen Werte $J$ zugehört, so ist $F_\mu$ dementsprechend sogar als „regulär-symmetrisch" zu bezeichnen.*

Die $G_\mu$ (um nur bei dieser zu verweilen), kann man auch in algebraischer Gestalt darstellen. Ist $z = \varphi(\omega)$ eine zweite Modulfunktion $n^{\text{ter}}$ Stufe und also eine zur $F_\mu$ gehörende algebraische Funktion von $J$, so dürfen wir $z$ so gewählt denken, daß das einzelne System zusammengehöriger Werte $z, J$ nur in einem Punkte von $F_\mu$ eintritt. Die nach (5) S. 966 bestehende algebraische Gleichung:

$$G(z, J) = 0 \tag{1}$$

$\mu^{\text{ten}}$ Grades in $z$ ist dann irreduzibel, und jede weitere Modulfunktion $n^{\text{ter}}$ Stufe gestattet nach (4) S. 966 rationale Darstellung $R(z, J)$ in $z$ und $J$. Nun geht $z = \varphi(\omega)$ durch die $\mu$ inkongruenten Substitutionen $V_0 = 1, V_1, \ldots, V_{\mu-1}$ in die $\mu$ verschiedenen Funktionen:

$$z = \varphi(V_0(\omega)), \quad z_1 = \varphi(V_1(\omega)), \cdots, \quad z_{\mu-1} = \varphi(V_{\mu-1}(\omega)) \tag{2}$$

über, wobei $z_i$ zur Gruppe $V_i^{-1}\Gamma_\mu V_i$, also selbst wieder zur $\Gamma_\mu$ gehört. Demnach gewinnen wir für die $\mu$ Funktionen (2) $\mu$ rationale Darstellungen:

$$z_i = R_i(z, J), \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, \mu - 1, \tag{3}$$

von denen die erste die Identität $z_0 = z$ ist. *Hier haben wir eine algebraische Ausdrucksform unserer Gruppe $G_\mu$ der $\mu$ Transformationen der Riemannschen Fläche in sich gewonnen.*

In (2) liegen die $\mu$ Wurzeln der Gleichung $\mu^{\text{ten}}$ Grades (1) für $z$ vor. Da jede unter ihnen zufolge (3) rational in einer ersten und $J$ darstellbar ist, so bezeichnen wir die Gleichung (1) als eine „Galoissche *Gleichung*" (vgl. Kap 4, § 10); sie ist ihre eigene „Galoissche *Resolvente*."

Das Geschlecht $p$ der Fläche $F_\mu$ bestimmt man nach der bekannten Regel (Kap. XVII, § 2):

$$p = -\mu + 1 + \sum \frac{\nu - 1}{2}, \tag{4}$$

wo sich die Summe auf die Verzweigungspunkte bezieht und $\nu$

die Blätteranzahl des einzelnen ist. Aus der oben angegebenen Verzweigung der $F_\mu$ folgt sofort:

$$p = 1 - \frac{5\mu}{12} + \frac{(n-1)\mu}{2n}.$$

Für die niedersten Stufen berechnet man folgende Werte:

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | 6 | 12 | 24 | 60 | 72 | 168 | 192 | 324 | 360 | 660 |
| $p$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 5 | 10 | 13 | 26 |

Die ersten vier Fälle $n = 2, 3, 4$ und $5$ liefern also $p = 0$. Wählt man hier $z = \varphi(\omega)$ als *Hauptfunktion*, so werden die $\mu$ Funktionen $z_i$ rational, und zwar linear in $z$ darstellbar:

$$z_i = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}. \tag{5}$$

*Die hier eintretenden Gruppen $G_6$, $G_{12}$, $G_{24}$, $G_{60}$ erkennt man als die Gruppen des Dieders (für $n = 3$), des Tetraeders, des Oktaeders und des Ikosaeders wieder.* Die konforme Abbildung der $F_\mu$ auf die $z$-Kugel liefert hier unmittelbar die S. 945 besprochenen regulären Kugelteilungen die Dieders usw. wieder (cf. Klein, *Math. Ann.* **14**, 148 (1878) und „*Mod*" **1**, 612 ff.).

Über die Behandlung der Hauptkongruenzgruppe 6ter Stufe, welche keine besonderen Schwierigkeiten bietet, sehe man „*Mod.*" **1**, 679 ff Für $n > 6$ kann man zeigen, *daß keine unter den Flachen $F_\mu$ hyperelliptisch ist* Zur Darstellung der Funktionen der einzelnen $\Gamma_\mu$ ist es dann nicht zweckmäßig, die Funktion $J(\omega)$ mit heranzuziehen, da die Wertigkeit $\mu$ derselben zu hoch ist. So wird z B bei $n = 7$ die Funktion $J$ die Wertigkeit 168 haben, während auf der $F_{168}$ dreiwertige Funktionen existieren

Um einen in jedem Falle $n \geqq 7$ passenden Ansatz zu gewinnen, gehen wir auf ein *System von $p$ linear-unabhangigen Integralen erster Gattung unserer Flache $F$* zuruck und nennen dieselben als Funktionen von $\omega$ etwa $j_1(\omega), j_2(\omega), \ldots, j_p(\omega)$. Dieselben sind eindeutige Funktionen von $\omega$ (s S 968), welche sich gegenüber den Substitutionen der $\Gamma_\mu$ bis auf additive Konstante reproduzieren. Demnach haben wir in:

$$\varphi_k(\omega_1, \omega_2) = \frac{d j_k(\omega)}{\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1} = -\frac{1}{\omega_2^2}\frac{d j_k(\omega)}{d\omega} \tag{6}$$

*p eindeutige Modulformen* $(-2)^{ter}$ *Dimension unserer* $\Gamma_\mu$, die man „*Modulformen* $n^{ter}$ *Stufe*" nennt. Nach bekannten Sätzen (vgl. Kap. XVII, § 5 u. 6) ist der Quotient zweier linearer homogener Kombinationen der $p$ Formen $\varphi_k(\omega_1, \omega_2)$, welcher eine *Modulfunktion* $n^{ter}$ *Stufe* liefert, auf der $F_\mu$ eine $(2p-2)$-wertige Funktion. Statt daß wir aber zwei solche Quotienten zur Darstellung aller Funktionen der $\Gamma_\mu$ wählen, ist es der Symmetrie halber richtig, *alle* $p$ *Formen* $\varphi_k(\omega_1, \omega_2)$ *koordiniert* nebeneinander zu behalten, welche alsdann durch ihre Verhältnisse $(p-1)$ Funktionen repräsentieren, und zwischen denen somit $(p-2)$ homogene Relationen:

$$(7) \qquad G_i(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_p) = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, p-2)$$

bestehen werden. Dieser Ansatz gestattet eine die Sprechweise sehr erleichternde geometrische Deutung. Interpretieren wir die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ als *homogene Koordinaten eines Raumes* $R_{p-1}$ *von* $(p-1)$ *Dimensionen*, so wird durch die $(p-2)$ Relationen (7) *eine „Kurve" des* $R_{p-1}$ *dargestellt, welche ein eindeutiges Abbild der* $F_\mu$ *ist, und welche demnach vom Grade* $(2p-2)$ *ist*, insofern eine lineare Verbindung $(a_1\varphi_1 + \cdots + a_p\varphi_p)$ in $(2p-2)$ Punkten der $F_\mu$ und also in ebenso vielen Punkten der Kurve verschwindet. Die Kurve werde demnach durch $K_{2p-2}$ bezeichnet.

Wie wir oben sahen, gestattet die Riemannsche Fläche $\mu$ Transformationen in sich. Bei der einzelnen derselben geht das Integral $j_i$ stets wieder in ein solches $j_i'$ über, so daß:

$$j_i' = a_{i0} + a_{i1}j_1 + a_{i2}j_2 + \cdots + a_{ip}j_p$$

gelten wird. Auf die Modulformen $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ übt jene Transformation also die Wirkung aus:

$$(8) \qquad \varphi_i' = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \cdots + a_{ip}\varphi_p, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

*so daß unsere Kurve* $K_{2p-2}$ *im* $R_{p-1}$ *jenen* $\mu$ *Transformationen entsprechend* $\mu$ *Kollineationen in sich zuläßt*. Die Funktion $J(\omega)$ wird, in den $\varphi_i$ dargestellt, *eine absolute Invariante der Kollineationen* (8) ergeben. Man wird im Anschluß an (14) S. 986 eine Darstellung:

$$(9) \quad J:(J-1):1 = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots) : \Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots) : X(\varphi_1, \varphi_2, \ldots),$$

anstreben, wo die homogenen Funktionen $\Phi$, $\Psi$, $X$ der $\varphi_i$ gleichfalls Invarianten der Substitutionen (8) sind, die entweder ab-

solut sind oder gegenüber (8) denselben Faktor annehmen (vgl. Klein, *Math. Ann.* **17**, 62ff. sowie „*Mod.*" **1**, 589ff.).

Im niedersten Falle $n = 7$ haben wir *drei* Modulformen $\varphi_k(\omega_1, \omega_2)$, die durch *eine* homogene Gleichung (7) vom *vierten* Grade aneinander gebunden sind. *Durch diese Gleichung wird eine ebene Kurve vierten Grades mit 168 Kollineationen in sich dargestellt.* Auf Grund der oben angegebenen Verzweigung der Fläche $F_{168}$ und der bekannten geometrischen Theorie der Kurven $K_4$ gelang es Klein, *Math. Ann.* **14**, 428ff. (1878), die Theorie jener speziellen $K_4$ mit 168 Kollineationen bis ins einzelne durchzubilden. Bei zweckmäßiger „Auswahl des Koordinatensystems" wird die Gleichung (7):

$$(10) \qquad \varphi_1{}^3\varphi_2 + \varphi_2{}^3\varphi_3 + \varphi_3{}^3\varphi_1 = 0.$$

Auch gelang es Klein, die in der Relation (9) rechtsstehenden drei Invarianten der 168 Kollineationen durch invariante Prozesse aus der linken Seite der Gleichung (10) zu gewinnen (s. auch „*Mod.*" **1**, 732ff.).

Mit größer werdendem $n$ steigen die Schwierigkeiten der analogen Betrachtung schnell. Dagegen gibt es noch zwei von den bezüglichen Hauptkongruenzgruppen verschiedene *ausgezeichnete Kongruenzgruppen 8ter und 16ter Stufe,* welche leichter zugänglich erscheinen. Die bei $n = 8$ auftretende $G_{192}$ enthält eine ausgezeichnete $G_2$, bestehend aus den Substitutionen 1 und $\begin{pmatrix}5, 0\\0, 5\end{pmatrix}$, die bei $n = 16$ auftretende $G_{1536}$ eine ausgezeichnete $G_4$, bestehend aus den Substitutionen 1, $\begin{pmatrix}5, 8\\8, 13\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}9, 0\\0, 9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}13, 8\\8, 5\end{pmatrix}$, Angaben, die man leicht durch Rechnung beweist Entsprechend haben wir *eine ausgezeichnete Kongruenzgruppe 8ter Stufe* $\Gamma_{96}$ *und eine ebensolche 16ter Stufe* $\Gamma_{384}$.

Die eingehende Untersuchung zeigt, daß man zu den Funktionen dieser Gruppen *durch Wurzelziehungen von der Hauptfunktion der Kongruenzgruppe 2ter Stufe* $\Gamma_6$ gelangen kann. Aus der Theorie der elliptischen Funktionen ist bekannt, daß der *Legendre-Jacobische Integralmodul* $k^2$, als Funktion des Periodenquotienten $\omega$ aufgefaßt, eine eindeutige Modulfunktion ist, die bei den mod 2 mit 1 kongruenten Substitutionen unverändert bleibt (vgl. Kap. XVI, § 7). Diese Funktion $k^2(\omega)$ ist, wie schon Gauß bekannt war (s. die historischen Notizen am Schlusse), geradezu diejenige Funktion, welche wir hier als

*Hauptfunktion der $\Gamma_6$ zweiter Stufe* zu bezeichnen haben. Neben $k^2(\omega)$ könnten wir auch den *„komplementären Integralmodul"* $k'^2(\omega) = 1 - k^2(\omega)$ als solche Hauptfunktion brauchen. In den drei parabolischen Spitzen des „FB" nimmt $k^2(\omega)$ die Werte 0, 1, $\infty$ an, und dasselbe gilt demnach von $k'^2(\omega)$. Aus den Eindeutigkeitssätzen (S. 967 ff.) kann man demnach den Schluß ziehen, *daß auch $\sqrt[8]{k^2}$ und $\sqrt[8]{k'^2}$ eindeutige Modulfunktionen sind.* Von diesen Funktionen sind nun $k$, $k'$ sowie $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ und endlich $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ seit lange in der Theorie der elliptischen Funktionen aufgetreten. *Die beiden durch die Relation:*

$$(11) \qquad (\sqrt{k})^4 + (\sqrt{k'})^4 = 1$$

*verbundenen Funktionen $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ sind Modulfunktionen $8^{ter}$ Stufe der $\Gamma_{96}$, und die beiden durch:*

$$(12) \qquad (\sqrt[4]{k})^8 + (\sqrt[4]{k'})^8 = 1$$

*aneinander gebundenen Funktionen $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ sind Modulfunktionen $16^{ter}$ Stufe der $\Gamma_{384}$* (vgl. „*Mod.*" 1, 656). Versteht man unter $x_1, x_2, x_3$ homogene Koordinaten in der Ebene und setzt erstlich

$$x_1 : x_2 : x_3 = \sqrt{k} : \sqrt{k'} : e^{\frac{\pi i}{4}},$$

so folgt aus (11):

$$(13) \qquad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0,$$

wodurch eine *Kurve $K_4$ vierter Ordnung vom Geschlechte $p = 3$* dargestellt wird, die *96 leicht angebbare Kollineationen* in sich zuläßt; dieselbe ist eindeutig auf die Riemannsche Fläche $F_{96}$ bezogen, deren Geschlecht man nach der Regel (4) leicht zu $p = 3$ bestimmt. Setzt man andrerseits:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \sqrt[4]{k} : \sqrt[4]{k'} : e^{\frac{\pi i}{8}},$$

so liefert (12) die durch:

$$(14) \qquad x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = 0$$

*dargestellte $K_8$ als Abbild der Fläche $F_{384}$*, wobei man das Geschlecht der Kurve und der Fläche übereinstimmend zu $p = 21$ findet. Die *384 Kollineationen derselben in sich* gehen aus den

Formeln hervor, welche Hermite, *C. R.* **46**, 508 ff. (1858), über das Verhalten der von ihm mit

$$\varphi(\omega) = \sqrt[4]{k} \text{ und } \psi(\omega) = \sqrt[4]{k'}$$

bezeichneten Funktionen gegenüber den Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ aufstellte (vgl. Königsberger, *Vorles. ü. d. Theorie d. ellipt. Funkt.*, **2**, 112 (1874) und *„Mod."* **1**, 670).[1])

## § 22. Herstellung von Modulformen aus elliptischen Funktionen.

Für die $n^{\text{te}}$ Stufe kann man aus der Weierstraßschen Funktion $\wp(u \mid \omega_1, \omega_2)$ auf folgende Art Modulformen herstellen. Man verstehe unter $\lambda$ und $\mu$ zwei nicht zugleich verschwindende ganze Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ und trage an Stelle von $u$ in $\wp$ den Wert $\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$ ein. Die nur noch von $\omega_1$ und $\omega_2$ allein abhängende Funktion:

$$(1) \qquad \wp_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2) = \wp\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \,\middle|\, \omega_1, \omega_2\right),$$

welche *homogen* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension in den* $\omega_1, \omega_2$ ist, erweist sich (zufolge leichter Rechnung) als *Modulform* $n^{\text{ter}}$ *Stufe* und heißt insbesondere eine *ganze Modulform*, weil man zeigen kann, daß dieselbe im „FB" der $\Gamma_{\mu(n)}$ nicht unendlich wird. Diese *„Teilwerte"* der $\wp$-Funktion sind von Kiepert, *Math. Ann* **26**, 369 (1885) näher untersucht. Hurwitz, *Math. Ann.* **25**, 183 (1884) und *Leipz. Ber* vom 4 Mai 1885, gründete auf die $\wp$-Teilwerte eine in *„Mod"* **2**, 557 ff. dargestellte Theorie zur Gewinnung von *Potenzreihen nach* $q = e^{\pi i \omega}$ *für die p Integrale erster Gattung bei Primzahlstufen n* Wie sich hierbei ergab, kann man die Integrale stets so wählen, *daß die p aus ihnen durch Differentiation hervorgehenden Modulformen* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension (6) S. 995 durchweg ganzzahlige Entwicklungskoeffizienten bekommen.* Dieser für die Theorie der Modularkorrespondenzen

1) Klein behauptete (*Math. Ann.* **17**, 65 (1879)), daß unter den gesamten Funktionen $\sqrt[n]{k^2}$ die oben genannten $k$, $\sqrt{k}$, $\sqrt[4]{k}$ die einzigen seien, deren Untergruppen $\Gamma_\mu$ durch Kongruenzen darstellbar seien, bewiesen ist diese Behauptung gleichzeitig durch Pick, *Math Ann* **28**, 119 (1886) und Fricke, *Math Ann* **28**, 99 (1886)

grundlegende Satz werde für $n = 7$ erläutert; die drei hier eintretenden Formen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind darstellbar durch:

$$(2)\qquad \varphi_k(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \sum_{m \equiv k^2} \psi(m)\, q^{\frac{2m}{7}},$$

wobei sich die Summe auf alle ganzen positiven mod. 7 mit $k^2$ kongruenten Zahlen bezieht und $\psi(m)$ eine von $m$ abhängige ganze Zahl ist. Um diese *„zahlentheoretische Funktion"* $\psi(m)$ zu erklären, hat man alle Darstellungen von $4m$ in der Gestalt:

$$4m = x^2 + 7y^2$$

durch positive oder negative ganze Zahlen $x, y$ herzustellen; dann ist:

$$(3)\qquad 4\psi(m) = \sum \left(\frac{x}{7}\right) x,$$

wo sich die Summe auf alle jene Darstellungen bezieht und $\left(\frac{x}{7}\right)$ das Legendresche Zeichen aus der Theorie der quadratischen Reste ist.

Die *„Teilwerte" der Weierstraßschen Funktion* $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$ hat Klein, *Leipz. Abh.* **13**, 339 (1885), in folgender Weise zu Modulformen ausgestaltet:

$$(4)\qquad \sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2) = -e^{-\frac{(\lambda\eta_1 + \mu\eta_2)(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)}{2n^2}}\, \sigma\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \,\middle|\, \omega_1, \omega_2\right).$$

Hier sind $\eta_1, \eta_2$ die Perioden des elliptischen Normalintegrales zweiter Gattung, welche, als Funktionen der $\omega_1, \omega_2$ aufgefaßt, gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe die gleichen Substitutionen erfahren wie $\omega_1, \omega_2$. Die ganzen Zahlen $\lambda, \mu$ durchlaufen dieselben Wertepaare wie in (1). Die Beziehung der $\sigma$-Funktion zur Jacobischen $\vartheta_1$-Funktion (vgl. Kap. XVI, § 1) liefert für die Modulform (4):

$$(5)\qquad \sqrt[8]{\Delta}\cdot \sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2) = -\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\, e^{\frac{\lambda i\pi(\lambda\omega + \mu)}{2n^2}}\, \vartheta_1\left(\frac{\lambda\omega + \mu}{n}\pi\right).$$

Aus den a. a. O. angegebenen analytischen Darstellungen von $\vartheta_1$ folgt als *Potenzreihe für* $\sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2)$:

$$(6)\quad \sqrt[8]{\Delta}\cdot \mathfrak{S}_{\lambda,\mu}(\omega_1,\omega_2)$$
$$= i\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\, e^{\frac{\pi i \mu(\lambda+n)}{n^2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{\frac{2 i \pi \mu m}{n}} q^{\left(m+\frac{2\lambda+n}{2n}\right)^2}$$

sowie als *Produktentwicklung:*

$$(7)\qquad \sqrt[12]{\Delta}\cdot \mathfrak{S}_{\lambda,\mu} = -i e^{\frac{\pi i \mu(\lambda-n)}{n^2}} q^{\frac{\lambda(\lambda-n)}{n^2}+\frac{1}{9}}\,\cdot$$
$$\prod_{m=0}^{\infty}\left(1-e^{\frac{2 i\pi\mu}{n}} q^{2m+\frac{2\lambda}{n}}\right)\cdot \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{-\frac{2 i\pi\mu}{n}} q^{2m-\frac{2\lambda}{n}}\right),$$

wo $\Delta$ überall die in (13) S. 986 gegebene Modulform erster Stufe ist. Aus (7) folgt: *Die Modulform* $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu}(\omega_1,\omega_2)$ *ist im „FB" der* $\Gamma_{\mu(n)}$ *abgesehen von den parabolischen Spitzen überall endlich und von* 0 *verschieden.* Die Formen $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu}(\omega_1,\omega_2)$ sind zur Darstellung der in § 21 betrachteten Funktionen in Reihen oder in Produkten, die nach Potenzen von $q$ fortschreiten, sehr geeignet; z. B. gilt für die Funktionen $\sqrt{k}$ und $\sqrt{k'}$ in den zu $n=2$ gehörenden $\mathfrak{S}_{\lambda,\mu}$:

$$\sqrt{k} = e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\mathfrak{S}_{01}(\omega_1,\omega_2)}{\mathfrak{S}_{11}(\omega_1,\omega_2)}, \qquad \sqrt{k'} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{\mathfrak{S}_{10}(\omega_1,\omega_2)}{\mathfrak{S}_{11}(\omega_1,\omega_2)}.$$

Klein hat seine S. 997 genannten Untersuchungen über die Stufe $n=7$ ohne Zuhilfenahme der elliptischen Funktionen auch noch auf die nächste Primzahlstufe $n=11$ ausgedehnt (*Math. Ann* **15**, 533 (1879)). Jedoch arbeitet er hier nicht mit ($p=$) 26 Modulformen, welche durch Differentiation aus den Integralen erster Gattung entstehen, sondern mit $\frac{n-1}{2}=5$ Modulformen, deren Quotienten 20-wertige Funktionen im zugehörigen „FB" sind. Sie substituieren sich gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe linear und homogen liefern dabei eine zur $G_{660}$ isomorphe Gruppe solcher Substitutionen.

Diese Entwicklungen, welche ihre wesentliche Bedeutung insbesondere in der Theorie der Modulargleichung für den elften Transformationsgrad (vgl § 23) fanden, hat Klein, *Leipz. Abh.* **13**, 339 (1885), unter Benutzung von Sätzen über doppeltperiodische Funktionen für beliebiges $n$ verallgemeinert. Das Ziel ist, bei der einzelnen Stufe eine *möglichst kleine Anzahl*

*von Modulformen* so zu wählen, daß sie sich gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe $\Gamma$ *homogen und linear substituieren.* Nach einem Satze von Hermite (Brief an Jacobi vom August 1844, *J. f. Math.* 32), der als Spezialfall des Riemann-Rochschen Satzes (vgl. Kap. XVII, § 6) angesehen werden kann, gibt es bei gegebenem Periodenparallelogramm nur $(n-1)$ linear-unabhängige $n$-wertige doppeltperiodische Funktionen mit gegebenen $n$ Polen. Stellt man diese Funktionen in bekannter Weise durch Quotienten $n$-gliedriger $\sigma$-Produkte gleicher Residuensummen dar, so spricht sich der Hermitesche Satz dahin aus, daß unter allen $\sigma$-Produkten:

$$\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n) \tag{8}$$

mit gegebener Residuensumme $(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ nur $n$ linear-unabhängige wählbar sind, in denen dann alle übrigen linear und homogen mit von $u$ unabhängigen Koeffizienten darstellbar werden.

Nun wählt Klein a. a. O. zunächst für beliebige ungerade Stufen $n$ linear-unabhängige Produkte (8) aus, welche in gewissen Perioden-$n$-teilen $\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}$ verschwinden. Hierdurch wird erzielt, daß nach Zusatz geeigneter, nur noch von $\omega_1$, $\omega_2$ abhängender Exponentialfaktoren $n$ Funktionen entstehen, die gegenüber den Substitutionen der $\Gamma_{\mu(n)}$ invariant sind und also Modulformen $n^{\text{ter}}$ Stufe liefern. Übt man aber irgendeine nicht in der $\Gamma_{\mu(n)}$ enthaltene Substitution von $\Gamma$ aus, so geht die einzelne Funktion in ein neues Produkt (8) über, das nach dem Hermiteschen Satze linear und homogen in den ausgewählten $n$ Funktionen darstellbar ist. Die gewählten $n$ Funktionen sind die von Klein a. a. O. mit

$$X_0(u\,|\,\omega_1,\omega_2),\quad X_1(u\,|\,\omega_1,\omega_2),\ldots,\quad X_{n-1}(u\,|\,\omega_1,\omega_2)$$

bezeichneten Größen. Für ihr Verhalten gegenüber den beiden Erzeugenden[1]) der homogenen $\Gamma$ Modulgruppe findet Klein:

$$X_\lambda(u\,|\,\omega_1+\omega_2,\omega_2) = e^{-\frac{\pi i\lambda(n-\lambda)}{n}}\,X_\lambda(u\,|\,\omega_1,\omega_2), \tag{9}$$

$$X_\lambda(u\,|-\omega_2,\omega_1) = \frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}\sum_{\mu=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi\lambda\mu}{n}}\,X_\mu(u\,|\,\omega_1,\omega_2). \tag{10}$$

1) S. die S. 953 mit $S$ und $T$ bezeichneten Erzeugenden der Modulgruppe

Die Funktion $X_0(u)$ verschwindet für $u = 0$, da sie den Faktor $\sigma(u)$ selbst hat. Die $(n-1)$ übrigen $X(u)$ verschwinden für $u = 0$ nicht, jedoch wird:

$$X_{n-1}(0) = -X_1(0),\; X_{n-2}(0) = -X_2(0), \cdots,$$

so daß man nur noch $\frac{n-1}{2}$ verschiedene „Nullwerte" erhält. *Diese sind dann von $\omega_1, \omega_2$ allein abhängig und stellen uns $\frac{n-1}{2}$ Modulformen $n^{\text{ter}}$ Stufe:*

$$(11) \qquad z_\lambda(\omega_1, \omega_2) = X_\lambda(0 \mid \omega_1, \omega_2)$$

*dar, welche sich gegenüber den Substitutionen der Gruppe $\Gamma$ homogen und linear substituieren; speziell folgt aus (9) und (10):*

$$z_\lambda(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = e^{-\frac{\pi i \lambda(n-\lambda)}{n}} z_\lambda(\omega_1, \omega_2),$$

$$z_\lambda(-\omega_2, \omega_1) = -\frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \sum_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(e^{\frac{2 i\pi\lambda\mu}{n}} - e^{-\frac{2 i\pi\lambda\mu}{n}}\right) z_\mu(\omega_1, \omega_2).$$

Durch Rückgang auf die $\vartheta_1$-Reihe findet Klein als Reihendarstellung seiner Funktion $z_\lambda$:

$$(12) \quad (\sqrt[8]{\Delta})^n z_\lambda = (-1)^{\lambda+1} i \sqrt{n} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{\frac{((2m+1)n-2\lambda)^2}{4n}}$$

Für $n = 7$ sind die drei Produkte $z_\lambda \cdot \Delta$ direkt die drei S. 997 mit $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ bezeichneten Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, und für $n = 11$ gelangt man zu den 5 von Klein a. a. O. benutzten Modulformen zurück.

Hurwitz, *Math Ann.* 27, 183 (1885), gab die entsprechende Theorie für beliebiges gerades $n$ und Verallgemeinerungen für alle Stufen $n$. Übrigens sei auf *„Mod"* 2, 236ff. sowie auf die Übertragung des Prinzips der Stufeneinteilung auf die gesamte Theorie der elliptischen Funktionen verwiesen, welche in Kap. XVI, § 23, S. 845 erwähnt ist.

## § 23. Modulargleichungen und Modularkorrespondenzen.

Unter $U$ verstehen wir die Transformation der Periode 2:

$$(1)\qquad \omega' = U(\omega) = \frac{-1}{n\omega}, \qquad (U^2 = 1).$$

Die Modulgruppe $\Gamma$ werde durch $U$ in die Gruppe

$$\Gamma' = U^{-1}\Gamma U$$

transformiert, die ihrerseits wegen $U^2 = 1$ durch $U$ wieder in $\Gamma$ zurücktransformiert wird. Für die einzelne Substitution von $\Gamma$ berechnet man:

$$(2)\qquad U^{-1}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} U = \begin{pmatrix}\delta, -\left(\frac{\gamma}{n}\right)\\ -n\beta, \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha', \beta'\\ \gamma', \delta'\end{pmatrix},$$

so daß $\Gamma'$ aus allen Substitutionen der Determinante 1 besteht, in denen der erste und vierte Koeffizient $\alpha'$, $\delta'$ ganzzahlig sind, während $\beta'$ der $n^{\text{te}}$ Teil einer ganzen Zahl und $\gamma'$ das $n$-fache einer solchen ist. *Die beiden Gruppen $\Gamma$ und $\Gamma'$ sind kommensurabel (vgl. Kap. III, § 2), d. h. sie haben eine gemeinsame Untergruppe von endlichem Index.* In der Tat gehören alle Substitutionen (2) mit ganzzahligen $\beta'$ auch der $\Gamma$ an und bilden in ihr die durch $\gamma \equiv 0 \pmod{n}$ erklärte Kongruenzgruppe $n^{\text{ter}}$ Stufe $\Gamma_{\psi(n)}$, deren Index wir S. 990 zu:

$$(3)\qquad \psi(n) = n\left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right)\cdots$$

berechneten. *Die Gruppe $\Gamma_{\psi(n)}$, die zufolge (2) durch die Substitution $U$ in sich transformiert wird, ist die gemeinsame Untergruppe von $\Gamma$ und $\Gamma'$.*

Die zur Gruppe $\Gamma'$ gehörende Hauptfunktion:

$$(4)\qquad J'(\omega) = J(U(\omega)) = J\left(\frac{-1}{n\omega}\right) = J(n\omega)$$

ist demnach zugleich eine zur $\Gamma_\psi$ gehörende Modulfunktion $n^{\text{ter}}$ Stufe und ist also nach (5) S. 966 mit $J(\omega)$ durch eine *irreduzibele Gleichung:*

$$(5)\qquad G(J'(\omega), J(\omega)) = 0$$

verbunden, *welche in $J'$ vom Grade $\psi(n)$ ist.* Trägt man $U(\omega)$ für $\omega$ in (5) ein, so folgt wegen $U^2 = 1$ offenbar

$$G(J(\omega)), J'(\omega)) = 0,$$

*so daß die Gleichung (5) bei Vertauschung von $J$ und $J'$ in sich selbst übergeht und also auch $J$ in (5) auf den Grad $\psi(n)$ steigt.* Im Anschluß an die Stufe 1 von $J(\omega)$ und die Zahl $n$ heißt die Gleichung (5) *Modulargleichung erster Stufe für Transformation $n^{ten}$ Grades.*

Setzt man in (5) statt $\omega$ eine beliebige Substitution $V(\omega)$ der Modulgruppe ein, so folgt wegen $J(V(\omega)) = J(\omega)$:

$$G\left(J'(V(\omega)), J(\omega)\right) = 0.$$

Man gewinnt bereits alle $\psi$ Lösungen $J'$ der Modulargleichung in der Gestalt:

$$J^{(\nu)}(\omega) = J'(V_\nu(\omega)) = J\left(\frac{n\alpha_\nu\omega + n\beta_\nu}{\gamma_\nu\omega + \delta_\nu}\right), \tag{6}$$

wenn man $V_1 = 1, V_2, \ldots, V_\psi$ als ein System bezüglich $\Gamma_{\psi(n)}$ inäquivalenter Substitutionen wählt. Offenbar gehört $J^{(\nu)}(\omega)$ als Modulfunktion $n^{ter}$ Stufe zur Gruppe $V_\nu^{-1}\Gamma_\psi V_\nu = \Gamma_\psi^{(\nu)}$, *so daß die $\psi(n)$ Lösungen der Modulargleichung Funktionen liefern, welche zu den $\psi(n)$ gleichberechtigten Gruppen:*

$$\Gamma_\psi' = \Gamma_\psi, \Gamma_\psi'', \ldots, \Gamma_\psi^{(\psi)}$$

*gehören* (s. S. 990). Diese $\psi(n)$ Gruppen sind kommensurabel und enthalten als gemeinsamen Bestandteil *die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_{\mu(n)}$*. Legen wir nach S 994 für letztere neben $J$ eine Funktion $z(\omega)$ zugrunde, welche dann mit $J$ durch eine etwa:

$$g(z, J) = 0 \tag{7}$$

zu nennende irreduzibele Gleichung $\mu^{ten}$ Grades in $z$ verbunden ist, so haben wir für die $\psi(n)$ Funktionen $J^{(\nu)}$ rationale Darstellungen:

$$J^{(\nu)} = R_\nu(z, J), \qquad \nu = 1, 2, \ \ , \psi(n) \tag{8}$$

in $z$ und $J$, während andrerseits, falls wir für die Modulfunktionen $n^{ter}$ Stufe zur rationalen Darstellung derselben neben $J$ die $\psi(n)$ Funktionen $J^{(\nu)}(\omega)$ zugrunde legen, insbesondere für $z(\omega)$ eine Darstellung:

$$z = R(J, J', \ldots, J^{(\psi)}) \tag{9}$$

entspringt. *Die zur rationalen Funktion (9) gehörende „Resol-*

*vente" (7) der Modulargleichung (5) hat die Eigenschaft, daß ihre sämtlichen Wurzeln $z$ (als Modulfunktionen $n^{ter}$ Stufe) in einer unter ihnen und $J$ rational darstellbar sind, sowie daß alle $\psi$ Wurzeln der Modulargleichung (5) rational in jener ersten Wurzel $z$ und $J$ sind; nach Kap. IV, § 10 erkennen wir in $g(z, J) = 0$ die „Galoissche Resolvente" der Modulargleichung und also in der Gruppe $G_\mu$ die „Galoissche Gruppe" derselben.*[1]

Die ersten Andeutungen über die Modulargleichungen (5) finden sich bei Dedekind, *J. f. Math.* **83**, 265ff. (1877). Klein, *Math. Ann.* **14**, 141 (1878), geht zur Gewinnung der Modulargleichungen vom Studium des „FB" der $\Gamma_{\psi(n)}$ aus, indem er denselben auf eine $\psi(n)$-blättrige Riemannsche Fläche $F_\psi$ über der $J$-Ebene abbildet. Z. B. hat man für $n = 7$ eine 8-blättrige $F_8$ folgender Verzweigung: Bei $J = 0$ liegen 2 dreiblättrige Verzweigungspunkte übereinander, während daselbst 2 Blätter getrennt verlaufen; bei $J = 1$ liegen 4 zweiblättrige Verzweigungspunkte übereinander; bei $J = \infty$ findet sich ein siebenblättriger Verzweigungspunkt, während das 8. Blatt dort unverzweigt verläuft. Aus Formel (4) S. 994 folgt als Geschlecht dieser $F_8$ leicht $p = 0$. Es existiert also eine *Hauptfunktion* der $\Gamma_8$, die Klein in geeigneter Weise auswählt und $\tau(\omega)$ nennt. In diesem $\tau$ ist dann $J$ eine rationale Funktion $8^{ten}$ Grades, deren Gestalt aus der Verzweigung der $F_8$ durch rein algebraische Erwägungen wie folgt sich findet:

$$(10) \qquad \begin{aligned} J : (J - 1) : 1 = (\tau^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 \\ : (\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2 : 1728\tau. \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt $U(\omega)$ statt $\omega$ und schreiben $\tau(U(\omega)) = \tau'(\omega)$, so folgt dieselbe Relation zwischen $J'$ und $\tau'$. Da aber $\Gamma_8$ durch $U$ in sich transformiert wird, so ist auch $\tau'$ Hauptfunktion der $\Gamma_8$ und als solche linear in $\tau$ darstellbar. Die Untersuchung zeigt, daß $\tau\tau' = 49$ die Beziehung zwischen $\tau$ und $\tau'$

---

1) Die Zerlegung der $G_\mu$ in ihre sämtlichen Untergruppen gestattet demnach die Auffindung aller Resolventen der Modulargleichung. Die Angaben von S. 989f über die Kongruenzgruppen niederster Stufen liefern den S 991 erwähnten Satz von Galois, daß unter allen Primzahlgraden $n$ nur bei den drei Graden $n = 5, 7, 11$ Resolventen auftreten, deren Grade kleiner als die Grade der Modulargleichung sind. Nur in diesen drei Fällen hat die Modulargleichung $(n + 1)^{ten}$ Grades eine Resolvente $n^{ten}$ Grades Wegen Aufstellung dieser Resolventen vgl. Hermite, *Ann di Mat.* **2**, 59 (1860) und Klein, *Math Ann.* **14**, 417 (1878) u. **15**, 533 (1879).

ist. Die Elimination von $\tau$ und $\tau'$ aus den drei so gewonnenen Gleichungen liefert die Modulargleichung (5); da dieselbe indessen etwas kompliziert ausfällt, so sieht Klein jene drei Gleichungen als Ersatz der Modulargleichung an.

Nach dieser Methode behandelt Klein a. a. O. die Fälle $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$, die sämtlich $p = 0$ haben, und Gierster, *Math. Ann.* **14**, 537 (1878), die auch noch zu $p = 0$ gehörenden $n = 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 25$. Ausgedehnte Entwicklungen über weitere Fälle $n$, die dann $p > 0$ haben, führte Kiepert, *Math. Ann.* **32**, 1 (1887), aus. Fricke, *Math. Ann.* **40**, 469 (1891), untersuchte die Fälle $n$, bei denen die durch $U$ erweiterte $\Gamma_{\psi(n)}$ noch $p = 0$ hat und also die Fläche $F_{\psi(n)}$ über der $J$-Ebene elliptisch oder hyperelliptisch wird; s. auch Fricke, *„Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen"* **2**, S. 342 ff. (Leipzig 1922).

Ein nur scheinbar allgemeinerer Ansatz für die *„Transformation $n^{\text{ten}}$ Grades"* wird durch die Substitution:

$$(11) \qquad \omega' = U(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \qquad ad - bc = n$$

gewonnen, wo $a, b, c, d$ irgend vier ganze Zahlen der Determinante $n$ sind. Setzen wir wieder $J'(\omega) = J(U(\omega))$, so werden, falls wir $V$ die gesamte Modulgruppe $\Gamma$ durchlaufen lassen, offenbar alle Transformationen $n^{\text{ten}}$ Grades:

$$(12) \qquad VU(\omega) = \frac{(\alpha a + \beta c)\,\omega + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)\,\omega + (\gamma b + \delta d)}$$

dieselbe transformierte Funktion liefern. Für alle diese Transformationen (12) brauchen wir demnach nur eine als *„Repräsentanten"* auszuwählen, und zwar durch zweckmäßige Wahl von $V$. Ist $A$ der größte gemeinsame Teiler von $a$ und $c$, so ist $A$ ein Teiler von $n$, und zwar sei $n = A \cdot D$. Setzt man nun:

$$\gamma = -\frac{c}{A}, \qquad \delta = \frac{a}{A},$$

so sind $\gamma$ und $\delta$ zueinander relativ prime ganze Zahlen, so daß man die Gleichung:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha\frac{a}{A} + \beta\frac{c}{A} = 1$$

in ganzen Zahlen $\alpha, \beta$ lösen kann; und zwar ist die allgemeinste

Lösung in einer ersten $\alpha_0, \beta_0$ mittels einer beliebigen ganzen Zahl $\nu$ in der Gestalt:

$$\alpha = \alpha_0 - \nu\left(\frac{c}{A}\right), \quad \beta = \beta_0 + \nu\left(\frac{a}{A}\right)$$

darstellbar. Für die Koeffizienten von (12) findet sich jetzt:

$$\alpha a + \beta c = A, \quad \gamma a + \delta c = 0, \quad \gamma b + \delta d = D,$$
$$\alpha b + \beta d = (\alpha_0 b + \beta_0 d) + \nu D.$$

Wählt man demnach $\nu$ derart, daß der zuletzt angegebene zweite Koeffizient der Transformation (12) eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots, D-1$ wird, so ist damit $V$ und also der zu wählende *Repräsentant:*

$$(13) \quad \omega' = \frac{A\omega + B}{D}, \quad AD = n, \quad B = 0, 1, 2, \cdots, D-1$$

bestimmt. Aus den beiden hinzugefügten Gleichungen zählt man ab: *Die Anzahl der verschiedenen Repräsentanten für Transformation $n^{\text{ten}}$ Grades ist gleich der Teilersumme der Zahl $n$, welche durch $\Phi(n)$ bezeichnet werde.*

Man sagt, die Transformation gehöre „*eigentlich*" zum $n^{\text{ten}}$ Grade, wenn die vier ganzen Zahlen $a, b, c, d$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, die drei Zahlen $A, B, D$ *keinen* gemeinsamen Teiler $> 1$ haben. Liegt aber ein solcher Teiler $\sigma$ vor, so ist $n$ durch $\sigma^2$ teilbar, und die Forthebung des Teilers liefert eine eigentlich zum Grade $\frac{n}{\sigma^2}$ gehörende Transformation. *Die Anzahl der eigentlich zum Grade $n$ gehörenden Repräsentanten ist $\psi(n)$.* Man kann nämlich nicht nur jede der $\psi(n)$ in (6) benutzten Transformationen $U = \begin{pmatrix} n\alpha_\nu, & n\beta_\nu \\ \gamma_\nu, & \delta_\nu \end{pmatrix}$, welche offenbar eigentlich zum Grade $n$ gehört, wie oben, durch einen Repräsentanten (13) mit teilerfremden $A, B, D$ ersetzen, sondern auch umgekehrt von jedem solchen Repräsentanten durch ein geeignet gewähltes $V$ zu:

$$V\left(\frac{A\omega + B}{D}\right) = n\,\frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'},$$

mit $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$ gelangen (cf. „*Mod.*" 2, 47) gelangen. *Die Transformationen $n^{\text{ten}}$ Grades im allgemeinen Sinne setzen sich demnach aus allen Transformationen zusammen, welche eigentlich*

*zu den Graden* $\frac{n}{\sigma^2}$ *gehören, wo* $\sigma^2$ *alle quadratischen Teiler von* $n$ *unter Einschluß von* $\sigma^2 = 1$ *zu durchlaufen hat.* Für die Teilersumme $\Phi(n)$ ergibt sich hieraus:

$$\Phi(n) = \sum_\sigma \psi\left(\frac{n}{\sigma^2}\right),$$

wobei sich die Summe auf alle quadratischen Teiler $\sigma^2$ von $n$ bezieht, $\sigma^2 = 1$ eingeschlossen. Die $\Phi(n)$ Funktionen

$$J\left(\frac{A\omega + B}{D}\right),$$

d. h. alle unterschiedenen durch Transformationen $n^{\text{ten}}$ Grades herstellbaren Funktionen $J\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)$, sind die Lösungen einer „Modulargleichung", welche reduzibel ist, so oft $n$ quadratische Teiler $> 1$ hat, und welche einfach das Produkt aller irreduzibelen Gleichungen (5) der Grade $\frac{n}{\sigma^2}$ darstellt.

Die Transformation der Modulfunktionen höherer Stufe ist nicht wesentlich komplizierter als diejenige von $J(\omega)$, sobald nur der Transformationsgrad $n$ gegen die etwa durch $m$ z bezeichnende Stufenzahl relativ prim ist. Es sei $\Gamma_\mu$ entweder die bisher so bezeichnete Hauptkongruenzgruppe des Index $\mu = \mu(m)$ oder irgendeine *ausgezeichnete* Kongruenzgruppe $m^{\text{ter}}$ Stufe des Index $\mu$; die Substitutionen von $\Gamma_\mu$ seien etwa durch

$$v_0 = 1,\ v_1,\ v_2, \ldots$$

bezeichnet, während in $1, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$ ein System bezüglich $\Gamma_\mu$ inäquivalenter Substitutionen vorliege. Der „FB" der $\Gamma_\mu$ werde durch eine zugehörige Funktion $z = \varphi(\omega)$, z. B. die Funktion $J(\omega)$, auf eine Riemannsche Fläche abgebildet, die $F_\mu$ genannt worde, und welche nach S. 993ff, da $\Gamma_\mu$ ausgezeichnete Untergruppe sein sollte, den $\mu$ Substitutionen $V_i$ entsprechend $\mu$ Transformationen in sich, eine Gruppe $G_\mu$ bildend, zulaßt

Es sei nun zunächst $\omega$ irgendein Punkt in der $\omega$-Halbebene und $n$ eine positive ganze gegen $m$ teilerfremde Zahl. Setzt man $\omega' = n\omega$, so ist dadurch eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen zwei Punkten $\omega, \omega'$ der Halbebene erklärt Wir wollen diese Beziehung auf die Riemannsche Fläche $F_\mu$ übertragen, welche wir dem „FB" der $\Gamma_\mu$ entsprechend uber der

Ebene einer zugehörigen Funktion $z = \varphi(\omega)$ lagerten. Einem ersten Punkte $\omega$ entspreche die Stelle $z = x$ der Fläche, dem zugeordneten Punkte $\omega'$ die Stelle $z = y$.

Um aber die hiermit gewonnene Beziehung oder, wie man sagt, „*Korrespondenz*“ der Stellen $x$ und $y$ auf der $F_\mu$ in ihrer vollen Bedeutung zu erfassen, lassen wir die Stelle $x$ von ihrer Anfangslage irgendwelche geschlossenen Umläufe auf der $F_\mu$ ausführen. Diese Umläufe übertragen sich in der $\omega$-Halbebene auf die Wege von $\omega$ zu den äquivalenten Punkten

$$v_1(\omega),\ v_2(\omega), \ldots,$$

so daß die Frage entsteht, wie viele und welche unter den Punkten

$$n\omega,\ nv_1(\omega),\ nv_2(\omega), \ldots$$

bezüglich $\Gamma_\mu$ inäquivalent sind. Aus dem Umstande, daß $n$ teilerfremd gegen $m$ ist, folgt für die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_{\mu(m)}$, sowie z. B. auch für die ausgezeichneten Gruppen $\Gamma_{96}$ und $\Gamma_{384}$ der Stufen 8 und 16 (s. S. 997), daß $n\omega$ und $nv(\omega)$ stets und nur dann bezüglich $\Gamma_\mu$ äquivalent sind, wenn der dritte Koeffizient $\gamma$ von $v$ mit 0 (mod $n$) kongruent ist. Damit gelangen wir zu einer Untergruppe des Index $\psi(n)$ in $\Gamma_\mu$, so daß wir nur $\psi(n)$ inäquivalente Stellen:

$$(14)\qquad \omega' = n\omega,\quad \omega'' = nv_1(\omega),\quad \omega''' = nv_2(\omega), \cdots,$$
$$\omega^{(\psi)} = nv_{\psi-1}(\omega)$$

gewinnen. Sie mögen die Stellen $y_0 = y, y_1, \ldots, y_{\psi-1}$ der $F_\mu$ liefern, *so daß also durch unsere Korrespondenz jeder Stelle $x$ der $F_\mu$ ein System von $\psi(n)$ Stellen $y_0, y_1, \ldots, y_{\psi-1}$ zugeordnet ist.*

Man ziehe jetzt die $\mu$ Transformationen der $F_\mu$ in sich heran. Die der Substitution $V_i$ entsprechende führe das Punktsystem $y_0, y_1, \ldots, y_{\psi-1}$ über in $y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \ldots, y_{\psi-1}^{(i)}$. Wir gewinnen auf diese Weise im ganzen $\mu$ Korrespondenzen, durch deren einzelne der Stelle $x$ das Stellensystem $(y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \ldots, y_{\psi-1}^{(i)})$ zugeordnet ist. Man kann diese Korrespondenz auch dadurch festlegen, daß man der Stelle $\omega$ die $\psi(n)$ bezüglich $\Gamma_\mu$ inäquivalenten Stellen:

$$(15)\quad \omega' = nV_i(\omega),\quad \omega'' = nv_1(V_i(\omega)), \cdots,\quad \omega^{(\psi)} = nv_{\psi-1}(V_i(\omega))$$

entsprechen läßt. *Setzen wir der Reihe nach $i = 0, 1, \ldots, \mu - 1$,*

*so erschöpfen wir, wie sich leicht zeigen läßt, damit alle „eigentlich“ zum Grade $n$ gehörenden Transformationen.*

Invertieren wir jetzt die zuerst betrachtete Korrespondenz, indem wir dem Punkte $y$, der $\omega$ entsprechen mag, den Punkt $x_0 = x$, der $\omega' = \frac{\omega}{n}$ entspricht, zuordnen, so haben wir hierbei wieder eine eigentlich zum Grade $n$ gehörende Transformation vor uns und gelangen also zu einer bestimmten anderen unter den $\mu$ Korrespondenzen (15). Wir erkennen, daß die Inversion gleichfalls wieder zu einer $\psi(n)$-deutigen Korrespondenz führt. *Es handelt sich also hier um $\psi(n)$-$\psi(n)$-deutige Korrespondenzen zwischen Punktsystemen $(x_0, x_1, \ldots, x_{\psi-1})$ und $(y_0, y_1, \ldots, y_{\psi-1})$ der $F_\mu$.* Aus einer unter diesen Korrespondenzen gehen die $(\mu - 1)$ übrigen hervor, indem man etwa bei festliegenden Stellen $(x_0, x_1, \ldots, x_{\psi-1})$ das System

$$(y_0, y_1, \ldots, y_{\psi-1})$$

den $(\mu - 1)$ von der Identität verschiedenen Transformationen der Gruppe $G_\mu$ unterwirft. Denken wir hierbei durch $V_i$ den Übergang von der ersten zur $i^{\text{ten}}$ Korrespondenz vollzogen, so können wir durch Ausführung einer gewissen Transformation $V_k$ von $G_\mu$ auf $(x_0, x_1, \ldots, x_{\psi-1})$ zur ersten Korrespondenz zurückgelangen. Es folgt: *Die einzelne Korrespondenz gestattet $\mu$ Transformationen in sich, bei deren einzelner auf die Punktsysteme $(x_0, x_1, \ldots, x_{\psi-1})$ und $(y_0, y_1, \ldots, y_{\psi-1})$ gleichzeitig die Transformationen $V_k$ und $V_i$ auszuüben sind.* Der einfachste Fall ist der, daß $V_k = V_i$ ist, *wo also beide Punktsysteme gleichzeitig dieselbe Transformation erfahren;* dieser Fall heißt in *„Mod.“* 2, 133 der *„Fall der Kogredienz“,* man sehe das Nähere a. a. O. nach.

Hat die Fläche $F_\mu$ das Geschlecht $p = 0$, so gibt es eine zur $\Gamma_\mu$ gehörende Hauptfunktion $\varphi(\omega)$, die die $G_\mu$ als eine Gruppe von $\mu$ linearen Substitutionen darzustellen gestattet. *Die einzelne Korrespondenz wird alsdann durch eine algebraische Gleichung*

$$G(\varphi, \varphi') = 0 \tag{16}$$

*$\psi^{\text{ten}}$ Grades sowohl in $\varphi$ wie $\varphi'$ dargestellt, welche als „Modulargleichung $m^{\text{ter}}$ Stufe für Transformation $n^{\text{ten}}$ Grades“ bezeichnet wird.* Liegt der Fall der Kogredienz vor, so geht die Gleichung (16) in sich selbst über, falls man $\varphi$ und $\varphi'$ gleichzeitig den Substitutionen der $G_\mu$ unterwirft. Hierauf gründet

sich eine invariantentheoretische Methode zur Aufstellung der Gleichung (16).

Die Modulargleichungen zweiter Stufe für $k^2(\omega)$ sind in anderer Gestalt am frühesten betrachtet; denn sie gehen aus jenen Modulargleichungen hervor, zu denen Jacobi in den ersten Artikeln der „*Fundamenta nova*" (1829) für die Funktion $u = \sqrt[4]{k}$ geführt wurde, und die im Anschluß an ihn durch Sohnke, *J. f. Math.* **16** (1836) weiter untersucht wurden. Wird die transformierte Funktion mit $v = \sqrt[4]{l}$ bezeichnet, so gilt z. B. für $n = 3$:

$$v^4 - u^4 - 2uv(v^2u^2 - 1) = 0$$

und für $n = 7$:

$$v^8 + u^8 - 2v^4u^4 - 16v^3u^3(vu - 1)^2 - 20v^2u^2(vu - 1)^4 \\ - 8vu(vu - 1)^6 = 0.$$

Eine merkwürdig einfache Form nimmt die erste dieser Gleichungen an, wenn man neben $k^2$ und $l^2$ noch die komplementären Moduln $k'^2 = 1 - k^2$ und $l'^2 = 1 - l^2$ einführt. Man rechne die Gleichung in:

$$(v^4 - u^4)^2 = 4u^2v^2(v^2u^2 - 1)^2$$

und von hier aus in:

$$(1 - u^8)(1 - v^8) = (1 - u^2v^2)^4$$

um; geht man jetzt auf die Bezeichnungen $k^2, l^2, k'^2, l'^2$ zurück, so folgt nach Ausziehen die 4. Wurzel:

$$(17) \qquad \sqrt{k}\sqrt{l} + \sqrt{k'}\sqrt{l'} = 1,$$

eine bereits bei Legendre auftretende Gleichung Eine entsprechend einfache Gestalt existiert für die Modulargleichung des 7. Transformationsgrades. Die für $n = 7$ angegebene Gleichung gestattet die Umrechnung auf:

$$(1 - u^8)(1 - v^8) = (1 - uv)^8;$$

durch Ausziehen der 8. Wurzel folgt die von Gützlaff, *J. f. Math.* **12** (1832), angegebene Gestalt der Modulargleichung:

$$(18) \qquad \sqrt[4]{k}\sqrt[4]{l} + \sqrt[4]{k'}\sqrt[4]{l'} = 1.$$

Über die weitere Literatur vgl. „*Mod*". **2**, 147 ff.

Die wahre Bedeutung dieser Gleichungen ist erst durch Hurwitz, *Gött. Nachr.*, 1883, aufgedeckt und ergibt sich aus der Darstellung unserer Korrespondenzen, falls die Fläche $F_\mu$ ein Geschlecht $p > 0$ hat. Nehmen wir als Beispiel die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_{\mu(m)}$ und als zugehörige Funktionen etwa die $\frac{m-1}{2}$ Modulformen $z_\lambda$ von S. 1003, so können wir diese (vgl. S. 996) als homogene Koordinaten eines Raumes von $\frac{1}{2}(m-3)$ Dimensionen interpretieren und finden in diesem Raume die Fläche $F_\mu$ auf eine Kurve $K$ abgebildet, welche $\mu$ Kollineationen in sich (der $G_\mu$ entsprechend) gestattet. *Auf dieser Kurve $K$ liefert alsdann die einzelne unserer Korrespondenzen eine $\psi$-$\psi$-deutige sogenannte „Modularkorrespondenz", zu deren algebraischer Darstellung man (wegen der $\mu$ simultanen Kollineationen der Korrespondenz in sich) wieder die Brauchbarkeit invariantentheoretischer Methoden erkennt.* Bei den ausgezeichneten Gruppen $\Gamma_{96}$ und $\Gamma_{384}$ der 8. und 16. Stufe haben wir entsprechend die durch

$$z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0 \quad \text{und} \quad z_1^8 + z_2^8 + z_3^8 = 0$$

gegebenen Kurven $K_4$ und $K_8$ zugrunde zu legen (s. S. 998). Auf der $K_4$ liefert alsdann die Gleichung (17) für die 4-4-deutige Korrespondenz bei $n = 3$ einfach die Darstellung:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0,$$

wenn die einander korrespondierenden Punkte die Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ und $y_1, y_2, y_3$ haben. Entsprechend haben wir auf der $K_8$ als Darstellung der 8-8-deutigen Modularkorrespondenz bei $n = 7$ zufolge (18) wieder:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0.$$

Einen wesentlichsten Schritt zur Entwicklung der Modularkorrespondenzen sowie überhaupt der Theorie der algebraischen Korrespondenzen hat Hurwitz, *Leipz. Ber.* vom 11. Jan 1886 und *Math. Ann* **28**, 561 ff, durch Heranziehung der Integrale erster Gattung getan, wobei insbesondere das *Korrespondenzprinzip*, die Anzahl der Koinzidenzen, d i. der sich selbst entsprechenden Punkte, betreffend, in seiner endgültigen Gestalt aufgedeckt wurde Speziell wegen der Modularkorrespondenzen sehe man Hurwitz, *Math. Ann.* **25**, 183 (1884) und *Leipz Ber.* vom 15 Dez. 1884. Die Anzahl der Koinzidenzen der

Modularkorrespondenz $m^{\text{ter}}$ Stufe für den $n^{\text{ten}}$ Grad ist dabei auf zwei Weisen abzählbar, und zwar erstlich aus der algebraischen Darstellung der Korrespondenz, wobei diese Anzahl in Abhängigkeit von $n$ dargestellt wird durch die *Teilersumme* $\Phi(n)$ *und ähnliche Funktionen von* $n$, *sowie durch jene zahlentheoretischen Funktionen von* $n$, *die als ganzzahlige Entwicklungskoeffizienten bei den Integralen erster Gattung* $m^{\text{ter}}$ *Stufe auftreten* (s. S. 999ff). Die zweite Abzählung der Anzahl der Koinzidenzen geschieht auf transzendentem Wege aus dem Ansatz der Transformationen $n^{\text{ten}}$ Grades

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$$

durch Diskussion der Gleichung $\omega' = \omega$, wobei sich die Koinzidenzenanzahl als *eine Summe von Klassenanzahlen ganzzahliger quadratischer Formen von negativer Determinante* darstellt. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke derselben Anzahl entstehen die sogenannten *„Klassenzahlrelationen"*, deren Theorie Hurwitz allgemein begründete, nachdem Kronecker, *J. f. Math.* 57 (1860) spezielle Relationen dieser Art aus den Jacobischen Modulargleichungen und Gierster, *Gött. Nachr.* von 1879 und *Math. Ann.* 17, 71, ebensolche aus den Modulargleichungen 3. und 5. Stufe abgeleitet hatte.[1])

## § 24. Die polymorphen Funktionen und ihre Differentialgleichungen.

In § 13 bildeten wir einen beliebigen „FB" durch eine zugehörige $\mu$-wertige automorphe Funktion $z = \varphi(\zeta)$ auf eine $\mu$-blättrige geschlossene Riemannsche Fläche $F$ über der $z$-Ebene ab. Die Randkurven des „FB" erscheinen dabei auf $F$ zu Paaren zusammengeheftet und liefern ein Querschnittsystem der Fläche; die so zerschnittene Fläche möge durch $F'$ bezeichnet werden. Hat der „FB" feste Ecken, etwa in der Anzahl $n$, so mögen diese die $n$ Punkte $e_1, e_2, \ldots, e_n$ der Fläche liefern; auf $F'$ endet in jedem dieser Punkte ein Querschnitt.

Die zu $z = \varphi(\zeta)$ inverse Funktion möge durch $\zeta = f(z)$ bezeichnet werden. *Sie ist auf* $F'$ *eindeutig, hat jedoch auf der unzerschnittenen Fläche* $F$ *an den* $n$ *Stellen* $e_1, \ldots, e_n$ *Verzweigungspunkte und setzt sich bei irgendeinem nicht gerade durch*

1) In *„Mod"* 2 findet man alle Einzelheiten der Transformationstheorie und ihrer zahlentheoretischen Anwendungen.

*einen Verzweigungspunkt hindurchlaufenden geschlossenen Wege auf $F$ in eine bestimmte lineare Funktion ihrer selbst fort:*

$$\zeta'(z) = \frac{\alpha\zeta(z)+\beta}{\gamma\zeta(z)+\delta}. \tag{1}$$

In der Tat gelangen wir hier zu jenen Substitutionen der zugehörigen $\Gamma$ zurück, welche den „FB" in die äquivalenten Bereiche des zugehörigen zusammenhängenden Netzes $N$ überführen. Im Anschluß an die durch die Gleichung (1) zum Ausdruck kommende Grundeigenschaft der Funktion $\zeta = f(z)$ heißt dieselbe eine „*linear-polymorphe*" oder kurz „*polymorphe*" *Funktion* auf der Riemannschen Fläche $F$.

Sind $\zeta' = f'(z)$, $\zeta'' = f''(z)$, $\zeta''' = f'''(z)$ die drei ersten Ableitungen der polymorphen Funktion $\zeta$, so zeigt sich (vgl. H. A. Schwarz, *J. f. Math.* **75**, 292 (1872)), daß der symbolisch durch $[\zeta]_z$ zu bezeichnende Differentialausdruck:

$$[\zeta]_z = \frac{\zeta'''}{\zeta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2 \tag{2}$$

gegenüber jeder linearen Substitution von $\zeta$, also insbesondere gegenüber unseren Substitutionen (1) invariant ist. Somit ist $[\zeta]_z$ auf $F$ eindeutig, und die nähere Untersuchung (vgl. „*Aut.*" **2**, 48) zeigt, daß es sich um eine zu $F$ gehörige algebraische Funktion handelt. Bedienen wir uns (wie S. 967) zur Darstellung der algebraischen Funktionen von $F$ neben $z$ einer geeignet gewählten Funktion $w$ der Fläche $F$, so entspringt für $[\zeta]_z$ eine rationale Darstellung in $w$ und $z$:

$$[\zeta]_z = R(w, z) \tag{3}$$

*Die polymorphe Funktion $\zeta = f(z)$ ist eine Lösung dieser Differentialgleichung dritter Ordnung.*

Hat z. B. der „FB" das Geschlecht $p = 0$ und liegen $n$ feste Ecken der Winkel $\frac{2\pi}{l_1}, \ldots, \frac{2\pi}{l_n}$ vor, so wähle man $z$ als Hauptfunktion derart, daß die in den festen Ecken vorliegenden Werte $z = e_1, \ldots, e_n$ durchweg endlich sind. In diesem Falle ist der mit der polymorphen Funktion $\zeta = f(z)$ gebildete Ausdruck $[\zeta]_z$ rational in $z$ allein, und auf Grund der Reihenentwicklungen für $z = \varphi(\zeta)$ stellt man diese Funktion $R(z)$ folgendermaßen dar (vgl. „*Aut.*" **2**, 49):

$$(4)\qquad [\zeta]_z = \frac{2}{g(z)}\left\{G_{n-4}(z) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{l_k^2}\right)\frac{g'(e_k)}{z-e_k}\right\}.$$

Hierbei ist $g(z)$ das folgende Produkt von Linearfaktoren:

$$g(z) = (z-e_1)(z-e_2)\cdots(z-e_n),$$

während $G_{n-4}(z)$ für $n = 3$ fortfällt und für $n > 3$ eine zunächst nicht näher bestimmbare ganze Funktion $(n-4)^{\text{ten}}$ Grades von $z$ darstellt (vgl. *„Aut."* 2, 50).

Schreibt man die Substitution (1) unimodular (vgl. S. 920), so gilt (vgl. Riemann, *Werke*, 1. Aufl., 415) der Satz, *daß sich die beiden Funktionen:*

$$(5)\qquad Z_1 = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}}, \qquad Z_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}}$$

*bei demjenigen Umlaufe von $z$, der $\zeta$ in den in (1) dargestellten Zweig unserer polymorphen Funktion überführt, in der Gestalt:*

$$(6)\qquad Z_1' = \alpha Z_1 + \beta Z_2, \qquad Z_2' = \gamma Z_1 + \delta Z_2$$

*binar substituieren.* Stellt man aus $Z_1$ und $Z_2$ mittels zweier Parameter $A$, $B$ die Funktionenschar:

$$(7)\qquad Z = AZ_1 + BZ_2$$

her und differenziert diese Gleichung zweimal nach $z$, so folgt durch Elimination von $A$ und $B$.

$$Z''\begin{vmatrix} Z_1, & Z_2 \\ Z_1', & Z_2' \end{vmatrix} - Z'\begin{vmatrix} Z_1, & Z_2 \\ Z_1'', & Z_2'' \end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix} Z_1', & Z_2' \\ Z_1'', & Z_2'' \end{vmatrix} = 0$$

Durch Eintragung der Ausdrücke (5) für $Z_1, Z_2$ nehmen die drei hier auftretenden Determinanten die Werte:

$$-1,\ 0,\ -\tfrac{1}{2}[\zeta]_z$$

an: *Die polymorphe Funktion $\zeta$ läßt sich als Quotient der beiden Großen $Z_1, Z_2$ darstellen, welche als spezielle Funktionen der Schar (7) partikuläre Integrale der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung:*

$$(8)\qquad 2\frac{d^2Z}{dz^2} + R(w, z)Z = 0$$

*darstellen, deren allgemeines Integral in (7) vorliegt.* Im Falle $p = 0$ und $n = 3$ verlege man die drei Stellen $e_k$ nach:

$$z = 0, 1, \infty,$$

so daß der dritte Punkt $e_3$ nicht mehr im Endlichen liegt. Der Ausdruck $R(z)$ ändert sich dann ein wenig; die Differentialgleichung zweiter Ordnung nimmt die Gestalt an:

$$(9) \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + \left( \frac{1 - \frac{1}{l_1^2}}{4 z^2} + \frac{1 - \frac{1}{l_2^2}}{4(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} - \frac{1}{l_3^2} - 1}{4z(z-1)} \right) Z = 0.$$

Führen wir statt $Z$ die folgende Funktion:

$$(10) \qquad H = Z \cdot z^{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_1}\right)} \cdot (z-1)^{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_2}\right)}$$

ein und schreiben zur Abkürzung:

$$(11) \quad \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_3}\right) = \alpha, \qquad \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3}\right) = \beta,$$
$$1 - \frac{1}{l_1} = \gamma,$$

so geht die Gleichung (9) in *die hypergeometrische Differentialgleichung:*

$$(12) \quad z(z-1)\frac{d^2 H}{dz^2} + [(\alpha + \beta + 1) z - \gamma] \frac{dH}{dz} + \alpha\beta H = 0$$

über. Die bei $p = 0$, $n = 3$ auftretenden polymorphen Funktionen $\zeta$ lassen sich demnach als Quotienten hypergeometrischer Reihen darstellen (vgl. H. A. Schwarz, *J. f. Math.* 75 (1872)). Man vgl. übrigens Riemann, *Gött. Abh.* 7 (1857) oder *Werke*, 1 Aufl., 62, Klein, *Math. Ann.* 38, 144 (1890), sowie wegen der weiteren Literatur die ausführliche Darstellung in *„Aut."*, 2, 109 ff. und die Angaben im Encyklopädiereferat *„Autom. Funkt. u. Modulfunktionen"*, Encyklopädie 2, 2, 432 ff

## § 25. Existenzsätze der polymorphen Funktionen.

Die große Bedeutung der polymorphen Funktionen $\zeta = f(z)$ auf den Riemannschen Flächen $F$ beruht auf den Eindeutigkeitssätzen von S. 967 ff., nach denen die algebraischen Funktionen der Flächen $F$, sowie beim Zutreffen gewisser Voraussetzungen die

Integrale der drei Gattungen und die Lösungen linearen Differentialgleichungen (2) S. 968 *eindeutige Funktionen von* $\zeta$ werden. Eine Funktion $\zeta = f(s)$ heißt demnach auch wohl eine *„uniformisierende Variable"* der Riemannschen Fläche $F$, und die Sätze über die Existenz von polymorphen Funktionen der verschiedenen Arten auf Riemannschen Flächen heißen in diesem Sinne auch *„Uniformisierungssätze"*. Eine Reihe wichtiger Sätze dieser Art ist von Klein Anfang der achtziger Jahre vorigen Jahrhunderts aufgestellt. Sie wurden von ihm als *Fundamentaltheoreme* bezeichnet, weil Klein in ihnen mit Recht wichtige und abschließende Sätze der Riemannschen Funktionentheorie sah.

Die spätere ausführliche Darstellung in *„Aut."* 2, S. 283 ff. hat für die verschiedenen Theoreme spezielle und sachlich begründete Namen eingeführt, die sich nach der Art des zugehörigen Polygonnetzes in der $\zeta$-Ebene richten. Man hat also auf die S. 957 ff. unter I, 1 usw. gegebene Klassifikation der Gruppen zurückzugehen. Der dortigen Gruppenart I, 1 entspricht das von Klein in den *Math. Ann.* **19**, 565 aufgestellte *Rückkehrschnittheorem: Eine beliebige Riemannsche Fläche $F$ eines Geschlechtes $p > 0$ sei mit $p$ einander nicht schneidenden und $F$ nicht zerstückenden Rückkehrschnitten versehen. Dann gibt es eine und im wesentlichen auch nur eine polymorphe Funktion $\zeta$, die die zerschnittene Fläche auf einen Gruppen-„DB" mit $2p$ getrennt verlaufenden, einander paarweise zugeordneten Randkurven abbildet.* Ein zweites Theorem schließt sich an die S. 957 unter I, 2 genannte Gruppenart an, wo der „DB" einen Hauptkreis hat und durch ihn in zwei symmetrische Hälften zerschnitten wird. Das Theorem bezieht sich auf sogen. *orthosymmetrische* Riemannsche Flächen $F$. Eine solche Fläche gestattet eine symmetrische Umformung in sich, bei der Übergangs- oder Symmetrielinien in gewisser Anzahl und von der Art auftreten, daß die Zerschneidung von $F$ längs dieser Linien zwei *getrennte* symmetrische Flächenhälften herstellt. Auf einer solchen Fläche mag man dann noch $2n$ paarweise symmetrische Punkte markieren, die elliptische oder parabolische Ecken des „DB" werden sollen, wobei im ersteren Falle die Periode der betreffenden elliptischen Substitution frei wählbar ist. Auf diese Voraussetzungen bezieht sich das erst in *„Aut."* 2, 283 ff. herausgearbeitete *Hauptkreistheorem: Eine wie bezeichnet mit $2n$ Punkten signierte orthosymmetrische Riemannsche Fläche $F$ besitzt eine und im wesentlichen nur eine polymorphe Funktion $\zeta$, die die geeignet zerschnittene Fläche auf einen Gruppen-„DB" mit Haupt-*

*kreis von der unter* I, 2 *benannten Art abbildet.* An die S. 958 unter II, 2 genannten Gruppen schließt sich das *Grenzkreistheorem* an, zu dem Klein sehr früh geführt wurde (s. *Math. Ann.* **20**, 49). Eine Fläche $F$ mit beliebigem $p$ sei mit $n$ Punkten für elliptische oder parabolische Ecken signiert. *Dann gibt es eine und im wesentlichen nur eine polymorphe Funktion $\zeta$, die die geeignet zerschnittene Fläche $F$ auf einen Gruppen-„DB" mit Grenzkreis von der S. 958 unter* II, 2 *gemeinten Art abbildet.* Der ursprüngliche Ausspruch des Theorems bei Klein bezieht sich auf den Fall $n = 0$. Daß $\zeta$ in jedem Falle „im wesentlichen" eindeutig bestimmt ist, ist so gemeint, daß mit $\zeta$ jede lineare Funktion $\frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$, die als nicht wesentlich von $\zeta$ verschieden gilt, eine gleichartige Abbildung der verschnittenen Riemannschen Fläche leistet.

Die drei genannten Theoreme stellen die einfachsten und wichtigsten Uniformisierungssätze dar. Über sie hinaus hat Klein in den *Math. Ann.* **20**, 49 noch ein allgemeines Theorem aufgestellt, welches sich an die S. 958 unter III genannte Gruppengattung mit unendlich vielen Grenzkreisen anschließt. Alle diese Theoreme beziehen sich auf die Existenz polymorpher Funktionen auf endlichblättrigen geschlossenen Riemannschen Flächen. Sie sind also Uniformisierungssätze für irgendwelche *algebraische* Kurven, indem sie Darstellungen der Koordinaten der Kurvenpunkte als eindeutiger automorpher Funktionen liefern. Poincaré hat kurze Zeit später im *Bull Soc. M.* **11**, 112 eine Verallgemeinerung des Grenzkreistheorems aufgestellt, das im gleichen Sinne die Uniformisierung beliebiger *analytischer* Kurven lehrt.

Für die Fundamentaltheoreme sind drei Beweisarten entwickelt Die ursprünglichen Beweisansätze von Klein und Poincaré arbeiten mit Kontinuitätsbetrachtungen (Vgl Klein in den *Math Ann* **20**, 206 oder *Ges math Abh* **3**, 704 und Poincaré in den *Acta math* **4**, 201 S. auch die spätere Darstellung in *„Aut."* **2**, 285.) Beide sind insofern verschiedene Wege gegangen, als Klein mit dem Kontinuum der zerschnittenen Flächen und entsprechend mit dem Kontinuum beliebiger Gruppen-„DB" arbeitet, Poincaré dagegen mit dem Kontinuum der unzerschnittenen Flächen, dem ein Kontinuum „reduzierter" „DB" entspricht. Poincaré wollte auf diese Weise „geschlossene" Kontinua erzeugen. In jedem Falle gilt es die umkehrbar eindeutige Beziehung beider Kontinua aufeinander festzustellen.

Die Schwierigkeiten der Kontinuitätsmethode veranlaßte später (1912) Brouwer und Koebe zu erneuten wichtigen Untersuchungen. (S. den zusammenfassenden Bericht von Klein in den *Ges. math. Abh.* 3, 734 ff.)

Ein zweiter Beweisansatz, der mit der sogen. „*Überlagerungsfläche*" arbeitet, ist von H. A. Schwarz angegeben und von Koebe mit größtem Erfolge zum endgültigen Beweise aller von Klein und Poincaré aufgestellten Uniformisierungssätze entwickelt. (Vgl. die zahlreichen Abhandlungen Koebes seit 1907 in den *Gött. Nachr.*, den *Math. Ann.* **67**, **69**, **72**, **75**, dem *J. f. Math.* **138**, **139** usw.) Es wird der Ausgang genommen von einer $\infty$-fachen Überlagerung der gegebenen Fläche $F$, wie sie einem zugehörigen Polygonnetze entsprechen würde. Auf dieser $\infty$-blättrigen „Überlagerungsfläche" wird dann durch einen konvergenten Prozeß auf die Existenz einer polymorphen Funktion $\zeta = f(z)$ geschlossen. Eine erschöpfende Darstellung dieser Beweismethode zunächst für das Hauptkreis- und das Grenzkreistheorem, sodann für das Rückkehrschnittheorem findet man in „*Aut.*" 2, 439 ff.

Ein dritter gleichfalls von Schwarz herrührender Beweisansatz beruht auf dem Existenzbeweise von Lösungen der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8e^u$$

mit vorgeschriebenen Unstetigkeitsbedingungen auf beliebig gegebenen Flächen $F$. Der Beweis bezog sich ursprünglich nur auf das Grenzkreistheorem und ist in diesem Umfange zur Durchführung gebracht durch Arbeiten von E. Picard im *J. de Math.* (4) 9, 273 (1893) und Poincaré im *J. de Math.* (5) 4, 137 (1898). Die Ausdehnung der Methode auf das Hauptkreistheorem gelang L. Bieberbach. („$\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen", Gött. Nachr. von 1912, S. 599.) Übrigens sei noch allgemein wegen der Fundamentaltheoreme auf das Referat des Verf. in Bd. II, Teilband 2, S. 445 der „*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*" hingewiesen.

## § 26. Geschichtliche Notizen.[1]

Die in § 2 bis 11 behandelten geometrischen Vorstellungen sind für die Entwicklung der Theorie der automorphen

---

1) Vgl. hierzu auch die Ausführungen von Klein in „*Ges. math Abh*" 3, 1, 477 und 577.

Funktionen grundlegend gewesen. Zu einer Zeit, als diese geometrischen Vorstellungen noch nicht allgemein bekannt waren, mußte demnach das Verständnis derjenigen besonderen Modulfunktionen, auf welche die Theorie der elliptischen Funktionen geführt hatte, noch zu wünschen übrig lassen. So findet sich z. B. schon 1828 bei Jacobi, *Werke*, **1**, 263, der Satz, daß die Funktion $k^2(\omega)$ bei allen Substitutionen unverändert bleibt, welche, in unserer Terminologie gesprochen, die Hauptkongruenzuntergruppe 2. Stufe bilden. Aber die Beschaffenheit dieser Funktion $k^2(\omega)$, wie sie oben aus dem Dreiecksnetze der fraglichen Gruppe folgt, bleibt im einzelnen noch undurchsichtig. Den gleichen Standpunkt nehmen im wesentlichen auch einige spätere rein analytische Entwicklungen ein, zu denen man auch die S. 999 genannten Arbeiten von Hermite zu rechnen hat.

Eine tiefere Kenntnis nicht nur der analytischen, sondern auch der geometrischen Verhältnisse unserer Funktionen hat Gauß besessen, der von seinen Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel und die Transformation der elliptischen Funktionen zu den Modulfunktionen geführt wurde. Mehrere aus dem Nachlaß von Gauß veröffentlichte Fragmente (Gauß, *Werke* 8, 99ff.) zeigen, daß Gauß den Charakter der Abbildung der Ebene von $z = k^2(\omega)$ auf das zugehörige Dreiecksnetz der $\omega$-Halbebene klar erkannt hat, das Prinzip, durch symmetrische Reproduktion eines Kreisbogendreiecks Netze solcher Dreiecke herzustellen, allgemein erfaßte und vermutlich daraufhin auch das Auftreten von natürlichen Grenzen bei analytischen Funktionen gesehen hat

Von Riemann ist zu bemerken, daß sich die Theorie der Modulfunktionen und der automorphen Funktionen wesentlich auf der Grundlage seiner funktionentheoretischen Prinzipien entwickelt hat Es kommen hier erstlich die Grundsätze in Betracht, welche Riemann in seiner Dissertation (*Werke*, S. 1) entwickelt hat, und weiter die Ausführungen über die hypergeometrische Reihe (*Gött Abh.* 7 (1857), *Werke*, 1. Aufl., 62), sowie die aus dem Nachlaß herausgegebenen Entwicklungen über lineare Differentialgleichungen (*Werke*, 1. Aufl, 357 (datiert 20. Febr. 1857)) Aber die Theorie unserer Funktionen kann nicht nur als eine Art Fortsetzung der Riemannschen Funktionentheorie angesehen werden, sondern Riemann hat diese Fortsetzung zum guten Teile bereits selbst besessen. Neben einigen schon früher aus Riemanns Nachlaß bekannt gewordenen Arbeiten (*Werke*, 1. Aufl. 413 und 427) ist diese Sachlage am

deutlichsten bewiesen durch eine im Wintersemester 1858/59 von Riemann gehaltene Vorlesung über die hypergeometrische Reihe (herausg. von Wirtinger in B. Riemanns Werken, Nachträge (1902)).

Die nächste wichtige Arbeit ist die S. 1017 genannte Untersuchung von Schwarz, *J. f. Math.* **75**, (1872). Der Titel der Arbeit wendet sich zwar nur an diejenigen Funktionen, welche im Sinne der Sprechweise von S. 944 zu Dreiecksnetzen erster Art gehören. Die Arbeit bringt aber sehr wesentliche Aufschlüsse auch über die Funktionen der Dreiecksnetze zweiter und dritter Art. Eine weitere bedeutungsvolle Arbeit veröffentlichte Schottky, *J. f. Math.* **83**, 300 (1877), über diejenigen Funktionen, welche zu Bereichnetzen der in Fig. 23, S. 958, skizzierten Art gehören, also zu solchen Netzen, bei denen feste Ecken des einzelnen „DB" nicht auftreten und bei denen die ganze $\zeta$-Ebene von einem einzigen Netze bis auf isoliert liegende Grenzpunkte überspannt ist. Noch etwas früher hatte sich Fuchs in einem an Hermite gerichteten Briefe (*J. f. Math.* **83**, 13 (1876)) über einige die Theorie der Modulfunktionen betreffenden Punkte ausgesprochen, an welche er von seiten der Theorie der Differentialgleichungen herangeführt war. Die Veröffentlichung der Fuchsschen Untersuchung hatte die erfreuliche Folge, daß Dedekind in einem Briefe an Borchardt, *J. f. Math.* **83**, 265 (1878) zur Veröffentlichung seiner tief dringenden Untersuchungen über elliptische Modulfunktionen hervortrat.

Zeitlich unmittelbar hieran schließt sich die glänzende Reihe der Untersuchungen Kleins über die Modulfunktionen und die automorphen Funktionen, welche beginnen mit der Arbeit über „Elliptische Funktionen und Gleichungen 5. Grades" in *Math. Ann.* **14**, 111 (1879) und ihren Höhepunkt in der Arbeit „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie" in *Math. Ann.* **21**, 141 (1882) finden. Endlich beginnen mit dem Anfang der achtziger Jahre die bewunderungswürdigen Untersuchungen Poincarés, welcher namentlich durch Fuchs' Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen und durch Hermites Einfluß angeregt selbständig an die Theorie der automorphen Funktionen herankam. Die rasch aufeinanderfolgenden Arbeiten Poincarés, *Acta math.* **1**, 1 und 193, **3**, 40 usw. (1882 ff.) legen Zeugnis von der Schnelligkeit der Auffassung und der Produktionskraft ihres Verfassers ab.

Klein und Poincaré sind im Sommer 1881 miteinander persönlich in Fühlung gekommen. Ihr Briefwechsel ist von

Nörlund in den *Act. math.* **39** veröffentlicht (abgedruckt in „*Ges. math. Abh.*“ **3**, 587 ff.) und gibt einen interessanten Einblick in die Entstehungsgeschichte der Theorie der automorphen Funktionen. In einer äußerlichen Hinsicht ist eine Unstimmigkeit zwischen Klein und Poincaré bestehen geblieben. Poincaré war durch eine Abhandlung von Fuchs über Differentialgleichungen zu seinen ersten Untersuchungen über automorphe Funktionen geführt. Diese Zufälligkeit veranlaßte Poincaré zur Wahl der Benennung „Fonctions fuchsiennes“, ein Umstand, der nur dadurch möglich wurde, daß Poincaré in jener Zeit noch unbekannt mit der gesamten voraufgehenden deutschen Literatur des Gegenstandes war. Wenn Poincaré auch die überzeugenden sachlichen Gründe, die Klein gegen die gewählte Personalbenennung geltend machte, anerkannt hat (Brief an Klein vom 27. Juni 1881), so hat er doch seine Benennung beibehalten. Klein hat späterhin den Namen „Automorphe Funktionen“ vorgeschlagen, der beifällige Aufnahme gefunden hat.

Die weitere Entwicklung hat die Beweise der Existenztheoreme der polymorphen Funktionen, über die bereits in § 25 berichtet wurde, sowie die beiden Werke gebracht, die auf den voraufgehenden Seiten als „Mod.“ und „Aut.“ häufig zu nennen waren. Aber auch heute darf man sich der Äußerung Kleins aus dem vorigen Jahre (1923) anschließen (*Ges. math. Abh.* **3**, 586): „Trotz den erreichten Fortschritten muß das unbefangene Urteil lauten, daß die Theorie der automorphen Funktionen heute keineswegs abgeschlossen ist und der künftigen Forschung noch ein weites Feld bietet.“